TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

OUVRAGES DE L'AUTEUR.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. In-4°, publié en *trois Parties* avec Atlas; 1891-1880-1885 .... 30 fr.

Chaque Partie se vend séparément .... 10 fr.

La Ire Partie (3e édition) renferme tout ce qui est exigé pour l'*admission à l'École Polytechnique*. Cette 3e édition contient la *Théorie de l'intersection de deux polyèdres*, par M. Ernest Lebon.

La IIe Partie (2e édition) et la IIIe Partie (2e édition) sont le développement du *Cours de Géométrie descriptive* professé à l'*École Polytechnique*.

TRAITÉ DE PERSPECTIVE LINÉAIRE, contenant les Tracés pour les Bas-Reliefs et les Décorations théâtrales, avec une Théorie des effets de perspective. 2e édition, entièrement revue. In-4°, avec Atlas in-folio de 40 planches, dont 8 doubles; 1884 .... 25 fr.

RECHERCHES sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques. In-8°; 1867 .... 6 fr.

MÉMOIRE sur l'appareil de l'arche biaise, suivi d'une analyse des principaux Ouvrages publiés sur cette question, et d'une réponse à des critiques sur l'enseignement de la Stéréotomie à l'École Polytechnique. (Extrait des *Annales du Conservatoire des Arts et Métiers*.) .... 2 fr.

ÉTUDES ÉCONOMIQUES sur l'exploitation des chemins de fer. Grand in-8°; 1880 .... 4 fr. 50

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

PAR JULES DE LA GOURNERIE,

MEMBRE DE L'INSTITUT, OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR,
INSPECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES EN RETRAITE, PROFESSEUR HONORAIRE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ANCIEN EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ET PROFESSEUR DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Les Mathématiques ont des inventions très subtiles, et qui peuvent beaucoup servir tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et diminuer le travail des hommes.
DESCARTES (*Discours de la Méthode*).

TROISIÈME ÉDITION

REVUE ET AUGMENTÉE DE LA THÉORIE DE L'INTERSECTION DE DEUX POLYÈDRES,

PAR M. ERNEST LEBON.

PREMIÈRE PARTIE. — TEXTE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

SOMMAIRE DES DEUX DERNIÈRES PARTIES

DU TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

AVANT-PROPOS DE LA SECONDE ÉDITION
(1873).

Je présente au public une seconde édition de la première Partie de mon *Traité de Géométrie descriptive*. Je n'ai fait aucun changement important au texte, mais, sur les conseils de plusieurs professeurs distingués, j'ai modifié un grand nombre de passages pour rendre l'exposition moins concise et plus élémentaire.

Cette première Partie renferme quatre Livres : le premier est relatif aux Lignes droites et aux Plans, le second aux Cylindres, aux Cônes et aux Surfaces de révolution, le troisième à la Méthode des Projections cotées, et le quatrième aux Perspectives axonométrique et cavalière. Elle forme un Traité élémentaire qui suffit à la solution d'un grand nombre de problèmes. On y trouve toutes les théories dont la connaissance est exigée pour l'admission à l'École Polytechnique.

La Géométrie descriptive, telle qu'elle a été constituée par Monge, est un résumé des principaux tracés des arts graphiques et une Méthode de Géométrie basée sur la transformation des figures par la projection. Le plus souvent l'illustre géomètre s'appuie sur des théorèmes pour établir des constructions, mais quelquefois il développe des constructions pour démontrer des théorèmes.

Je considère la Géométrie descriptive seulement sous le premier point de vue, c'est-à-dire comme la science abstraite du trait. Quand je présente des considérations de Géométrie générale, c'est uniquement pour arriver à des tracés pratiques, ou pour lever les difficultés que les constructions peuvent présenter dans quelques circonstances.

M. Olivier a proposé, pour résoudre les problèmes de la Géométrie descriptive, une méthode qui a reçu l'assentiment de plusieurs professeurs, et qui est suivie dans quelques établissements. J'ai conservé dans mon enseignement les procédés ordinaires. Comme la question est importante, je crois devoir faire connaître les motifs qui m'ont décidé.

La méthode de M. Olivier consiste à abandonner, dans chaque problème, les plans de projection qui, d'après la nature des données, ont été choisis pour la représentation du système géométrique que l'on considère, et à en prendre d'autres sur lesquels les grandeurs des inconnues se manifestent immédiatement. Ce changement de plans coordonnés est obtenu, soit par des rabattements successifs de plans de projection auxiliaires devant le système fixe, soit par des rotations du système devant les premiers plans.

La méthode présente ainsi une marche certaine et régulière, quand on étudie un ensemble géométrique déjà représenté sur des plans de projection, mais non pas lorsque le problème consiste à composer un système de surfaces et de lignes qui satisfasse à des conditions données. Il convient encore d'observer que certaines inconnues, telles que la transformée par développement d'une courbe tracée sur un cylindre, ne peuvent être trouvées par un changement de plans.

Dans les procédés ordinaires de la Stéréotomie, on conserve invariablement la projection horizontale des objets, mais on en fait quelquefois plusieurs élévations, et même des projections obliques. La méthode proposée par M. Olivier ne conduit donc à des tracés nouveaux que lorsqu'elle exige le changement des deux plans de projection, et dans ce cas elle convient peu aux applications, notamment à la Stéréotomie : « Lorsque l'on considère un système abstrait de lignes et de surfaces, on peut sans inconvénient le supposer transporté d'une manière quelconque; mais, quand il s'agit d'un ouvrage d'architecture, tel qu'une voûte ou un escalier, il convient de le considérer dans sa position natu-

relle et de l'étudier sur son plan et ses élévations. Si on le fait tourner dans l'espace, si on le projette sur des plans dont aucun ne soit horizontal, l'esprit a quelque peine à se le figurer, et les tracés, quoique aussi simples sous le rapport géométrique, deviennent moins faciles à saisir (1). »

Je suis convaincu que quiconque aura essayé de résoudre des problèmes de Stéréotomie en changeant les plans de projection reconnaîtra la justesse de ces considérations. Du reste, c'est aux défenseurs de la méthode de montrer qu'elle se prête facilement aux applications; ils doivent préparer pour les différents arts graphiques des Traités qui puissent remplacer ceux qui sont généralement adoptés. Jusqu'à ce que ce travail soit fait, je crois que tout professeur sérieusement préoccupé de la pratique restera attaché aux anciens procédés.

J'ai parlé de la méthode du changement des plans de projection comme si elle était nouvelle, mais en réalité elle date du XVIIe siècle. Je n'accuse pas M. Olivier de plagiat; je suis parfaitement convaincu qu'il ignorait cette circonstance, et je reconnais qu'il a donné à la méthode des développements considérables; mais Abraham Bosse a publié, en 1643, un Ouvrage où, d'après Desargues, il donne des tracés pour l'appareil des voûtes simples en changeant les plans de projection (2).

Ce Livre, qui d'ailleurs est assez obscur, n'a pas été bien accueilli par les praticiens, qui ont repoussé la *manière* de Desargues. Plus tard Frézier a exposé la méthode avec clarté dans son *Traité de Stéréotomie,* mais elle n'a pas été mieux accueillie (3). Enfin Monge n'en a donné

(1) Ce passage est extrait textuellement de mon *Discours sur l'Art du Trait*. Remplaçant M. Olivier au Conservatoire des Arts et Métiers, je devais dire pour quels motifs je n'adoptais pas sa méthode.

(2) *Pratique du Trait à preuves de M. Desargues.*

(3) La phrase suivante de Frézier fait connaître comment cet auteur apprécie la méthode de Desargues : « C'est proprement dans ces sortes de traits et les suivants que la méthode de Desargues est intrinsèquement différente de l'ordinaire des auteurs de la coupe des pierres; mais, bien loin de la trouver ridicule comme eux, je lui donnerais la préférence sur toute autre, si elle présentait un peu plus distinctement à l'idée les avances et les reculements des surfaces des panneaux, dont les figures sont un peu difficiles à trouver et à reconnaître dans leur place; c'est la seule raison qui m'a empêché de la suivre. »

aucun exemple dans la collection des épures de l'École Polytechnique. Le changement systématique des plans coordonnés pour la solution des problèmes était donc jugé et condamné, quand il a été proposé par M. Olivier. Si cependant cette méthode a été bien accueillie par quelques professeurs, qui peut-être ne connaissent pas l'ancien trait, c'est qu'elle s'est adressée à des géomètres, et non à des constructeurs, qu'elle s'est occupée de problèmes abstraits, et non d'applications.

Quand on étudie les tracés ordinaires de la Stéréotomie, on reconnaît qu'ils reviennent quelquefois à un changement des plans coordonnés, mais par des opérations partielles, et de manière qu'il soit toujours facile de suivre les grandeurs dans l'espace, en sorte que, suivant l'ordre logique du développement de l'art, les procédés usuels doivent être regardés, dans plusieurs circonstances, comme un perfectionnement de la méthode trop mécanisée de Desargues.

Je consacre un paragraphe au changement des Plans de projection, parce que ce procédé peut être utile dans quelques cas exceptionnels.

Il y a plus de soixante-dix ans que Monge a constitué la Géométrie descriptive; il est naturel de se demander si, depuis cette époque, la connaissance des arts graphiques s'est beaucoup répandue. On le croit généralement, d'abord parce qu'on suppose que cela doit être, et ensuite parce qu'il existe un grand nombre de dessinateurs fort habiles à représenter par des figures géométrales les machines et les édifices les plus compliqués. Mais la question que j'ai posée ne concerne que le *Trait,* c'est-à-dire les tracés qui, tels que ceux de la Perspective et de la Stéréotomie, ont besoin d'être justifiés par quelques raisonnements géométriques, et qui d'ailleurs sont liés à un ensemble de connaissances pratiques.

Il serait difficile d'avoir une réponse certaine : je me contenterai d'énoncer mon opinion, non pas sans doute avec la pensée de trancher la question, mais pour appeler l'attention sur un point important. Je

crois qu'il y a une certaine décadence *relative;* ainsi, en examinant un grand nombre d'édifices dans différentes parties de la France, je suis arrivé à conclure que le nombre des bons appareilleurs est maintenant moins grand, eu égard à la quantité considérable de travaux de maçonnerie que l'on exécute, que dans le XVIIe et le XVIIIe siècle.

Des observations analogues peuvent être faites sur plusieurs autres arts graphiques. L'œuvre de Monge devait amener des résultats très différents et étendre beaucoup la connaissance du trait, mais ces conséquences n'ont pas été telles qu'on devait l'espérer. Cela tient à plusieurs causes : quelques-uns des savants qui ont écrit sur la Géométrie descriptive se sont moins occupés des questions utiles dans les applications que de celles qui se rattachent à des théories intéressantes; ensuite les arts graphiques sont tombés dans un grand discrédit. La Stéréotomie, la Perspective, la Gnomonique étaient considérées autrefois comme des arts sérieux et qui doivent être étudiés avec soin. Depuis que Monge a montré que leurs tracés peuvent être ramenés à un petit nombre d'opérations élémentaires (et tous les arts peuvent être soumis à une semblable analyse), on en a conclu que leurs difficultés étaient nulles, et que quelques études de Géométrie descriptive suffisaient pour familiariser avec leurs méthodes (1).

Rien ne montre mieux à quel point le trait est peu connu maintenant que la manière dont l'Ouvrage de M. Olivier a été accueilli. Je crois que, s'il avait paru dans le siècle dernier, on aurait signalé immédiatement la réapparition de la manière de Desargues et que l'on aurait rappelé son peu de succès et son abandon définitif.

Je présente ces considérations, bien moins comme une critique

---

(1) Après avoir exposé sur la Perspective quelques considérations *des plus élémentaires,* Brisson ajoute : « Ces diverses observations suffisent pour mettre les personnes qui sont au courant des méthodes de la Géométrie descriptive en état d'abréger dans un grand nombre de cas et de simplifier beaucoup les opérations qu'exige la pratique de la perspective linéaire. »

Je choisis ce passage entre bien d'autres, parce qu'il est dans les Leçons annexées à la *Géométrie descriptive* de Monge.

générale, que pour montrer dans quel esprit j'ai écrit cet Ouvrage. Je dois ajouter que la nécessité de me conformer aux Programmes adoptés et aux habitudes de l'enseignement m'a quelquefois un peu éloigné de la marche que j'aurais désiré suivre. Cette observation concerne à peu près exclusivement les deux premiers Livres.

Après le Traité de Monge, les Ouvrages que j'ai le plus consultés sont ceux de MM. Hachette, Leroy, Vallée, Babinet et Lefébure de Fourcy. Je dois aussi mentionner le Mémoire de M. Noizet sur les Projections cotées (*Mémorial du Génie,* VIe vol., 1823), et celui de M. William Farish sur la Perspective isométrique (*Transactions de la Société Philosophique de Cambridge,* Ier vol., 1820).

J'ai présenté avec quelque soin la résolution de l'angle trièdre, parce que cette question a de l'importance en Stéréotomie.

Il suffit de connaître la Géométrie élémentaire pour pouvoir comprendre ce Traité. Je m'appuie, il est vrai, sur quelques théorèmes relatifs aux courbes et aux surfaces du second degré, mais ils sont en petit nombre, et je les ai indiqués de manière qu'ils puissent être acceptés, comme *postulata,* par les lecteurs qui ne les connaissent pas.

Les théories de M. Poncelet sur les sécantes idéales et les figures homologiques, et celles de M. Chasles sur les fonctions anharmoniques éclairent plusieurs questions de Géométrie descriptive et peuvent fournir des solutions graphiques; mais je n'aurais pu m'appuyer sur elles sans en avoir exposé d'abord les principaux théorèmes, ce qui m'eût entraîné assez loin. J'ai seulement indiqué dans des notes quelques passages du *Traité des Propriétés projectives* de M. Poncelet, qui se rattachent directement au sujet.

J. DE LA GOURNERIE.

NOTE RELATIVE A LA TROISIÈME ÉDITION (1891).

Nous n'avons apporté aucun changement notable au texte de la seconde édition. Seulement les solutions de deux problèmes et plusieurs perspectives cavalières que l'Auteur avait, quelques années après la publication de cette seconde édition, placées dans un *Supplément* à la première Partie, ont été mises à la place qui leur convient dans le corps de cette Partie.

Enfin, pour combler une lacune qui nous avait été plusieurs fois signalée, nous avons exposé, à la fin du premier Livre, la *théorie de l'intersection de deux polyèdres*.

E. L.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

DES LIGNES DROITES ET DES PLANS.

CHAPITRE PREMIER.

BUT DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, MÉTHODE DES PROJECTIONS.

CHAPITRE II.

QUESTIONS DIVERSES.

CHAPITRE III.

POINTS ET LIGNES DE CONSTRUCTIONS HORS DU CADRE DE L'ÉPURE.

CHAPITRE IV.

PROBLÈMES RELATIFS AUX ANGLES TRIÈDRES.

LIVRE II.

CYLINDRES, CONES ET SURFACES DE RÉVOLUTION.

CHAPITRE PREMIER.

COURBES PLANES ET SURFACES COURBES.

CHAPITRE II.

DÉFINITION ET REPRÉSENTATION DES CYLINDRES ET DES CONES.

CHAPITRE III.

PLANS TANGENTS AU CYLINDRE ET AU CONE.

CHAPITRE IV.

SECTIONS PLANES DU CYLINDRE ET DU CONE.

CHAPITRE V.

SURFACES DE RÉVOLUTION.

CHAPITRE VI.

INTERSECTIONS DE SURFACES COURBES.

LIVRE III.

PROJECTIONS COTÉES.

CHAPITRE PREMIER.

QUESTIONS RELATIVES A LA LIGNE DROITE ET AU PLAN.

CHAPITRE II.

CONES ET CYLINDRES.

LIVRE IV.

PERSPECTIVES AXONOMÉTRIQUE ET CAVALIÈRE.

CHAPITRE PREMIER.

PERSPECTIVE AXONOMÉTRIQUE.

CHAPITRE II.

PERSPECTIVE CAVALIÈRE.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

LIVRE PREMIER.

DES LIGNES DROITES ET DES PLANS.

CHAPITRE PREMIER.

BUT DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. — MÉTHODE DES PROJECTIONS.

Solutions graphiques.

1. En Mathématiques, les problèmes d'application peuvent être résolus par des constructions graphiques ou par des calculs numériques. Il est généralement facile de reconnaître, d'après la nature de la question, quel est celui des deux modes de solution qui doit être préféré; ce n'est que dans des cas assez rares que l'on peut employer indifféremment l'un ou l'autre.

Dans les problèmes de Géométrie plane, les lignes et les points pouvant être tous placés sur une feuille de dessin, des constructions graphiques sont aisément applicables, et les difficultés que l'on rencontre sont spéciales aux questions que l'on examine; mais, quand on considère des corps, ou bien des lignes qui ne sont pas toutes dans un même plan, il faudrait faire des tracés dans l'espace. Cela n'est pas absolument impossible, et l'on trouve dans quelques arts des exemples de cette manière d'opérer; mais ce sont des exceptions, et l'on peut dire qu'en général, pour qu'une question puisse être résolue graphiquement, il est nécessaire qu'on puisse la ramener à un problème de Géométrie plane. Il faut donc une méthode qui permette de représenter sur un plan, sans indétermination, des figures situées dans l'espace, et de résoudre par des tracés sur le plan les problèmes que l'on peut se proposer sur ces figures.

Aperçu de la méthode.

2. Si l'on veut représenter une maison, on en dessinera la façade (*fig.* 1). Les lignes des croisées sont sur un même plan vertical et peuvent être tracées sans difficulté. Quant aux points qui ne sont pas sur ce plan, on les y ramène par des perpendiculaires : les extrémités du faîte sont ainsi représentées aux pieds a' et b' des perpendiculaires abaissées de ces points sur le plan de la façade.

La *fig.* 1 donne une idée de la maison, elle en fait connaître les dimensions en longueur et en hauteur, mais elle n'indique ni la saillie du perron, ni la profondeur de l'édifice.

3. On peut, d'après les mêmes principes, représenter la maison sur le sol considéré comme un plan horizontal. On obtient ainsi la *fig.* 2, où les divers points élevés au-dessus de terre sont indiqués par leurs *projections*, c'est-à-dire par les pieds des perpendiculaires abaissées des points sur le sol.

La *fig.* 2 donne les dimensions en longueur et en largeur, mais elle ne fait pas connaître les hauteurs des différents points. Elle ne définit pas la maison plus complètement que la *fig.* 1, mais elle fournit les dimensions perpendiculaires au plan de la façade que l'on ne trouvait pas sur celle-ci. Elle lève donc toutes les incertitudes qui restaient sur la forme extérieure de l'édifice.

4. La *fig.* 1 est appelée *élévation* et la *fig.* 2, *plan*. Le plan et l'élévation sont deux figures distinctes et qui naturellement devraient être sur des feuilles différentes, l'une horizontale et l'autre verticale; mais on les place généralement sur une même feuille en regard l'une de l'autre et de manière que leurs diverses parties se correspondent. On peut supposer que la feuille verticale de l'élévation a été rabattue sur la feuille horizontale du plan, par un mouvement de rotation autour de la droite XY qui était leur commune intersection.

L'élévation ainsi placée couvre les allées du jardin et les autres parties du plan situées au delà de la ligne XY; on les trace en trait plus léger ou en lignes ponctuées. On représente également par des lignes légères ou ponctuées les fondations et toutes les parties de l'élévation qui sont recouvertes par le sol et le plan de la maison.

On dispose généralement les dessins de manière que les parties importantes du plan et de l'élévation ne soient pas recouvertes.

Nous parlerons plus loin des *fig.* 3 et 4.

Représentation des points, des droites et des plans sur deux plans coordonnés.

5. Nous allons maintenant présenter les projections d'une manière abstraite. La perpendiculaire Aa abaissée d'un point A (*fig.* 5) sur un plan fixe P est la

projetante de ce point : son pied a est la *projection* du point A. Tous les points de la projetante ont la même projection a sur le plan P.

Le point A peut être projeté sur un autre plan Q par une droite Aa_1 perpendiculaire à ce plan. Le plan des deux projetantes Aa et Aa_1 est perpendiculaire aux deux plans de projection, et par suite à leur intersection XY, que l'on appelle *ligne de terre*. Cette droite est donc perpendiculaire aux lignes a_0a, a_0a_1, suivant lesquelles le plan dont nous parlons coupe les plans de projection. Ainsi, *les perpendiculaires abaissées des deux projections d'un point sur la ligne de terre se rencontrent en un même point de cette droite*.

Si l'on connaît les deux projections a et a_1, les projetantes seront déterminées, et leur intersection A le sera également. Il n'y aurait d'exception que si les deux plans P et Q étaient parallèles, parce qu'alors les projetantes formeraient une même droite.

Deux points a et a_1 pris sur les plans P et Q seront les projections d'un même point de l'espace, toutes les fois que les perpendiculaires aa_0 et a_1a_0, abaissées de ces points sur la ligne de terre, la rencontreront en un même point a_0, parce que les projetantes, étant dans le plan déterminé par des lignes aa_0 et a_1a_0, se rencontreront nécessairement.

On appelle *plans coordonnés* les deux plans P et Q que l'on choisit pour y rapporter par des projections les différents points de l'espace. On les prend généralement rectangulaires, l'un horizontal et l'autre vertical.

Les plans coordonnés étant à angle droit, tout point de chacun d'eux se projette sur l'autre en un point de la ligne de terre.

6. L'ensemble des projections des points d'une ligne sur un plan forme la projection de la ligne sur ce plan. Pour une droite AB (*fig.* 6), les projetantes des différents points sont dans un plan $AabB$ qui est perpendiculaire au plan de projection considéré P. La projection ab de AB est l'intersection de ces deux plans, et par suite *la projection d'une ligne droite sur un plan est une ligne droite*.

Le plan $AabB$ est appelé plan projetant.

A chaque projection ab ou a_1b_1 correspond un plan projetant. Une droite, dont on connaît les projections sur deux plans coordonnés, est ainsi déterminée par l'intersection de deux plans projetants.

Deux droites indéfinies, prises arbitrairement sur les plans coordonnés, peuvent être considérées comme les projections d'une même droite ; il faut excepter le cas où elles rencontrent la ligne de terre à angle droit et en des points différents, parce que les plans projetants qu'elles déterminent sont alors parallèles comme perpendiculaires à la ligne de terre.

7. Nous désignerons un point ou une droite de l'espace par ses deux projections, en indiquant la projection horizontale la première. Nous dirons ainsi le point (a, a_1) et la droite (ab, a_1b_1) (*fig.* 6).

Un point situé sur le plan horizontal, tel que le point a (*fig.* 5), se confond avec sa projection horizontale; sa projection verticale se trouve sur la ligne de terre en a_0 : c'est donc le point (a, a_0). Nous emploierons cette notation quand nous voudrons rappeler que la projection verticale du point est sur la ligne de terre; mais, en général, nous dirons simplement le point a.

La même observation s'étend aux points qui sont sur le plan vertical, et aux droites situées sur l'un ou l'autre des plans de projection.

8. On détermine la position d'un plan par ses *traces* sur les deux plans coordonnés : ce sont les droites NE et FK (*fig.* 7) suivant lesquelles il coupe ces plans. Chacune de ces lignes passe par le point M où le plan rencontre la droite XY. Ainsi, *les deux traces d'un plan se coupent en un point de la ligne de terre.*

Un plan parallèle à l'un des deux plans coordonnés n'a pas de trace sur ce plan; sa trace sur l'autre est parallèle à la ligne de terre.

Les traces d'un plan parallèle à la ligne de terre sont parallèles à cette droite.

Quand un plan est vertical, sa trace sur le plan vertical de projection est verticale, et par suite perpendiculaire à la ligne de terre. La trace horizontale d'un plan perpendiculaire au plan vertical est également perpendiculaire à la ligne de terre.

Deux droites situées sur les deux plans coordonnés et qui se coupent en un point de la ligne de terre, ou qui sont parallèles à cette droite, peuvent toujours être considérées comme les traces d'un plan.

Nous désignerons un plan par ses deux traces, en indiquant la trace horizontale la première : nous dirons ainsi le plan (NE, FK).

Rabattement du plan vertical. — Règles de ponctuation.

9. Pour employer sur une seule feuille de dessin le mode de représentation que nous venons d'exposer, il suffit de supposer que le plan vertical, entraînant avec lui les projections, les traces et les lignes de construction que l'on peut y concevoir, soit rabattu sur le plan horizontal par un mouvement de rotation autour de la ligne de terre. Quand on raisonne sur les figures de l'espace et leurs relations avec les plans coordonnés, on doit toujours considérer ceux-ci dans leur position naturelle; ce n'est que pour l'exécution des tracés qu'il faut supposer le plan vertical rabattu.

10. Nous avons reconnu (art. 5) que les perpendiculaires abaissées des deux projections a et a_1 d'un point A (*fig.* 5) sur la ligne de terre se rencontrent en un point a_0 de cette ligne. Lorsque le plan vertical tourne pour se rabattre sur le plan horizontal, la projection a_1 décrit un quart de cercle autour du point a_0 comme centre, et la ligne a_0a_1 se place en a_0a' sur le prolongement de aa_0. Par

conséquent, après le rabattement du plan vertical, *les deux projections d'un point sont sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

11. Les projections horizontales et les projections verticales peuvent indifféremment se trouver au-dessus ou au-dessous de la ligne de terre XY (*fig.* 10). Pour les distinguer, nous accentuerons généralement les lettres qui indiquent les projections verticales : ainsi, les points a et a' seront les projections horizontale et verticale d'un même point (a, a') de l'espace.

En examinant les projections sur la *fig.* 5, on reconnaît qu'un point est en avant du plan vertical, comme A, ou en arrière, comme B, suivant que sa projection horizontale est au-dessous ou au-dessus de la ligne de terre. Un point est plus élevé ou moins élevé que le plan horizontal, suivant que sa projection verticale est au-dessus ou au-dessous de cette ligne.

D'après cela, les points (a, a') et (c, c') (*fig.* 10) sont en avant du plan vertical, et les points (b, b') et (d, d') en arrière; les points (a, a') et (d, d') sont au-dessus du plan horizontal, et les points (b, b') et (c, c') au-dessous.

12. Après le rabattement du plan vertical, la partie postérieure du plan horizontal et la partie inférieure du plan vertical se trouvent recouvertes. On trace toujours en ponctué, tel que cb (*fig.* 8), les projections qui sont recouvertes.

On ponctue aussi les projections des lignes qui sont cachées, soit par les plans de projection considérés comme opaques, soit par divers corps. Pour interpréter cette règle, il faut supposer que les objets représentés sont regardés par un spectateur placé à l'infini, de manière que les projetantes puissent être considérées comme des rayons visuels. Ainsi, pour une projection horizontale, on supposera le spectateur élevé à une hauteur infinie, et toutes les lignes du corps considéré qui ne lui seront pas cachées seront tracées en trait plein. Pour une projection verticale, le spectateur sera à une distance infinie en avant de ce plan.

Les lignes de construction sont pointillées, c'est-à-dire telles que aa' (*fig.* 8). Lorsqu'elles ont beaucoup d'importance, on emploie un trait mixte aG (*fig.* 12), formé de points et d'éléments de lignes.

13. Pour ponctuer convenablement les projections d'une droite, il faut connaître les points où elle perce les plans de projection. Ces points sont appelés *traces*.

La trace verticale d'une droite $(ab, a'b')$ (*fig.* 8), étant l'intersection de la droite et du plan vertical, se projette horizontalement au point c, où la ligne de terre coupe la projection horizontale ab. Ce point doit d'ailleurs se trouver sur la projection verticale de la droite; c'est le point c'. Par des raisonnements analogues, on reconnaît que la trace horizontale doit se projeter en e', et se trouver au point e, intersection de la projection horizontale ab avec la droite $e'e$ perpendiculaire à la ligne de terre.

Les parties *ae* et *cb* de la projection horizontale doivent être ponctuées : la première, parce qu'elle représente une ligne située au-dessous du plan horizontal et cachée par lui ; la seconde, parce qu'elle est recouverte par le plan vertical après son rabattement. Pour des motifs semblables, les parties $b'c'$ et $a'e'$ de la projection verticale ont été ponctuées.

La *fig.* 9 montre la position de la ligne par rapport aux deux plans de projection. Ceux-ci sont représentés par les droites H′H et V′V, et la ligne de terre par le point X. Les parties XH′ et XV′ des plans de projection sont recouvertes après le rabattement; elles ont été indiquées par un trait discontinu. Les relations qui existent entre les *fig.* 8 et 9 sont analogues à celles que les *fig.* 1 et 2 ont avec la *fig.* 4 : nous examinerons plus loin cette question.

Sur la *fig.* 8 *bis* les projections de la droite ont une disposition différente, mais les raisonnements et les constructions pour obtenir la trace horizontale *e* et la trace verticale c' sont exactement les mêmes. On détermine par des considérations analogues les parties des projections qui doivent être ponctuées. La *fig.* 9 *bis* montre la position de la ligne par rapport aux plans de projection.

CHAPITRE II.

QUESTIONS DIVERSES.

Problèmes élémentaires sur les lignes droites.

14. *Trouver la grandeur d'une droite dont on connaît les projections.*

Une droite limitée est de même grandeur que sa projection quand elle lui est parallèle, ce qui arrive lorsqu'elle est parallèle au plan de projection. Dans toute autre position sa grandeur n'est pas immédiatement donnée; on la détermine en rabattant un des deux plans projetants sur le plan de projection correspondant.

Ainsi, pour avoir la grandeur de la droite AB (*fig.* 11), on rabat le trapèze rectangle AabB en le faisant tourner autour de la projection *ab*. Les longueurs des côtés aA et bB sont données par les lignes a_0a' et b_0b' situées sur l'autre plan de projection.

On voit sur la *fig.* 12 la construction indiquée sur la *fig.* 11. La droite est rabattue sur le plan horizontal en A_1B_1, et sur le plan vertical en $A'_1B'_1$. Pour ce dernier rabattement, on prend des longueurs $a'A'_1$ et $b'B'_1$, égales à a_0a et b_0b.

Souvent, au lieu d'un trapèze, on trace un triangle abG, dont le côté bG est égal à $b'g$, différence de hauteur des points a' et b'. La longueur cherchée est l'hypo-

ténuse aG : nous voyons qu'elle est plus grande que la projection ab; elle lui serait égale si la droite était parallèle au plan de projection.

15. Les mêmes constructions sont représentées sur la *fig.* 12 *bis* pour le cas où les deux extrémités (a, a') et (b, b') de la droite sont, l'une au-dessus du plan horizontal et l'autre au-dessous. Lorsqu'on rabat le plan projetant, il faut porter les longueurs $a_0 a'$ et $b_0 b'$ de côtés différents de la projection ab. Le rabattement A_1B_1 doit passer par la trace e de la droite, ce qui fournit une vérification.

Si l'on veut déterminer la grandeur de la droite par un triangle rectangle, on fait le second côté bG égal à la différence $a'g$ de hauteur des points a' et b'.

16. On peut encore déterminer la grandeur d'une droite en la rendant parallèle à l'un des plans coordonnés, et en cherchant ce que devient alors sa projection sur ce plan.

Faisons tourner le plan projetant vertical de la droite AB (*fig.* 14 a) autour de la verticale Aa, jusqu'à ce qu'il soit parallèle au plan vertical de projection. Dans ce mouvement le point b décrit un arc de cercle dont le centre est a, et vient se placer en b_1 sur la droite ab_1 parallèle à la ligne de terre XY. Le point B restant toujours à la même hauteur, sa projection verticale b' se meut sur une parallèle à la ligne de terre; elle s'arrête au point b'_1 correspondant à b_1. La droite $a'b'_1$ est donc la projection de la ligne devenue parallèle au plan vertical, et par suite elle est sa vraie grandeur.

Un exemple de cette construction est donné sur la *fig.* 14. Les extrémités (a, a') et (b, b') de la droite y ont été placées de côtés différents du plan horizontal. Les points e et e', traces horizontales de la ligne avant et après la rotation du plan projetant, sont sur un même arc de cercle décrit du point a comme centre.

17. Si l'on voulait déterminer sur une ligne indéfinie $(ae, a'e')$ (*fig.* 12 *bis*) un point (b, b') qui fût à une distance donnée du point (a, a'), on pourrait ramener la droite sur le plan horizontal en rabattant son plan projetant : elle se placerait en A_1e. On porterait alors la longueur donnée de A_1 en B_1, et il n'y aurait plus qu'à chercher les projections du point B_1 quand le plan projetant serait relevé. La projection horizontale est au pied b de la perpendiculaire B_1b, et la projection verticale au point correspondant b' de la droite $a'e'$.

On pourrait résoudre le problème par la construction indiquée sur la *fig.* 14.

18. *Les plans projetants de deux droites parallèles* AB, CD (*fig.* 13) *sont parallèles, et les projections* ab, cd *de ces lignes le sont également.*

Pour mener par un point une parallèle à une droite, il suffit de tracer par les projections du point des parallèles aux projections de la ligne droite.

Lorsque deux projections ab et cd sont parallèles, les plans projetants le sont aussi, mais les droites, pouvant avoir des positions quelconques dans ces plans, ne sont pas nécessairement parallèles. Cependant, *si les projections de deux*

droites de l'espace sur deux plans coordonnés sont parallèles, les droites de l'espace sont parallèles, comme intersections de plans parallèles.

Plans déterminés par diverses conditions.

19. *Construire les traces du plan déterminé par deux droites données* (ab, $a'b'$) *et* (cd, $c'd'$) (*fig.* 15).

Pour que le problème puisse être résolu, il faut que les droites se coupent ou soient parallèles. La première condition aura lieu quand les points m et m', où les projections se rencontrent sur les deux plans coordonnés, seront sur une perpendiculaire à la ligne de terre, et représenteront par conséquent un point de l'espace.

La trace verticale P′ du plan passe par les traces verticales b' et c' des droites, et la trace horizontale P′ par les traces horizontales a et d. Les deux traces du plan des droites devront se rencontrer en un même point de la ligne de terre.

Si l'on avait négligé de s'assurer que les droites données se coupent, on le reconnaîtrait en voyant que les droites ad, $b'c'$ se croisent en un point de la ligne de terre, car alors elles déterminent un plan qui contient chacune des lignes données, parce qu'elle y a deux points a et b' ou d et c'.

La *fig.* 15 *bis* représente la solution du même problème avec une disposition différente des données.

Les constructions sont les mêmes quand les droites données sont parallèles entre elles, sans être parallèles à la ligne de terre.

20. Si l'on fait passer une droite par deux points pris arbitrairement sur les droites données, ses traces seront sur les traces de leur plan. On peut employer cette construction, soit pour obtenir des *vérifications*, soit pour déterminer les traces du plan, quand, par suite de la disposition de la figure, le tracé indiqué dans l'article précédent se trouve en défaut.

Sur la *fig.* 16, l'une des droites données (cd, $c'd'$) a ses traces *éloignées*, c'est-à-dire hors du cadre de l'épure. On prend sur cette droite un point (g, g'), et sur l'autre droite (ab, $a'b'$) un point (n, n'). Les traces de la sécante (ng, $n'g'$) appartiennent aux traces P et P′ du plan de ces deux droites.

Quand les deux droites données se coupent en un point de la ligne de terre, ce point appartient aux deux traces de leur plan. On obtient un second point sur chacune d'elles, en déterminant les traces d'une sécante comme dans le cas de la *fig.* 16.

Lorsque les droites sont l'une et l'autre parallèles à la ligne de terre (*fig.* 17), les traces de leur plan sont parallèles à cette ligne, et, pour pouvoir les tracer, il suffit de construire les points e et h', où une sécante (ng, $n'g'$) rencontre les plans de projection.

21. On applique sans difficulté la construction générale de l'article **19** au cas

où l'une des deux droites est parallèle à un plan de projection. Sur la *fig.* 18 la droite $(ma, m'a')$ est parallèle au plan vertical; le plan cherché devant la contenir, sa trace P' lui sera parallèle. Cette trace sera donc parallèle à la projection $a'm'$; elle passera d'ailleurs par la trace c' de la seconde droite $(mcd, m'c'd')$, et elle rencontrera en un point de la ligne de terre la trace horizontale ad du plan.

22. Pour obtenir les traces du plan déterminé par trois points, on construira les traces des droites qui passent par ces points; si ces lignes ne se présentent pas d'une manière commode pour l'exécution graphique, on prendra sur elles des points par lesquels on mènera de nouvelles droites qui, étant également dans le plan cherché, pourront servir à en déterminer les traces.

Si l'on donne un point et une droite, on obtiendra sur le plan autant de droites que l'on voudra, en joignant le point donné à divers points de la droite.

Pour mener par une droite donnée un plan parallèle à une autre droite donnée, il faut faire passer par un point de la première une ligne parallèle à la seconde; elle sera dans le plan cherché, qui sera ainsi déterminé par deux droites qui se coupent.

23. *Faire passer par un point donné un plan parallèle à un plan donné.*

On mène par le point une droite parallèle à une droite quelconque du plan : les traces du plan cherché passent par les traces de cette parallèle et sont parallèles aux traces du plan donné.

Sur la *fig.* 19 le point donné est (m, m') et le plan donné (P, P'). On prend arbitrairement un point a sur la trace horizontale du plan, et un point b' sur sa trace verticale. La droite passant par ces points a pour projections ab et $a'b'$. La parallèle menée à cette droite par le point (m, m') a des projections mcd et $m'c'd'$ respectivement parallèles à ab et $a'b'$. Ses traces sont d et c', et par suite les traces du plan sont les droites Q et Q' respectivement parallèles à P et P'; elles doivent se rencontrer en un point de la ligne de terre.

Le plan indéfini (P, P') s'étend devant le plan (Q, Q'); nous avons cependant établi en trait plein les traces de ce dernier, parce qu'un plan (autre que les plans de projection) n'est regardé comme opaque que quand il appartient à la surface d'un corps, et non lorsqu'il est considéré d'une manière abstraite. Si nous faisons quelque exception à cette règle pour rendre un résultat plus sensible, nous aurons soin d'en prévenir le lecteur.

24. On peut généralement simplifier la construction en considérant sur le plan donné, non pas une droite quelconque, mais l'une de ses traces.

Menons par la projection horizontale m du point donné (*fig.* 20) une droite ma parallèle à la trace horizontale du plan donné, et par la projection verticale m' une droite $m'a'$ parallèle à la ligne de terre, qui est la projection verticale de cette trace; le plan cherché devant contenir la droite $(ma, m'a')$, sa trace verticale passe par la trace a' de cette droite. Cette circonstance et les relations de

parallélisme déjà établies permettent d'obtenir les deux traces Q et Q′ du plan.

On peut résoudre également le problème en menant par le point (m, m') une parallèle à la trace P′.

Si le plan donné était parallèle à la ligne de terre, le tracé que nous venons d'exposer ne pourrait pas être employé : il faudrait recourir à la construction générale de l'article **23**.

25. *Déterminer l'intersection de deux plans donnés par leurs traces.*

Les plans donnés sont (P, P′) et (Q, Q′) (*fig.* 21 ou 21 *bis*).

Le point a où les traces horizontales se coupent et le point de rencontre b' des traces verticales appartiennent à l'intersection. Le premier de ces points se projette verticalement en a'; la projection horizontale du second est b. La droite cherchée est donc $(ab, a'b')$.

26. Si l'un des plans est parallèle au plan horizontal, il est simplement représenté par une trace verticale Q′ (*fig.* 22) parallèle à la ligne de terre. L'intersection est alors parallèle à la trace horizontale P de l'autre plan (P, P′); elle passe d'ailleurs au point de rencontre b' des traces verticales; ses projections sont donc les droites be et Q′ respectivement parallèles à P et à XY.

27. Lorsque, sans être parallèles, les traces horizontales P et Q ne se rencontrent pas sur la feuille de dessin (*fig.* 23), on coupe les deux plans par un plan horizontal auxiliaire xy suffisamment élevé. Les intersections (rg, xy) et (sg, xy) ainsi obtenues se croisent en un point (g, g') qui appartient à la droite cherchée.

Quand les traces ne se rencontrent sur aucun des deux plans coordonnés, il faut déterminer deux points de l'intersection par deux plans auxiliaires. Toutefois cette construction ne peut pas être employée lorsque les traces ne se coupent que très loin sur l'un et l'autre plan; il faut alors recourir à une méthode générale que nous expliquerons aux articles **65** et **67**.

Il est facile de voir que les plans sécants auxiliaires peuvent être parallèles au plan vertical, ou même disposés d'une manière quelconque dans l'espace; mais dans ce dernier cas les constructions seraient moins simples.

Si les plans donnés rencontraient la ligne de terre en un même point, on obtiendrait un second point de l'intersection en les coupant par un plan auxiliaire.

28. *Trouver le point d'intersection de trois plans donnés par leurs traces.*

On détermine les droites suivant lesquelles un des plans coupe les deux autres; ces droites se rencontrent au point cherché.

Le problème est résolu sur la *fig.* 24. Les trois plans sont (P, P′), (Q, Q′) et (R, R′). Nous avons déterminé les trois droites d'intersection suivant lesquelles ils se coupent deux à deux : ce sont les droites $(ic, i'c')$, $(nb, n'b')$ et $(ma, m'a')$; elles se rencontrent au point cherché (s, s').

Le même problème est résolu sur la *fig.* 24 *bis*; nous en avons établi la ponctuation dans l'hypothèse que les plans donnés sont les faces d'un tétraèdre dont la base *abc* est posée sur le plan horizontal.

Les droites P et P' d'une part, R et R' de l'autre, doivent se couper en un même point de la ligne de terre. Si cela n'avait pas lieu, ces couples de droites ne représenteraient pas des plans, et les diverses vérifications que fournit la construction ne seraient pas satisfaites.

29. *Connaissant l'une des projections d'une droite située dans un plan donné, trouver l'autre projection.*

La projection connue détermine un plan projetant dont on cherche l'intersection avec le plan donné.

La construction est représentée sur la *fig.* 25. On trouve que *a'b'* est la projection verticale de la droite qui est contenue dans le plan (P, P'), et qui se projette horizontalement sur *ab*.

30. *Trouver le point où une droite donnée perce un plan donné.*

Il faut faire passer un plan par la droite, chercher son intersection avec le plan donné, et prendre le point où cette ligne rencontre la droite donnée.

Soient (D, D') la droite (*fig.* 26) et (P, P') le plan. On détermine les traces *a* et *b'* de (D, D'); en les joignant à un point quelconque *g* de la ligne de terre, on a un plan (*ag*, *gb'*) qui contient la droite. Son intersection avec le plan donné est une droite (*cd*, *c'd'*) qui rencontre la droite donnée au point cherché (*m*, *m'*).

31. On peut simplifier le tracé en prenant pour plan auxiliaire l'un des deux plans projetants de la droite, par exemple celui qui est vertical; ses traces sont D et *aa'* (*fig.* 27); il coupe le plan (P, P') suivant la droite (D, *a'b'*). L'intersection de *a'b'* avec D' donne la projection verticale *m'* du point cherché; on en déduit la projection horizontale *m*.

Si l'on veut avoir une vérification, on emploiera comme plan auxiliaire celui qui projette la droite sur le plan vertical. La construction est faite sur la figure.

Nous avons ponctué les *fig.* 26 et 27, en supposant que le plan formait la face supérieure d'un polyèdre, et, par conséquent, que la droite devenait invisible au delà du point (*m*, *m'*).

Projections auxiliaires.

32. Quand l'une des projections d'une droite est perpendiculaire à la ligne de terre, le plan projetant correspondant est perpendiculaire à cette ligne, et, par suite, au deuxième plan de projection; ses deux traces, qui sur le dessin ne forment qu'une seule droite, sont alors les projections de la ligne.

La connaissance de l'une des projections de la droite suffit dans ce cas pour que l'on ait immédiatement l'autre; mais la droite elle-même peut avoir une position quelconque dans le plan perpendiculaire à la ligne de terre qui les

contient. On peut déterminer la droite en donnant les projections de deux de ses points, mais ce mode de représentation ne se prête pas immédiatement aux constructions de la Géométrie descriptive.

D'ailleurs, si plusieurs droites importantes se trouvaient dans un même plan perpendiculaire à la ligne de terre, cette manière de les définir présenterait un peu de confusion et ne ferait pas ressortir la forme des figures. Pour ces divers motifs, on emploie généralement un plan auxiliaire de projection; on le prend le plus souvent perpendiculaire aux deux autres, et on le rabat sur un des deux premiers plans de projection, en le faisant tourner autour de sa trace sur ce plan.

33. Les lignes de la petite façade de gauche de la maison dessinée sur la *Pl. I* sont toutes projetées sur les droites eg, $i'j'$; pour qu'elles soient déterminées et représentées d'une manière distincte, nous allons les projeter sur le plan dont les traces sont les droites X_1Y et YZ_1, perpendiculaires à XY. Nous supposons que l'on a rabattu ce plan sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace X_1Y, qui forme une nouvelle ligne de terre.

Pour avoir sur ce nouveau plan la projection a'' d'un point (a, a'), on remarque que les projections a et a'' doivent être sur une même perpendiculaire à la ligne de terre X_1Y, et que les hauteurs a_1a'' et a_0a' indiquent l'une et l'autre l'élévation du point de l'espace au-dessus du plan horizontal, et sont, par conséquent, égales.

La droite qui projette le point (a, a') sur le plan vertical en a' a pour projection sur le plan auxiliaire une horizontale qui perce le premier plan vertical en d. Dans le rabattement, cette droite tourne autour de la ligne de terre X_1Y en lui restant toujours parallèle; son point d décrit l'arc dd_1, et elle se place en d_1a''.

Tous les détails de la petite façade sont dessinés sur la *fig.* 3, qui est une nouvelle projection verticale.

34. La *fig.* 4 est une projection de la maison faite sur un plan auxiliaire parallèle à celui de la *fig.* 3, mais rabattu sur le plan vertical par une rotation autour de sa trace XZ. La projection b'' d'un point (b, b') est sur la droite $b'b_1$ perpendiculaire à la nouvelle ligne de terre XZ, et à une distance b_1b'' égale à b_0b. Si l'on projette le point b en f sur XY_1, et qu'on ramène f en f_0 par un arc de cercle de centre X, le point b'' sera sur la verticale de f_0.

La *fig.* 9 est, par rapport à la *fig.* 8, une projection auxiliaire faite sur un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et rabattue sur le plan vertical.

La *fig.* 9 *bis* est également une projection auxiliaire pour la *fig.* 8 *bis*.

35. Nous pouvons maintenant résoudre les problèmes qui se rapportent aux figures situées dans des plans perpendiculaires à la ligne de terre.

Déterminer les traces d'une droite qui passe par deux points donnés dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Les points sont (m, m') et (n, n') (*fig.* 28). Nous rabattons sur le plan horizontal le plan (xn, xm') qui les contient. Le point (m, m') décrit alors un arc de cercle qui a son centre au point m et vient se placer en un point M, sur une perpendiculaire mM à xn, et à une distance de cette ligne égale à la hauteur du point, qui est donnée en vraie grandeur sur le plan vertical par la droite xm'. On trouve de la même manière la position N du point (n, n') rabattu. On trace la ligne MN rabattement de la droite considérée : sa trace horizontale est e; sa trace verticale est le point c, dont on obtient la véritable position c' en relevant le plan qui contient la droite.

36. On emploie un plan auxiliaire de projection, non seulement pour représenter les figures situées dans des plans perpendiculaires à la ligne de terre, mais encore quand les constructions ordinaires ne sont pas applicables, par suite d'une disposition particulière des données par rapport aux plans de projection.

Construire l'intersection de deux plans parallèles à la ligne de terre.

Les plans que nous considérons sont (P, P') et (Q, Q') (*fig.* 29). Leurs traces ne se rencontrant pas, nous n'avons immédiatement aucun point de l'intersection cherchée; nous voyons seulement qu'elle est parallèle aux traces des plans, et par suite à la ligne de terre.

Nous prenons un plan auxiliaire perpendiculaire aux deux plans de projection; ses traces sont des droites perpendiculaires à la ligne de terre, menées par un même point x de cette ligne; en le rabattant sur le plan horizontal, nous amenons les points m et n en m_1 et n_1, et les nouvelles traces des plans donnés sont les droites rm_1, sn_1 qui se coupent en E.

On trouve facilement les points e et e', où se projette le point E quand on relève le plan, et l'on peut tracer les droites G et G', projections de l'intersection.

Nous aurions pu résoudre le problème sans faire de rabattement, en déterminant les intersections des plans donnés par un plan auxiliaire quelconque; ces intersections se coupent en un point de la droite cherchée.

37. Quand un plan contient la ligne de terre, ses deux traces se confondent avec elle, et ne suffisent plus à le déterminer. Il faut alors que l'on connaisse un de ses points, ou les angles qu'il forme avec les plans coordonnés; mais les constructions ordinaires ne peuvent pas être appliquées à un plan ainsi représenté, et il faut recourir à quelque artifice, tel que l'emploi d'un plan auxiliaire de projection.

Déterminer l'intersection d'un plan quelconque avec un plan passant par la ligne de terre et faisant un angle donné avec le plan horizontal.

Soit (P, P') le plan donné (*fig.* 30). Nous prenons un plan auxiliaire perpendiculaire à la ligne de terre, et nous le rabattons sur le plan vertical en le faisant tourner autour de sa trace xz. La nouvelle trace de (P, P') est a_1b; la trace du

second plan passe par le point x, et fait avec xY l'angle donné. Nous pouvons donc mener cette trace xi; elle nous fait connaître un point E de l'intersection; les projections e et e' doivent être jointes au point g commun aux deux plans. La droite cherchée est donc (ge, ge').

38. On pourrait opérer de la même manière quand la position du plan qui passe par la ligne de terre est déterminée par un de ses points (m, m') (*fig.* 31), mais alors il est aussi simple de couper les deux plans par le plan horizontal qui contient le point donné. Les intersections (bc, xy) et (mi, xy) se rencontrent en un point (e, e') qui appartient à la droite cherchée.

39. *Déterminer le point d'intersection d'un plan quelconque* (P, P′) (*fig.* 32) *avec une droite située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et donnée par deux de ses points* (a, a') *et* (b, b').

Nous rabattons sur le plan vertical le plan projetant de la droite; elle prend alors la position AB, et rencontre en M la nouvelle trace rs_1 du plan donné. Quand on relève le plan auxiliaire, le point cherché vient se projeter en (m, m').

Nous verrons plus loin que l'on emploie quelquefois des plans auxiliaires de projection qui ne sont pas perpendiculaires à la ligne de terre.

Droites et plans perpendiculaires.

40. *Quand une droite est perpendiculaire à un plan, les projections de la droite sont respectivement perpendiculaires aux traces du plan.*

Soient P le plan de projection (*fig.* 33) et MN une droite perpendiculaire à un plan Q.

Le plan passant par MN et par la projetante Mm de l'un quelconque des points de cette droite est perpendiculaire à chacun des deux plans P et Q, et par suite à leur intersection AB. Réciproquement, AB est perpendiculaire à toutes les lignes du plan mMN, et notamment à sa trace mG, projection de MN.

Quand la projection mG d'une droite est perpendiculaire à la trace AB d'un plan Q, ce plan est perpendiculaire au plan projetant, mais non pas nécessairement à la droite. Si cependant les projections de la droite étaient respectivement perpendiculaires aux traces du plan sur deux plans coordonnés, les deux plans projetants étant perpendiculaires au plan considéré, la droite, qui est leur intersection, serait perpendiculaire à ce plan.

41. *Mener par un point donné un plan perpendiculaire à une droite donnée.*

Soient (a, a') le point et (D, D′) la droite (*fig.* 34). La trace horizontale du plan cherché est perpendiculaire à la projection D (art. **40**). La droite dont les projections sont les droites ab perpendiculaire à D et $a'b'$ parallèle à la ligne de terre est donc parallèle à la trace horizontale du plan, et comme elle passe par le point (a, a') qui doit être dans le plan, elle s'y trouve tout entière. La trace

verticale b' appartient donc à la trace verticale du plan. Les droites $b'g$ et ge, respectivement perpendiculaires à D' et à D, sont les traces du plan cherché.

Il est évident que l'on pourrait également faire la construction en menant par le point (a, a') une parallèle à la trace verticale du plan.

Sur la *fig.* 34 nous avons résolu le problème d'*abaisser d'un point* (a, a') *une perpendiculaire sur une droite* (D, D'). La détermination du plan qui passe par (a, a') et qui est perpendiculaire à (D, D') forme la première partie de la solution ; il faut ensuite chercher le point (m, m') où la droite indéfinie perce le plan (art. **30** et **31**), et le joindre au point donné.

La véritable grandeur de la droite $(am, a'm')$ est la distance du point (a, a') à la droite (D, D').

42. Si la droite donnée est dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, elle sera déterminée par deux points (a, a') et (b, b') (*fig.* 35), et elle prendra la position AB, lorsque son plan projetant sera rabattu sur le plan vertical.

Le point donné est (m, m'); sa projection sur le plan auxiliaire, après le rabattement de celui-ci, est N.

Nous avons maintenant deux plans coordonnés dont la ligne de terre est xz, et le problème à résoudre consiste à mener par un point (m', N) un plan perpendiculaire à une droite AB située dans le deuxième plan de projection.

On trouve que le plan cherché a pour traces sur nos deux plans coordonnés les droites G' et rS ; il est facile de voir que sa trace horizontale est G.

43. *Déterminer la distance d'un point donné à un plan donné.*

Il faut abaisser du point une perpendiculaire sur le plan, et trouver sa longueur.

Soient (P, P') le plan (*fig.* 36) et (a, a') le point; la perpendiculaire a pour projections les droites ab et $a'b'$ respectivement perpendiculaires aux traces P et P'; elle rencontre le plan au point (b, b') (art. **31**), et en faisant tourner autour de la verticale de ce point le plan qui la projette sur le plan horizontal, jusqu'à le rendre parallèle au plan vertical, on détermine la longueur $b'a'_1$ de la droite $(ab, a'b')$ (art. **16**).

44. *Par une droite donnée faire passer un plan perpendiculaire à un plan donné.*

Soient (P, P') le plan (*fig.* 37) et (D, D') la droite. D'un point (a, a') pris arbitrairement sur cette droite nous abaissons une perpendiculaire $(ab, a'b')$ sur le plan (art. **43**), et nous construisons les traces du plan $(bg, c'e')$ qui passe par cette perpendiculaire et par la droite donnée (D, D') (art. **19**).

45. *Par un point donné faire passer un plan perpendiculaire à deux plans donnés.*

Il suffit de déterminer l'intersection des deux plans donnés (art. **25**), et de mener par le point donné un plan perpendiculaire à cette droite (art. **41**). Sou-

vent, pour rendre les tracés commodes, on devra transporter les plans parallèlement à eux-mêmes.

On peut encore abaisser du point donné des perpendiculaires sur les plans (art. **40**) et construire les traces du plan déterminé par ces droites (art. **19**).

Angles de droites et de plans.

46. *Quand deux droites sont à angle droit, leurs projections sur un plan parallèle à l'une d'elles sont à angle droit.*

Considérons d'abord deux droites AC et BD (*fig.* 38) rectangulaires entre elles et parallèles au plan de projection P. Leurs projections *ac* et *bd* sont à angle droit, car si l'on joint deux points C et D, le triangle BCD et sa projection *dbc* auront leurs côtés égaux comme côtés opposés de parallélogrammes, et cette égalité entraîne celle des angles B et *b*.

En général, la projection n'altère pas la forme des figures situées dans des plans parallèles à celui sur lequel on les projette.

Supposons maintenant que la droite BD tourne autour du point B en restant perpendiculaire à AC; elle prendra différentes positions BD_1, BD_2,... dans le même plan projetant BD*bd* qui est perpendiculaire à AC, parce qu'il contient les droites BD et B*b* qui rencontrent AC à angle droit. Toutes les droites perpendiculaires à AC auront donc pour projection la droite *bd* perpendiculaire à *ac*.

47. *Déterminer l'angle de deux droites données par leurs projections.*

Soient (D, D′) et (G, G′) (*fig.* 39) deux droites qui se rencontrent en un point (*a*, *a*′). Pour avoir l'angle qu'elles forment, il suffit de rabattre leur plan sur l'un des deux plans de projection, par exemple, sur le plan horizontal.

Les traces des droites considérées sont les points *b* et *c*, et par suite la droite *bc* est la trace de leur plan. La perpendiculaire abaissée du point (*a*, *a*′) sur *bc* se projette sur la droite *ae* perpendiculaire à *bc* (art. **46**).

Quand le plan des deux droites a été rabattu sur le plan horizontal par une rotation autour de *bc*, la perpendiculaire qui était projetée sur *ea* se trouve placée dans la direction de cette droite, et en portant sa véritable grandeur de *e* en A, nous avons à ce dernier point la position du rabattement du point (*a*, *a*′). Comme d'ailleurs les points *b* et *c* sont fixes, l'angle *b*A*c* est l'angle cherché. Dans un problème d'application, il pourrait y avoir lieu de prendre son supplément.

Nous avons obtenu la véritable grandeur de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle sur la trace du plan, en portant la longueur *ae* de sa projection horizontale sur la ligne de terre de a_0 en e_0, et en traçant $a'e_0$ (art. **16**).

Nous aurions pu déterminer la position du point A, en cherchant les longueurs des droites *b*A et *c*A, mais la construction eût été un peu plus longue.

On considère quelquefois l'angle de deux droites qui ne se rencontrent pas ; c'est l'angle que forment deux parallèles à ces droites menées par un point quelconque.

48. Lorsque sur chaque plan de projection la trace de l'une des droites se trouve hors du cadre de la figure, il faut rabattre le plan des droites sur un plan parallèle à l'un des deux plans de projection, et choisi de manière que ses intersections avec les droites considérées puissent être utilisées.

Sur la *fig.* 40 ce plan auxiliaire est horizontal et a pour trace verticale $X_1 Y_1$. Les droites (D, D′) et (G, G′) le rencontrent aux points (b, b') et (c, c'). On fait tourner le plan de ces lignes autour de la droite $(bc, b'c')$ jusqu'à ce qu'il soit dans le plan horizontal $X_1 Y_1$: les tracés sont ensuite les mêmes que ceux de la *fig.* 39.

49. On peut expliquer la construction que nous venons d'exposer, en supposant que la ligne de terre ait été transportée en $X_1 Y_1$. Le plan horizontal s'est ainsi trouvé élevé de la hauteur de $b_0 b'$, et le plan vertical reculé de la même quantité. Ces translations ne modifient évidemment en rien ni les projections de la figure de l'espace, ni leur position relative.

Quand une épure contient seulement des projections, la position de la ligne de terre n'a d'utilité que pour la ponctuation ; il suffit de connaître sa direction, pour pouvoir résoudre les problèmes relatifs au système géométrique représenté. Ainsi la longueur de la droite $(ab, a'b')$ (*fig.* 14) est $a'b'_1$, à quelque hauteur que la ligne de terre soit placée sur la figure. D'après cela, quand, sur une épure du genre de celles dont nous parlons, il devient nécessaire de considérer des traces, ainsi que cela a lieu sur la *fig.* 40, on peut mettre la ligne de terre à la hauteur qui paraît la plus convenable pour les constructions.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces notions, mais nous avons cru devoir signaler dès à présent le déplacement de la ligne de terre comme un des procédés les plus simples de la Géométrie descriptive, pour maintenir les tracés dans le cadre de l'épure.

50. La *fig.* 41 présente la solution du problème de l'angle de deux droites, quand l'une d'elles est parallèle à l'un des plans de projection.

La droite (D, D′) étant parallèle au plan vertical, nous pouvons la prendre pour axe d'un mouvement de rotation par lequel nous ramènerons le plan des deux droites à être parallèle au plan vertical.

La perpendiculaire abaissée sur la droite (D, D′) d'un point (b, b') de la droite (G, G′) a pour projections la droite $b'e'$ perpendiculaire à D′ (art. **46**), et la droite correspondante be. Sa vraie grandeur est l'hypoténuse $b'e_1$ du triangle rectangle $b'e'e_1$ dont le côté $e'e_1$ est égal à la différence eb_1 des projetantes des deux points (e, e') et (b, b') (art. **14**). Portant la longueur $e_1 b'$ de e' en B′, nous obtenons la projection B′ du point (b, b') quand le plan des droites est devenu parallèle au plan vertical. L'angle cherché est $B'a'e'$.

51. *Par un point donné, faire passer une droite qui rencontre une droite donnée sous un angle donné.*

Soient (a, a') le point (*fig.* 43) et (D, D') la droite. Après avoir tracé l'horizontale $a'g'$, et déterminé ainsi le point (g, g') situé sur (D, D') à la même hauteur que (a, a'), nous considérons le plan qui contient les droites (D, D') et $(ag, a'g')$, et nous le faisons tourner autour de cette dernière droite de manière à le rendre horizontal. Un point quelconque (b, b') de la droite donnée décrit un arc de cercle dont le centre se projette, sur le plan horizontal, au pied e de la perpendiculaire abaissée du point b sur ag; le rayon est égal à l'hypoténuse $b'e_1$ du triangle rectangle $b'b_1e_1$ dont le côté b_1e_1 est égal à be (art. **14**). Portant donc cette longueur à partir du point e dans la direction eb, et joignant le point B ainsi obtenu au point g qui n'a pas changé, on trouve que la droite est maintenant (Bg, b_1g'). On trace sur le plan horizontal la droite aK faisant avec BgK l'angle donné; quand on relève le plan, le point K décrit un arc de cercle qui se projette sur la droite Kk perpendiculaire à l'axe ag, et s'arrête au point k de la droite D. La droite cherchée est $(ak, a'k')$. Le problème admet une seconde solution, si le sens dans lequel l'angle doit être mesuré n'est pas déterminé.

On peut résoudre par cette construction le problème de la perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite, déjà examiné à l'article **41**.

On remarquera que, sur les *fig.* 41 et 43, il n'y a pas de traces, mais seulement des projections, et que, conformément aux observations de l'article **49**, la position de la ligne de terre n'est utile que pour déterminer la ponctuation; la hauteur à laquelle elle se trouve n'influe en rien sur les tracés.

52. *L'angle aigu d'une droite avec sa projection sur un plan est plus petit que les angles aigus formés par la droite avec les autres lignes du plan.*

Soient AB la droite considérée (*fig.* 42), Ab sa projection sur un plan P, et Ac une droite du plan.

Prenons des longueurs égales Ab et Ac, élevons bB perpendiculaire au plan, et joignons le point B au point c.

Les triangles BAb et BAc ont deux côtés respectivement égaux, et le troisième côté Bb du premier est plus petit que le côté correspondant Bc du second, parce que ces droites abaissées d'un même point sur un plan sont l'une perpendiculaire et l'autre oblique à ce plan. D'après cela l'angle BAb est plus petit que BAc. Le théorème énoncé est donc démontré.

Si nous considérons les angles supplémentaires de ceux que nous venons d'examiner, nous verrons que BAc est plus grand que BAi, et par suite que tous les angles obtus formés par AB avec les diverses lignes du plan.

Une droite est perpendiculaire à un plan quand elle l'est à sa projection sur ce plan; elle est couchée dans le plan quand elle se confond avec sa projection. D'après cela, on voit que l'angle d'une droite avec sa projection sur un plan fait

bien comprendre la position de cette ligne par rapport au plan; on appelle cet angle *angle de la droite avec le plan.*

53. *Construire les angles d'une droite donnée avec les plans de projection.*

Il faut déterminer les angles de la droite avec ses projections, en rabattant successivement ses deux plans projetants, comme nous l'avons déjà fait pour trouver la distance de deux points (art. **14**, *fig.* 12).

54. *Construire la projection verticale d'une droite, connaissant un de ses points* (a, a') (*fig.* 45), *sa projection ab sur le plan horizontal, et l'angle qu'elle fait avec ce plan.*

En faisant l'angle baB égal à l'angle donné, on a la projection de la droite lorsque son plan projetant a été rabattu sur le plan horizontal X_1Y_1 qui contient le point (a, a'). Une droite bB perpendiculaire à ab fait connaître la hauteur b_1b' à laquelle le point rabattu en B est placé, dans l'espace, au-dessus de X_1Y_1.

55. *Construire l'angle d'une droite donnée avec un plan donné.*

En jetant les yeux sur la *fig.* 42, on voit que l'angle BAb sous lequel une droite rencontre un plan est le complément de l'angle ABb qu'elle fait avec une perpendiculaire Bb abaissée de l'un quelconque de ses points sur le plan.

D'après cela, on obtiendra l'angle d'une droite donnée avec un plan donné, en abaissant d'un point de la droite une perpendiculaire sur le plan (art. **43**), et en cherchant l'angle de ces deux lignes (art. **47**).

56. *Déterminer l'angle de deux plans donnés.*

Considérons d'abord dans l'espace deux plans dont les traces sur un plan fixe H sont aP et aQ (*fig.* 48a) et qui se coupent suivant la ligne aB dont la projection est ab : si par un point g_1 de aB, et dans les deux plans, on conçoit les droites g_1m et g_1n perpendiculaires à aB, l'angle mg_1n mesurera le dièdre compris entre les plans, et la construction du triangle mg_1n fera connaître ce dièdre.

Le plan mg_1n étant perpendiculaire à aB, sa trace mn est perpendiculaire à ab (art. **40**), et par suite au plan projetant baB, et à la droite rg_1 qui y est contenue. La ligne rg_1 est aussi perpendiculaire à aB, parce qu'elle se trouve dans le plan mg_1n. Cette circonstance permet de déterminer la hauteur rg_1 du triangle mg_1n, dont la base mn se trouve sur le plan H.

Soient maintenant (P, P′) et (Q, Q′) les plans donnés (*fig.* 44 et 44 *bis*). La droite ba est la projection horizontale de leur intersection. Une droite mn perpendiculaire à ba peut être considérée comme la trace d'un plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans donnés.

Ce plan auxiliaire coupe les plans (P, P′) et (Q, Q′) suivant deux droites qui comprennent l'angle cherché, et qui forment un triangle avec la ligne mn. En faisant tourner ce triangle autour de mn, le sommet décrit un arc de cercle dans

le plan vertical (ab, bb') perpendiculaire à mn, et vient se placer sur ra en un certain point g qu'il s'agit de déterminer.

La ligne rg considérée dans l'espace, avant son rabattement, est perpendiculaire à l'intersection des plans donnés, parce qu'elle est dans le plan auxiliaire. D'après cela nous obtiendrons facilement sa longueur en rabattant le plan vertical (ab, bb') sur l'un des plans de projection. Si nous choisissons le plan vertical, les points r et a se transportent en r_1 et a_1, l'intersection des plans se place en $b'a_1$, et la perpendiculaire r_1g_1 est la longueur qu'il faut porter sur la ligne ra, à partir du point r pour avoir le point g. L'angle cherché est mgn.

Si les deux plans ont leurs traces parallèles sur un des plans coordonnés, par exemple, sur le plan horizontal (*fig.* 46), leur intersection sera horizontale et parallèle aux traces; le plan auxiliaire deviendra vertical, et la hauteur rg du triangle mng sera égale à la projetante bb'.

57. L'intersection aB (*fig.* 48a) est perpendiculaire à toutes les lignes du plan mg_1n. Si donc nous rabattons le plan (P, P') (*fig.* 44) sur le plan horizontal, il suffira d'abaisser du point m une perpendiculaire sur le rabattement de l'intersection, pour avoir la longueur du côté mg du triangle mgn.

Traçons du point b la ligne bi perpendiculaire à P. La droite qui va dans l'espace du point b' du plan vertical au point i du plan horizontal est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont bb' et bi; sa longueur est $b'i_1$; elle rencontre perpendiculairement en i la trace P, et par suite, quand le plan tourne autour de la droite P, le point (b, b') vient se placer sur le prolongement de bi, en un point B, à une distance iB égale à $b'i_1$. Le rabattement de l'intersection est donc aB; il n'y a plus pour avoir le point g qu'à abaisser la perpendiculaire mG, et à ramener le point G sur la ligne ra par un arc de cercle ayant son centre en m.

Cette construction est un peu moins simple que la précédente; mais elle deviendrait plus facile si, pour des constructions antérieures, l'un des plans donnés avait déjà été rabattu.

On peut encore résoudre le problème en abaissant des perpendiculaires sur les plans d'un point pris dans l'intérieur de l'angle que l'on veut connaître, et en construisant l'angle de ces droites qui est supplémentaire de celui que l'on cherche. En prenant le point sur l'un des plans de projection, dans une position convenable par rapport aux traces, on sera assuré qu'il se trouve dans le dièdre que l'on considère.

58. *Déterminer l'angle qu'un plan donné forme avec le plan horizontal.*

Soit (P, P') le plan (*fig.* 48). Par un point quelconque g de P, concevons un plan vertical perpendiculaire à P; il coupe le plan horizontal et le plan donné suivant deux droites qui comprennent entre elles l'angle cherché. L'une d'elles est la perpendiculaire gb à P, l'autre va du point g au point b' où la verticale bb', trace du plan auxiliaire, rencontre la trace P' du plan donné.

Faisons maintenant tourner le plan vertical (bg, bb') autour de bb' pour le rabattre sur le plan vertical de projection : le point g va en g_1 et l'angle cherché est bg_1b'.

On opérerait d'une manière analogue pour avoir l'angle du plan donné avec le plan vertical.

Changement des plans de projection.

59. Il est quelquefois utile d'abandonner les plans coordonnés primitifs pour en prendre d'autres qui, eu égard à la nature du problème, soient plus convenablement placés par rapport à la figure de l'espace. Il faut alors déterminer les nouvelles projections des lignes données. Nous avons déjà étudié cette question dans des cas simples (art. **32-34**) ; nous allons compléter cette théorie.

Connaissant les projections de divers points sur deux plans coordonnés, trouver la projection de chacun d'eux sur un plan vertical quelconque que l'on rabat sur le plan horizontal.

Soient (m, m'), (p, p'), ... les points donnés (*fig.* 49), et X_1Y_1 la trace du nouveau plan vertical.

La nouvelle projection m'' du point (m, m') doit être à une distance de la nouvelle ligne de terre X_1Y_1 égale à la hauteur du point au-dessus du plan horizontal, c'est-à-dire à la distance m_0m' de la première projection verticale m' à la première ligne de terre XY. Donc, si nous traçons par le point m la perpendiculaire mm_1 à la ligne de terre X_1Y_1, et que nous prenions sur cette droite la distance m_1m'' égale à m_0m', le point m'' sera la nouvelle projection verticale du point (m,m').

Le point m'' peut être placé indifféremment d'un côté ou de l'autre de la ligne de terre X_1Y_1, parce que rien ne détermine d'avance le sens du rabattement du nouveau plan vertical. Tous les points qui, sur le premier plan vertical, ont leur projection du même côté de la ligne de terre XY que m', auront leur nouvelle projection du même côté de la droite X_1Y_1 que m''.

60. Nous allons maintenant examiner le cas général.

Connaissant les projections d'un point sur deux plans coordonnés, trouver ses projections sur deux plans rectangulaires donnés que l'on rabat sur les premiers.

Soient (m, m') le point (*fig.* 47), (P, P′) un des nouveaux plans et (A, A′) son intersection avec le second plan.

Nous rabattons le plan (P, P′) sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace P, et nous allons chercher d'abord où se place la droite (A, A′) qui doit être notre nouvelle ligne de terre X_1Y_1.

Nous prenons un plan (xy, aa') vertical et perpendiculaire à la trace P, et nous le rabattons sur le plan horizontal. Un point quelconque (r, r') de (A, A′)

se projette sur ce plan auxiliaire en un point r'' situé à la même hauteur au-dessus de xy que r' l'est au-dessus de XY. Lorsque nous faisons tourner le plan (P, P′) autour de P, le point (r, r'') décrit un arc de cercle et se place en r_1. Le point b de la droite (A, A′) n'a pas changé de position, et appartient par suite à notre nouvelle ligne de terre X_1Y_1, qui est ainsi r_1b.

Le plan (P, P′) étant perpendiculaire au plan auxiliaire, sa trace P′ sur ce plan passe par la projection r'' de l'un quelconque de ses points.

Nous obtenons la projection m'' du point (m, m') sur le plan vertical xy en opérant comme pour le point (r, r'); nous projetons m'' sur P″ en n, puis, rabattant le plan (P, P′) sur le plan horizontal, nous voyons que la projection se place en m'_1. La projection sur le second des plans coordonnés est en m'_1, à une distance de X_1Y_1 égale à $m''n$.

Pour bien comprendre ces opérations, on peut supposer que le plan auxiliaire soit transporté parallèlement à lui-même jusqu'à passer par le point (m, m'); c'est la position qu'il faudrait lui donner, si l'on ne cherchait les nouvelles projections que de ce seul point.

Le point m'_1 peut être placé indifféremment d'un côté ou de l'autre de la droite X_1Y_1, parce que rien ne détermine d'avance le sens du rabattement du second plan sur le premier. Tous les points qui, sur le plan auxiliaire, sont du même côté de P″ que m'' devront être sur le nouveau plan de projection du même côté de X_1Y_1 que m'_1. Une observation analogue doit être faite pour les projections sur le plan (P, P′) : un point tel que m_1 sera placé d'un côté ou de l'autre de la trace P, suivant le sens du rabattement.

Les nouveaux plans de projection ne sont pas l'un *horizontal* et l'autre *vertical;* cependant, *dans les questions abstraites*, on les désigne souvent par ces expressions, et cela facilite le langage; mais dans les applications les objets ont des positions déterminées, et l'on cesserait d'être intelligible si l'on appelait horizontales des droites qui sont visiblement inclinées à l'horizon [1].

Pour arriver à nos projections définitives nous avons construit une projection sur un plan perpendiculaire à l'un des anciens plans coordonnés et à l'un des nouveaux. Cette projection intermédiaire est quelquefois utile par elle-même pour la solution du problème.

Nous allons maintenant étudier une question qui nous donnera l'occasion d'appliquer les tracés que nous venons d'expliquer.

61. *Déterminer la plus courte distance de deux droites données qui ne sont pas dans un même plan.*

Nous supposons d'abord que le plan vertical est parallèle aux deux droites

---

[1] La *fig.* 1 ne doit jamais être appelée une projection horizontale, même quand on considère la droite XZ comme une ligne de terre.

données (A, A′) et (B, B′) (*fig.* 49). Les projections verticales se rencontrent nécessairement en un point m', car sans cela les droites de l'espace seraient parallèles, et par suite dans un même plan.

La droite projetée sur le point m' est évidemment perpendiculaire aux deux droites, et aucune autre sécante ne peut l'être, car sa projection verticale serait perpendiculaire aux deux convergentes A′ et B′ (art. **47**), ce qui est impossible.

Si l'on se reporte à la construction que nous avons donnée pour avoir la distance de deux points (art. **14**), on reconnaîtra que la longueur nm de la perpendiculaire est plus petite que celle des autres droites qui ont leurs extrémités sur les deux droites données.

Nous voyons donc que, quand deux droites ne sont pas dans un même plan, elles ont une commune perpendiculaire qui mesure leur plus courte distance, et que cette ligne est immédiatement donnée de grandeur et de position quand les deux droites sont parallèles à l'un des plans de projection.

62. Supposons maintenant que les droites données (A, A″) et (B, B″) (*fig.* 49) aient leurs projections horizontales parallèles entre elles, mais non pas à la ligne de terre $X_1 Y_1$; pour connaître la grandeur de la plus courte distance, nous n'aurons qu'à mesurer l'écartement des droites A et B; mais, si nous voulons avoir la position de la commune perpendiculaire, il faudra prendre un nouveau plan vertical dont la trace XY soit parallèle à A et B, et déterminer les projections A′ et B′ des droites sur ce plan; leur point de rencontre m' fera trouver sur le plan horizontal la ligne mn qu'on relèvera en $m''n''$.

On eût pu rabattre le plan XY sur le plan vertical $X_1 Y_1$ en le faisant tourner autour de la verticale du point Y. La droite YZ eût alors été la ligne de terre des deux projections qui se fussent trouvées disposées comme les *fig.* 1 et 4.

63. Nous arrivons maintenant au cas général.

Les droites données sont (A, A′) et (B, B′) (*fig.* 50). La ligne (B_1, B′), menée parallèlement à la seconde par le point (g, g') de la première, détermine avec celle-ci un plan (P, P′). Nous prenons un plan auxiliaire de projection (xy, ee') perpendiculaire au plan horizontal et à (P, P′); et nous le rabattons sur le plan horizontal.

Les deux droites (A, A′) et (B, B′) ont pour projection sur ce plan une droite A″, trace du plan (P, P′); la droite (B, B′) se projette sur une droite B″ parallèle à la précédente, et qui, par conséquent, peut être déterminée par un seul point, tel que p'', projection de la trace horizontale p.

L'écartement des droites A″ et B″ donne la distance cherchée (art. **62**).

Pour avoir la position de la commune perpendiculaire, il faut prendre un nouveau plan de projection parallèle aux droites et perpendiculaire au plan vertical xy; ce sera (P, P′). Nous pouvons le rabattre, soit sur le plan auxiliaire en le faisant tourner autour de A″, soit sur le plan horizontal par une rotation

autour de P; nous avons adopté cette dernière disposition. Opérant comme il a été expliqué à l'article **60**, on trouve que les nouvelles projections des droites sont A‴ et B‴. La commune perpendiculaire se projette en *m*‴; nous ramenons cette ligne d'abord en *mn*, puis en *m′ n′*.

La projection *m″ n″* sur le plan auxiliaire est perpendiculaire à A″ et à B″.

Dans le rabattement autour de P, la trace P′ va se placer sur la droite qui passerait par les points L et *e*‴, et par suite le point L est à des distances égales de *e′* et de *e*‴. Ce dernier point est donc sur un arc de cercle décrit du point L comme centre avec L*e′* pour rayon.

64. Si l'une des droites était verticale, la commune perpendiculaire se projetterait sur le plan horizontal en vraie grandeur, et suivant une perpendiculaire à la projection de la seconde droite. On peut donc résoudre le problème, dans le cas général, en prenant un plan de projection perpendiculaire à l'une des droites.

Enfin, nous indiquerons deux solutions par les procédés ordinaires, en conservant les plans coordonnés.

1° Un plan P (*fig.* 50*a*) mené par la droite A parallèlement à B, et un plan H mené par la droite B perpendiculairement à P, se coupent suivant une droite M dont l'intersection I avec A est l'une des extrémités de la droite cherchée. Car, si par ce point on élève une perpendiculaire au plan P, elle sera perpendiculaire à A, à M, et à la droite B parallèle à M.

2° L'intersection G (*fig.* 49*a*) d'un plan P perpendiculaire à A par un plan Q perpendiculaire à B est parallèle à la droite cherchée; l'une des extrémités de cette ligne est le point I où la droite A rencontre le plan passant par B et parallèle à G.

Quand les projections de la commune perpendiculaire sont connues, on trouve sa grandeur par les procédés ordinaires (art. **14**).

CHAPITRE III.

POINTS ET LIGNES DE CONSTRUCTION HORS DU CADRE DE L'EPURE.

Réduction d'échelle.

65. Le but de la Géométrie descriptive étant de résoudre des problèmes d'application, il est nécessaire que les tracés soient appuyés sur des lignes et des points situés dans le cadre de l'épure. Lorsqu'un point utile se trouve éloigné, on ne doit pas aller le chercher sur une seconde feuille placée près de la pre-

mière. Cet artifice ne présente jamais d'exactitude et serait d'ailleurs impossible dans les applications sérieuses, par exemple en Stéréotomie, où l'on opère sur des aires limitées.

Nous avons déjà indiqué, pour lever cette difficulté, divers procédés spéciaux à quelques problèmes; à l'article **49** nous avons exposé une construction qui est souvent employée, celle du déplacement de la ligne de terre; il nous reste à traiter la question d'une manière générale et à faire connaître quelques tracés utiles.

66. On peut toujours, par une réduction d'échelle, faire rentrer les lignes et les points éloignés dans le cadre de l'épure. Lorsque le tracé est terminé, on reporte la solution sur la figure primitive.

Supposons que, par le point de rencontre éloigné des droites B et C (*fig.* 51), on doive élever une perpendiculaire à B, et du point où elle coupe la droite A abaisser une perpendiculaire sur D.

Il suffit de réduire les dimensions de la figure au tiers pour en obtenir une autre (*fig.* 51 *bis*) sur laquelle la construction puisse être faite. La droite cherchée *e* est ensuite reportée en E (*fig.* 51). Les droites des deux figures sont parallèles.

Nous avons construit une figure entièrement distincte de la première, mais généralement on prend un point de celle-ci pour centre commun de similitude, de manière à utiliser pour la seconde les droites qui y passent. Si l'on avait choisi le point M, les lignes B et D eussent appartenu à la figure réduite. Quand on connaît un point de la droite cherchée, il est avantageux de le prendre pour centre de similitude; on trouve la ligne dans la position même qu'elle doit occuper.

Le compas de réduction est d'un usage très commode pour la construction que nous venons d'indiquer. On ne doit employer cet instrument qu'avec beaucoup de soin quand il s'agit d'obtenir une fraction déterminée d'une longueur, mais ici la grandeur du rapport de réduction n'a aucune importance.

67. Quelques-unes des constructions que nous avons exposées dans le Chapitre précédent pour des points éloignés sont de véritables réductions d'échelle; ainsi à l'article **27** nous avons déterminé l'intersection de deux plans dont les traces horizontales ne se rencontrent pas sur la feuille de dessin, en diminuant dans un même rapport les lignes *b*R et *b*S (*fig.* 23), de manière à obtenir un triangle *rgs* semblable à celui que forment les traces P et Q avec la ligne de terre. Le centre de similitude est le point connu *b* de la droite cherchée.

Cette construction ne serait pas applicable sur la *fig.* 52, parce que les traces des plans (P, P′) et (Q, Q′) ne se rencontrent que très loin sur les deux plans coordonnés. Nous avons pris le point R pour centre de similitude, puis, réduisant RS au cinquième, nous avons transporté le plan (Q, Q′) parallèlement à lui-même

en (q, q'). Après avoir obtenu la droite d'intersection (a, a'), nous l'avons reportée dans sa véritable position (A, A′) en prenant RB et QC quintuples de Rb et de Rc.

Constructions diverses.

68. *Tracer une droite qui passe par un point donné et par le point éloigné où deux droites données se rencontrent.*

Soient A le point, P et Q les droites (*fig.* 53). Nous construisons le triangle ABC dont un sommet est au point A, et les deux autres sur les droites données; puis nous traçons bc parallèle à BC, et par les points b et c nous menons des parallèles à BA et CA; leur point de concours a appartient à la droite cherchée, car les deux triangles étant homothétiques, c'est-à-dire semblables et semblablement placés, les droites qui passent par les points homologues concourent vers un même point qui est le centre de similitude [1].

On tracera généralement la droite BC parallèle à la ligne du cadre de l'épure, de manière que bc puisse être formé par un segment de cette ligne; mais la condition essentielle à laquelle il faut satisfaire, c'est que les diverses intersections se fassent sous des angles assez ouverts.

69. *Abaisser une perpendiculaire sur une droite* R, *du point éloigné où deux droites* P *et* Q *se rencontrent* (*fig.* 54).

Des points a et b où la droite R coupe les droites P et Q, nous abaissons des perpendiculaires respectivement sur P et Q; leur point de rencontre c appartient à la perpendiculaire cherchée. On sait, en effet, que les trois perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle tel que PQR sur les côtés opposés concourent vers un même point c. La perpendiculaire abaissée de ce point sur R est donc la droite cherchée.

---

(1) Nous supposons que ce théorème est connu du lecteur; il est du reste très facile de le démontrer. Appelons I et J les points où la droite Aa rencontre les droites P et Q; les triangles Iab, Jac respectivement semblables à IAB et JAC donnent

$$\frac{a\mathrm{I}}{\mathrm{A}a + a\mathrm{I}} = \frac{ab}{\mathrm{AB}}, \qquad \frac{a\mathrm{J}}{\mathrm{A}a + a\mathrm{J}} = \frac{ac}{\mathrm{AC}}.$$

Les seconds rapports de ces proportions sont égaux, vu la similitude des triangles ABC et abc; donc les premiers rapports sont égaux; de la proportion qu'ils forment, on tire

$$\frac{a\mathrm{I}}{\mathrm{A}a} = \frac{a\mathrm{J}}{\mathrm{A}a};$$

par suite, les longueurs AI et AJ sont égales, et les points I et J se confondent.

CHAPITRE IV.

PROBLÈMES RELATIFS AUX ANGLES TRIÈDRES.

---

70. Un angle trièdre présente trois angles plans et trois angles dièdres; nous allons voir que, quand trois de ces six angles sont donnés, on peut déterminer les autres.

Nous désignerons par α, β et γ les angles des faces, et par A, B, C les angles dièdres qui leur sont respectivement opposés. Nous considérerons toujours ces derniers comme représentés par des angles plans d'un même nombre de degrés.

Pour la facilité du langage, le plan de la figure sera supposé horizontal.

Premier cas.

71. *Connaissant les faces* α, β *et* γ *d'un angle trièdre, trouver les angles dièdres* A, B *et* C.

Nous traçons par un point S (*fig.* 55) les droites Sb, Sc, Sa et Sb_1 comprenant entre elles les angles plans donnés α, β, γ; et nous considérons les deux espaces angulaires bSc et b_1Sa comme les rabattements de deux faces de l'angle trièdre sur le plan horizontal de la troisième face cSa.

Prenons sur Sb et Sb_1 deux points M et M_1 également éloignés de S, et traçons les droites MEm, M_1Dm respectivement perpendiculaires à Sc et Sa; si nous relevons les deux faces rabattues, en les faisant tourner autour de Sc et de Sa, les points M et M_1 décriront des arcs de cercle qui auront leurs centres, l'un en E et l'autre en D, et qui se projetteront sur MEm et M_1Dm. Ces arcs sont sur une sphère dont le centre est en S et dont le rayon est égal à SM et à SM_1; le point de rencontre m de leurs projections est la projection d'un point de la sphère où ils se coupent. Les droites Sb et Sb_1 se confondent donc lorsqu'elles se projettent sur Sm; l'angle trièdre est alors recomposé.

Lorsque la droite EM est parvenue à sa position définitive, elle forme avec sa projection Em et avec la projetante du point M un triangle rectangle dans lequel l'angle en E mesure l'angle dièdre C. Nous connaissons l'hypoténuse et un côté de ce triangle, nous pouvons donc le construire. Si nous le rabattons sur le plan horizontal par une rotation autour de sa base mE, son sommet se placera au point m' où la droite mm' perpendiculaire à mE rencontre l'arc décrit du point E comme centre avec EM pour rayon. L'angle m'Em est l'angle cherché C.

On trouve de la même manière la grandeur $m'_1 \mathrm{D}m$ de l'angle dièdre A. Les droites mm' et mm'_1, étant des rabattements d'une même projetante, doivent être égales.

Si le point m se trouvait au delà de Sc, l'angle C serait obtus, et l'on obtiendrait sa grandeur en prenant le supplément de l'angle toujours aigu $m'\mathrm{E}m$. Quand le point m est dans l'angle opposé au sommet à $c\mathrm{S}a$ (*fig.* 55 a), les deux angles A et C sont obtus.

72. Tous les points de la sphère dont nous avons parlé se projettent sur le plan horizontal, dans l'intérieur d'un cercle décrit du point S comme centre avec SM pour rayon (*fig.* 55). Quand les droites ME, $\mathrm{M}_1\mathrm{D}$ se rencontrent hors de ce cercle, leur point d'intersection n'est la projection d'aucun point de la sphère; par suite, les arcs décrits par les points M et M_1 ne se coupent pas, et il n'est pas possible de composer un angle trièdre avec les angles plans donnés.

Si nous faisons varier la grandeur de l'angle $a\mathrm{S}b_1$, ou γ, le point m prendra diverses positions sur la droite Mn, et, d'après ce que nous venons de voir, quand il sera sur les prolongements de cette corde, le problème n'aura plus de solution. Or, il est facile de reconnaître que, si le point m se trouve au delà de n ou en deçà de M, c'est que l'angle γ est plus petit que la différence $a\mathrm{S}\mu$ (*fig.* 57), ou plus grand que la somme $a\mathrm{S}\mu_1$ de β et de α. Il faut donc, pour que l'angle trièdre existe, que l'un quelconque des angles plans soit plus petit que la somme des deux autres.

Si cette condition n'était pas satisfaite, le triangle $\mathrm{E}mm'$ ne pourrait pas être construit, car l'hypoténuse $\mathrm{E}m'$, qui est égale à EM ou En, se trouverait plus petite que le côté Em.

La discussion que nous venons de faire est complète pour le cas où l'angle $b\mathrm{S}a$, somme des deux angles α et β que nous supposons invariables, est inférieur à 180°; mais, quand il dépasse cette grandeur, c'est son supplément à 360° qui est la limite supérieure de l'angle γ. Nous ne nous arrêterons pas à cette étude, qu'il est facile de faire sur une figure établie pour ce cas.

Il existe ainsi une seconde condition : l'angle dièdre n'est possible que quand la somme de ses trois angles plans est inférieure à 360°.

73. Nous n'avons déterminé que deux des trois angles dièdres; pour obtenir le troisième, en conservant aux angles donnés leur disposition sur la *fig.* 55, nous traçons les lignes MG et $\mathrm{M}_1\mathrm{H}$ respectivement perpendiculaires à Sb et à Sb_1; ces lignes comprennent dans l'espace l'angle B quand les faces $c\mathrm{S}b$ et $a\mathrm{S}b_1$ sont remises en position; elles forment alors un triangle dont la base est GH, et qu'on peut facilement construire rabattu sur le plan horizontal. Son sommet M′ est déterminé par deux arcs de cercle ayant pour centres G et H, et pour rayons GM et HM_1. L'angle GM′H est l'angle cherché A.

Le plan du triangle est perpendiculaire à la troisième arête : sa trace GH doit

être, par conséquent, perpendiculaire à la projection Sm de cette droite (art. **40**). Dans le rabattement, le sommet du triangle se meut dans le plan dont la trace est Sm, et le point M′ où il vient se placer doit être sur cette trace.

74. Rien n'indique dans la construction si l'on a fait tourner les plans cSb et aSb_1 de manière à les élever au-dessus du plan de la figure ou à les abaisser au-dessous de lui : cela montre que les deux angles trièdres, qui peuvent être composés par ces mouvements différents, ont les mêmes angles dièdres. Ils ne sont pas superposables, mais symétriques.

On peut placer dans un ordre quelconque les trois angles donnés, ils correspondent toujours à un même angle trièdre et à son symétrique.

75. Le point N (*fig.* 55) est à égale distance des points M_1 et m', parce qu'il se trouve sur les axes Sa et En des deux rabattements. On peut donc déterminer la position du point m' sur l'arc Mm', par un second arc décrit du point N comme centre et passant par M_1. Nous allons donner un exemple de cette construction qui est préférable à celle que nous avons exposée, quand on ne cherche que l'angle dont l'arête est Sc.

Dans le levé des plans, on a souvent besoin de *réduire un angle à l'horizon*, c'est-à-dire de déterminer la projection horizontale d'un angle connu γ dont les côtés font, avec la verticale abaissée du sommet, des angles donnés α et β.

Cette verticale et les deux côtés de l'angle γ sont les arêtes d'un angle trièdre dont on connaît les trois angles plans. La projection demandée est l'angle rectiligne qui mesure le dièdre des faces verticales.

Par un point S (*fig.* 56) nous traçons quatre droites Sb, Sc, Sa et Sb_1 formant entre elles les angles α, β et γ; la seconde de ces droites est verticale. Nous considérons les deux espaces angulaires bSc et b_1Sa comme les rabattements de deux faces de l'angle trièdre sur le plan vertical de la face cSa.

Nous prenons un plan horizontal déterminé par une ligne de terre EN; il coupe l'arête Sb en un point M que nous rapportons en M_1 sur le second rabattement Sb_1 de cette droite, par un arc décrit du point S comme centre.

Supposons maintenant que l'on fasse tourner les faces bSc et b_1Sa respectivement autour de Sc et de Sa pour recomposer l'angle trièdre; le point M décrira dans le plan horizontal un arc de cercle, dont le point E sera le centre et la droite EM le rayon; le point M_1 restera toujours à la même distance de N. Nous pouvons donc déterminer par recoupement le point m' du plan horizontal où les points M et M_1 se rejoindront. L'angle réduit à l'horizon est NEm'.

La seule différence avec la *fig.* 55, c'est que nous avons rabattu la face bSc sur la face aSc et non en dehors.

Dans cet exercice, nous avons supposé les angles placés sur un plan vertical, pour avoir égard à la nature des données.

Deuxième cas.

76. *Connaissant deux faces* α *et* β *d'un angle trièdre et l'angle dièdre* C *qu'elles comprennent, trouver la troisième face* γ *et les deux autres angles dièdres* A *et* B.

Par un point S (*fig.* 58), nous traçons trois droites S*b*, S*c* et S*a* qui comprennent entre elles les angles plans donnés α et β; puis, d'un point M pris arbitrairement sur S*b*, nous abaissons une perpendiculaire MN sur S*c*.

Pour placer la face *b*S*c* dans sa véritable situation par rapport à *a*S*c*, il faut la faire tourner autour de S*c*, jusqu'à ce que la droite ME forme avec EN l'angle donné C. Cette droite ME, sa projection sur EN et la projetante du point M sont alors les trois côtés d'un triangle rectangle dont nous connaissons l'hypoténuse ME et l'angle en E égal à C. Nous pouvons construire ce triangle sur le plan de la figure en supposant qu'il ait tourné autour de sa base. Nous obtenons ainsi la projection *m* du point M de l'espace.

La position M_1 du point M, lorsqu'il est rabattu avec le plan de la troisième face, est sur la circonférence décrite du point S comme centre, avec SM pour rayon, sur la perpendiculaire à S*a* abaissée de la projection *m* du point de l'espace, et sur la circonférence décrite du point N comme centre, avec N*m'* pour rayon. Nous avons donc une vérification.

La droite MN peut être considérée comme une ligne de terre; E*m'* est alors la trace verticale du plan de la seconde face.

Les trois angles plans sont maintenant connus; on achèvera la solution du problème comme il est dit aux articles **71** et **73**. Il n'y a pas de cas d'impossibilité.

Troisième cas.

77. *Connaissant deux faces* α *et* β *d'un angle trièdre, et l'angle* A *opposé à l'une d'elles, trouver la troisième face* γ *et les deux autres angles dièdres* B *et* C.

Par un point S (*fig.* 59) nous traçons trois droites S*b*, S*c* et S*a*, qui comprennent entre elles les angles plans donnés α et β. Nous menons ensuite une droite *x*K perpendiculaire à S*a*, et nous la considérons comme la trace d'un plan vertical que nous rabattons; son intersection avec la troisième face est alors la droite K*y* qui fait avec K*x* l'angle donné A.

Toutes les données sont maintenant sur la figure.

D'un point M de S*b* abaissons une perpendiculaire MN sur S*c* : si nous concevons que la face *b*S*c* soit ramenée dans sa véritable position par une rotation autour de S*c*, les points M, E et N seront les sommets d'un triangle dont deux côtés EN et EM sont connus; le troisième côté, considéré comme une droite

indéfinie, a un de ses points projetés en r, car le plan du triangle est vertical.

En élevant la perpendiculaire rr'_1 à xK, nous déterminons sur Ky le point r'_1 du plan de la troisième face qui se projette en r; la grandeur de la projetante est donc rr'_1. Si, par une rotation autour de EN, nous rabattons sur le plan horizontal le triangle dont nous avons parlé, le point qui se projette en r se placera en r' à une distance de EN égale à rr'_1. La droite dont un segment forme le troisième côté du triangle est ainsi Nr'.

En décrivant un arc de cercle du point E comme centre et avec EM pour rayon, on détermine sur Nr' les points m'_1 et m'_2, qui peuvent être indifféremment adoptés comme sommet du triangle ou rabattement du point M de l'espace.

Nous connaissons les distances de ces points au point N et leur éloignement du point S, qui est MS; nous pouvons donc déterminer par des arcs de cercle leurs positions M_1 et M_2 quand la troisième face est rabattue sur le plan horizontal. On pourrait aussi déterminer les projections m_1 et m_2 sur EN, et abaisser de ces points des perpendiculaires sur Sa.

Les droites Ky et Nr' sont les traces du plan de la troisième face sur les plans verticaux, dont les lignes de terre sont Kx et Ne. La construction pour déterminer Nr' revient à celle que nous avons exposée pour le changement du plan vertical de projection (art. **59**).

Pour avoir les grandeurs de l'angle C, il suffira de joindre les points m'_1 et m'_2 au point E. L'angle B sera donné par la construction expliquée à l'article **73**.

78. On obtient autant de solutions que le demi-cercle Mn a de points communs avec la droite indéfinie Nr'. Un point de rencontre de cette droite avec l'autre moitié du cercle correspondrait à un angle trièdre dans lequel l'angle dièdre le long de Sa serait supplémentaire de A.

D'après cette règle, et pourvu qu'on ait soin de faire toujours les rabattements dans le même sens, par rapport au sommet S, que sur la *fig.* 59, on reconnaîtra facilement s'il y a une ou deux solutions, ou si l'angle trièdre est impossible.

Sur la *fig.* 59 *bis*, on ne trouve qu'une solution. Le point rabattu en r' et en r'_1 est au-dessous du plan horizontal.

Nous donnerons plus loin (art. **139**) une solution différente et plus simple du problème de l'angle trièdre dans le troisième cas.

Quatrième cas.

79. *Connaissant une face* β *d'un angle trièdre et les deux angles dièdres adjacents* A *et* C, *trouver les deux faces* α *et* γ *et le troisième angle dièdre* B.

Après avoir tracé deux droites Sc et Sa (*fig.* 60) comprenant entre elles l'angle donné β, nous prenons deux plans verticaux respectivement perpendicu-

laires à ces deux droites; leurs traces, que nous considérons comme des lignes de terre, sont PE et QD. Nous plaçons ensuite sous les inclinaisons voulues les traces Em' et Dm'_1 des plans des faces inconnues sur les plans verticaux qui leur correspondent. Toutes les données sont maintenant sur la figure.

Nous coupons les deux faces par un plan horizontal dont les traces verticales sont les droites xy et x_1y_1, respectivement parallèles aux lignes de terre et situées au-dessus d'elles à une même hauteur, d'ailleurs arbitraire. Les droites d'intersection se projettent sur le plan horizontal suivant des lignes respectivement parallèles à Sc et Sa; leur point de rencontre m appartient à la troisième arête, dont la projection est par conséquent Sm.

Il est maintenant facile de voir que, si nous rabattons les faces sur le plan horizontal en les faisant tourner, l'une autour de Sc, l'autre autour de Sa, le point m de l'espace sera transporté d'un côté en M et de l'autre côté en M_1, et que, par suite, les angles plans cherchés sont bSc et b_1Sa.

Le problème a toujours une solution.

Résolution des trois derniers cas par l'angle trièdre supplémentaire.

80. Nous montrerons plus loin (art. **137** et **140**) comment on résout directement le cinquième et le sixième cas de l'angle trièdre, mais nous ferons connaître dès à présent une méthode qui peut servir à ramener les trois derniers cas aux trois premiers, et réciproquement.

Concevons que, d'un point s pris dans l'intérieur d'un angle trièdre S (*fig.* 63), on abaisse des droites sa, sb et sc respectivement perpendiculaires sur les faces BSC, CSA et ASB de l'angle, et qu'on prenne ces droites pour les arêtes d'un second angle trièdre dont les faces seront prolongées jusqu'à leur intersection avec celles du premier.

Le plan csbP, contenant les droites sb et sc respectivement perpendiculaires aux faces ASC et ASB, est perpendiculaire à leur intersection AS. L'angle plan cPb mesure donc l'angle dièdre dont l'arête est AS, et comme les angles b et c du quadrilatère Pbsc sont droits, on voit qu'un angle plan du deuxième angle trièdre s est supplémentaire de l'angle dièdre correspondant du premier S.

Nous avons vu que l'arête SA était perpendiculaire au plan Pbsc. Toutes les arêtes de l'angle trièdre S sont ainsi respectivement perpendiculaires aux faces de l'angle trièdre s, et par suite les angles plans de S sont supplémentaires des angles dièdres de s. Ces deux angles trièdres sont dits supplémentaires l'un de l'autre.

Si l'on connaît les trois dièdres d'un angle trièdre, en prenant leurs suppléments on aura les angles plans de l'angle trièdre supplémentaire, que l'on

résoudra par les constructions des articles **71** et **73**. On aura alors les suppléments des angles plans de l'angle dièdre donné.

On pourrait par le même procédé ramener au troisième cas celui où l'on donne un angle plan, l'angle dièdre opposé et l'un des deux autres, et le quatrième au second; mais il est généralement préférable de traiter directement ces divers problèmes.

Observations générales.

81. Les constructions exposées dans les articles précédents éprouvent des modifications et deviennent généralement plus simples quand un des angles est droit. Cette hypothèse conduit à des exercices intéressants dont plusieurs ont des applications en Stéréotomie.

On rencontre dans diverses questions l'angle dièdre birectangle et l'angle trièdre trirectangle. Le premier a quatre angles droits α, β, A, B, et les deux autres angles γ, C sont égaux. Dans l'angle trièdre trirectangle les six angles sont droits. Nous allons résoudre quelques problèmes importants sur cet angle trièdre.

Angle trièdre trirectangle.

82. *Connaissant les projections des trois arêtes d'un angle trièdre trirectangle, trouver les angles que ces droites forment avec le plan de la figure.*

Nous supposons que les droites Sx, Sy et Sz (*fig.* 64) sont les projections des arêtes d'un trièdre trirectangle sur un plan, que nous considérons comme horizontal.

La hauteur du plan de projection étant arbitraire, nous pouvons prendre un point quelconque C de la droite Sz pour trace de l'arête projetée sur cette ligne. Les traces des plans zSx et zSy sont alors les droites CA et CB respectivement perpendiculaires à Sy et à Sx (art. **40**). La trace AB de la troisième face doit se trouver perpendiculaire à Sz.

Nous prenons un plan vertical dont la ligne de terre XY est parallèle à dSz. La projection de l'arête SC passera par C′, et la trace du plan opposé par d'; ces deux droites sont d'ailleurs à angle droit, et par suite la projection S′ du sommet est sur le demi-cercle qui a C′d' pour diamètre. L'angle sC′S′ donne l'inclinaison de l'arête Sz; on obtient les inclinaisons des autres arêtes en faisant tourner leurs plans projetants autour de la verticale du point S, jusqu'à les rendre parallèles au plan vertical.

83. On ne trouvera une solution que quand la perpendiculaire abaissée du point S sur XY rencontrera le demi-cercle; mais on doit se demander si, cette

condition étant satisfaite, le trièdre que l'on obtiendra sera nécessairement trirectangle.

Reprenons les constructions. Nous menons d'un point C de Sz deux droites CA et CB respectivement perpendiculaires à Sy et Sx, et nous traçons AB; cette droite sera toujours perpendiculaire à Sz, parce que les trois perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les côtés opposés se rencontrent en un même point. Nous sommes ainsi assuré que la ligne AB se projette verticalement en un point d', et nous pouvons déterminer une hauteur sS' du sommet, pour laquelle l'arête Sz est perpendiculaire à la face xSy, et par conséquent aux deux arêtes Sx et Sy; mais chacune de celles-ci est déjà perpendiculaire à la trace horizontale de la face qui lui est opposée (art. **46**); elle est donc perpendiculaire à cette face, et le trièdre déterminé est trirectangle.

Pour que la verticale sS' rencontre le demi-cercle, il faut que chacun des angles ASB, BSC et CSA soit compris entre 90° et 180°. Il est facile de voir, en effet, que si l'on fait tourner la droite Sx, de manière qu'elle fasse un angle aigu avec Sy ou avec Sz, les points d et C se trouveront d'un même côté de S (1).

Quand deux des droites données Sx et Sy sont à angle droit, la troisième Sz doit être confondue avec l'une d'elles ou être sur son prolongement, et le problème est indéterminé.

84. En modifiant l'ordre dans lequel les différentes lignes de la *fig.* 64 sont tracées, on y trouvera la solution des problèmes qui consistent à obtenir la projection d'un trièdre trirectangle quand on connaît la projection Sz d'une arête, son inclinaison et l'inclinaison d'une autre arête, ou bien les projections Sz et Sy de deux arêtes, et l'inclinaison de l'une d'elles.

Dans la première de ces questions, on ne peut pas se donner arbitrairement les inclinaisons de deux arêtes. La *fig.* 64 montre que l'on a

$$SB > Sd;$$

d'où successivement

$$sB'_1 > sd', \qquad \widehat{sd'S'} > \widehat{sB'_1S'},$$

et enfin

$$sB'_1S' + sC'S' < 90^\circ.$$

La somme des angles que deux quelconques des arêtes forment avec le plan de la figure est donc toujours inférieure à un angle droit.

(1) Si deux droites qui se rencontrent à angle droit dans l'espace percent le plan horizontal, l'une en A et l'autre en B, l'angle ASB de leurs projections est nécessairement obtus; il serait droit si les droites étaient dans le plan de projection, ou si l'une d'elles était horizontale, mais il ne peut pas être aigu. Les deux angles BSC et CSA supplémentaires à 360° doivent être obtus par la même raison

NOTE[1]

SUR

L'INTERSECTION DE DEUX POLYÈDRES ENTRE EUX

PAR

M. ERNEST LEBON,

Agrégé de l'Université, Professeur de Mathématiques au Lycée Charlemagne.

Méthode générale.

1. Pour trouver l'intersection de deux polyèdres entre eux, on cherche les droites d'intersection des faces entre elles; chaque portion de ces droites, commune à une face du premier polyèdre et à une face du second, forme un côté du polygone d'intersection; ce polygone est généralement gauche. Il suffit de trouver les points d'intersection des arêtes de chacun des polyèdres avec les faces de l'autre pour obtenir les deux points extrêmes des côtés de l'intersection.

2. Il y a *pénétration* quand toutes les arêtes de l'un des polyèdres rencontrent la surface de l'autre; il y a *arrachement* dans le cas contraire. Dans le cas de la pénétration de deux polyèdres convexes, l'intersection est formée de deux polygones, l'un d'entrée, l'autre de sortie; dans le cas de l'arrachement, il n'y a qu'un polygone.

---

(1) Cette Note est extraite du *Traité de Géométrie descriptive* par M. ERNEST LEBON.

Nous remercions les Éditeurs de cet Ouvrage, MM. DELALAIN FRÈRES, d'avoir mis leurs clichés à notre disposition.

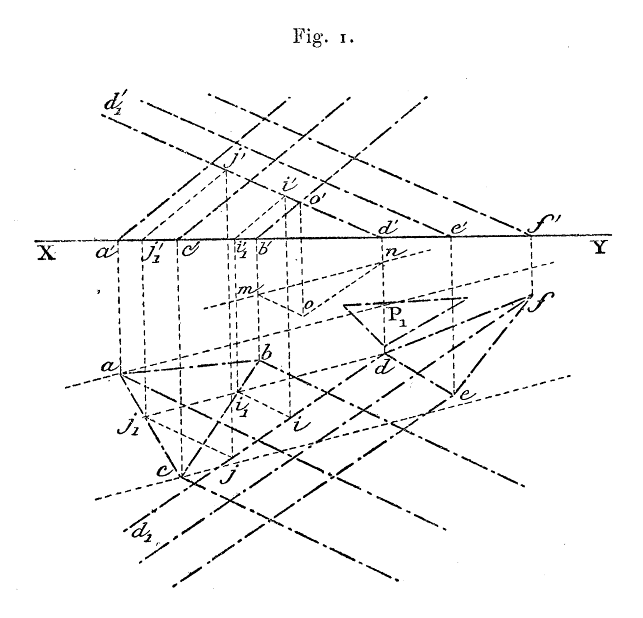
G.-V. et F.

Prismes et pyramides.

3. Quand il s'agit de prismes et de pyramides dont on connaît les bases sur un des plans de projection, le plan horizontal, par exemple, voici comment on détermine à l'avance s'il y a pénétration ou arrachement, et comment on obtient les sommets de l'intersection.

Pour deux prismes (*fig.* 1), on fait passer par un point o, o' deux droites om, $o'b'$ et on, $o'd'$ parallèles à leurs arêtes, et on construit la trace horizontale mn du plan ainsi déterminé. Tout plan sécant auxiliaire parallèle à ce plan coupe les faces des prismes selon des génératrices de ces deux surfaces. Puis,

Fig. 1.

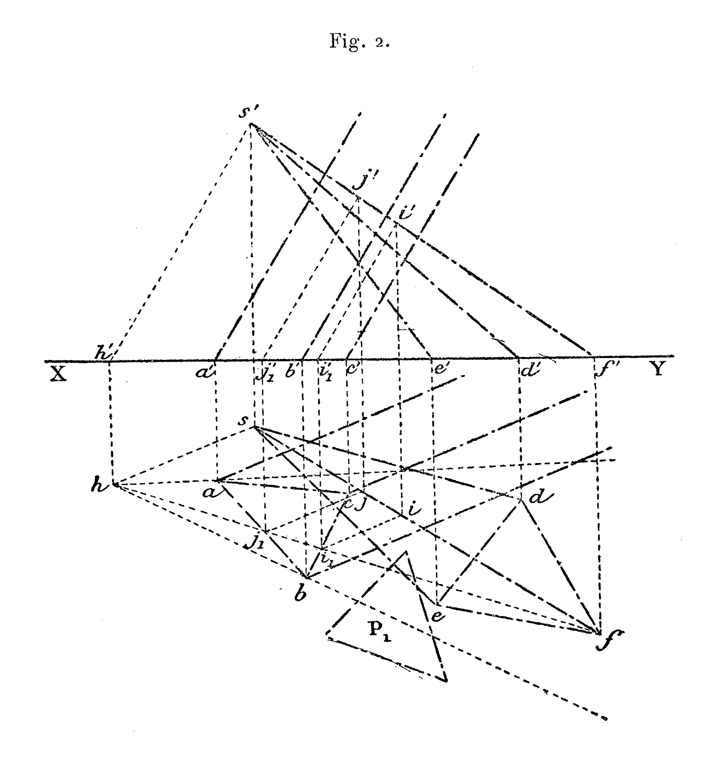


par les sommets extrêmes de chaque base, on mène des parallèles à mn : ces droites sont les traces de plans sécants auxiliaires *limites*. Si l'on trouve que l'une des bases def est comprise entre les parallèles partant des sommets de l'autre base abc, c'est qu'il y a pénétration du prisme de base DEF dans le prisme de base ABC; mais, si le second prisme avait pour base P_1, il y aurait arrachement. Pour obtenir les projections d'un point de l'intersection des prismes, on mène par la trace d d'une arête du prisme DEF une parallèle di_1j_1 à mn; c'est la trace horizontale d'un plan auxiliaire coupant deux faces du

prisme ABC suivant les génératrices $i_1 i$, $i'_1 i'$; $j_1 j$, $j'_1 j'$; les points d'entrée et de sortie de l'arête considérée dd_1, $d'd'_1$ du prisme DEF dans le prisme ABC se projettent aux points i, i' et j, j', où les génératrices rencontrent l'arête.

Pour un prisme et une pyramide (*fig.* 2), on mène par le sommet S de la pyramide SDEF une parallèle sh, $s'h'$ aux arêtes du prisme de base ABC. Tout plan sécant auxiliaire passant par cette parallèle coupe les faces du prisme selon des parallèles à ses arêtes, et les faces de la pyramide selon des droites passant

Fig. 2.

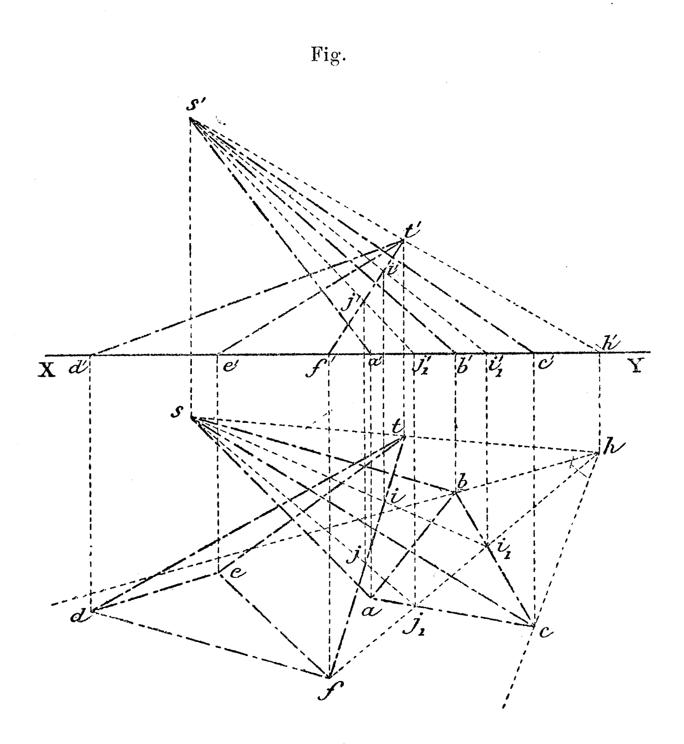


par son sommet. Les droites partant de sa trace horizontale h et aboutissant aux sommets extrêmes de chacune des bases sont les traces horizontales de plans sécants auxiliaires *limites*. Ici il y a pénétration. Si la base de la pyramide était P_1, il y aurait arrachement. Pour obtenir les projections d'un point de l'intersection des deux surfaces, on mène par la trace f d'une arête de la pyramide S une droite hf : c'est la trace horizontale d'un plan sécant auxiliaire coupant deux faces du prisme de base ABC suivant des génératrices; on a ainsi les points i, i' et j, j' sur l'arête sf, $s'f'$ de la pyramide.

Pour deux pyramides (*fig.* 3), on mène la droite *st*, *s′t′*, qui joint leurs sommets, et on détermine sa trace horizontale *h*. Les plans sécants auxiliaires passent par cette droite. Les traces *hb* et *hc* des plans sécants auxiliaires *limites* comprenant la base *def*, il y a ici pénétration. Un plan auxiliaire de trace horizontale *hf* donne les deux points *i*, *i′* et *j*, *j′* sur l'arête *tf*, *t′f′*.

4. Si le plan des bases des prismes et pyramides est quelconque, on opère relativement à ce plan comme nous venons de le faire par rapport au plan hori-

Fig.



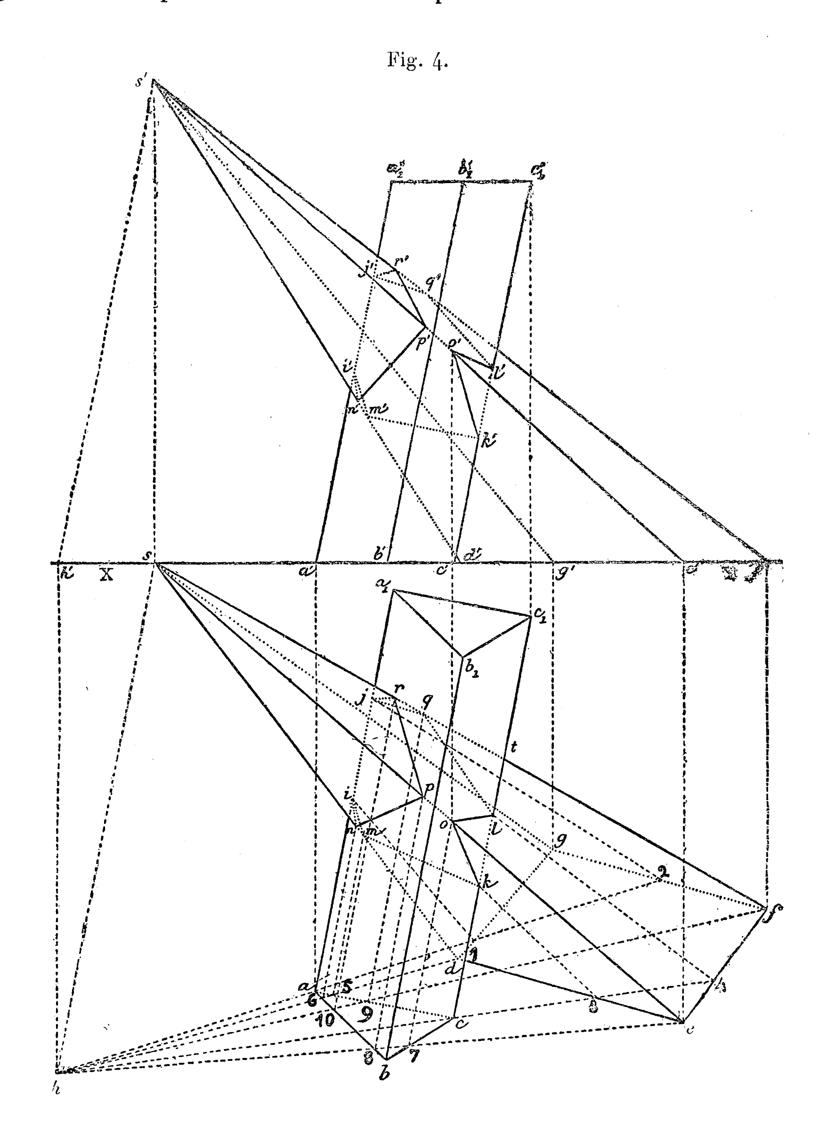
zontal. Si les bases des prismes et pyramides sont données dans deux plans différents, on détermine les droites d'intersection avec ces plans du plan parallèle aux arêtes des prismes, ou les points d'intersection avec ces plans soit de la parallèle aux arêtes du prisme menée par le sommet de la pyramide, soit de la droite passant par les sommets des pyramides. Ensuite on cherche les droites d'intersection des plans sécants auxiliaires et des plans donnés : il suffit de mener dans l'un des plans des bases l'une de ces droites auxiliaires; elle coupe l'intersection des plans des bases en un point où passe la droite auxiliaire correspondante. Les constructions sont simples quand les bases sont données dans les plans de projection.

EXEMPLE.

5. *Trouver l'intersection d'un prisme et d'une pyramide.*

Soient le prisme $abca_1b_1c_1$, $a'b'c'a'_1b'_1c'_1$ (*fig.* 4) et la pyramide $sdefg$, $s'd'e'f'g'$. On mène par le sommet s, s' la parallèle sh, $s'h'$ aux arêtes du prisme;

Fig. 4.

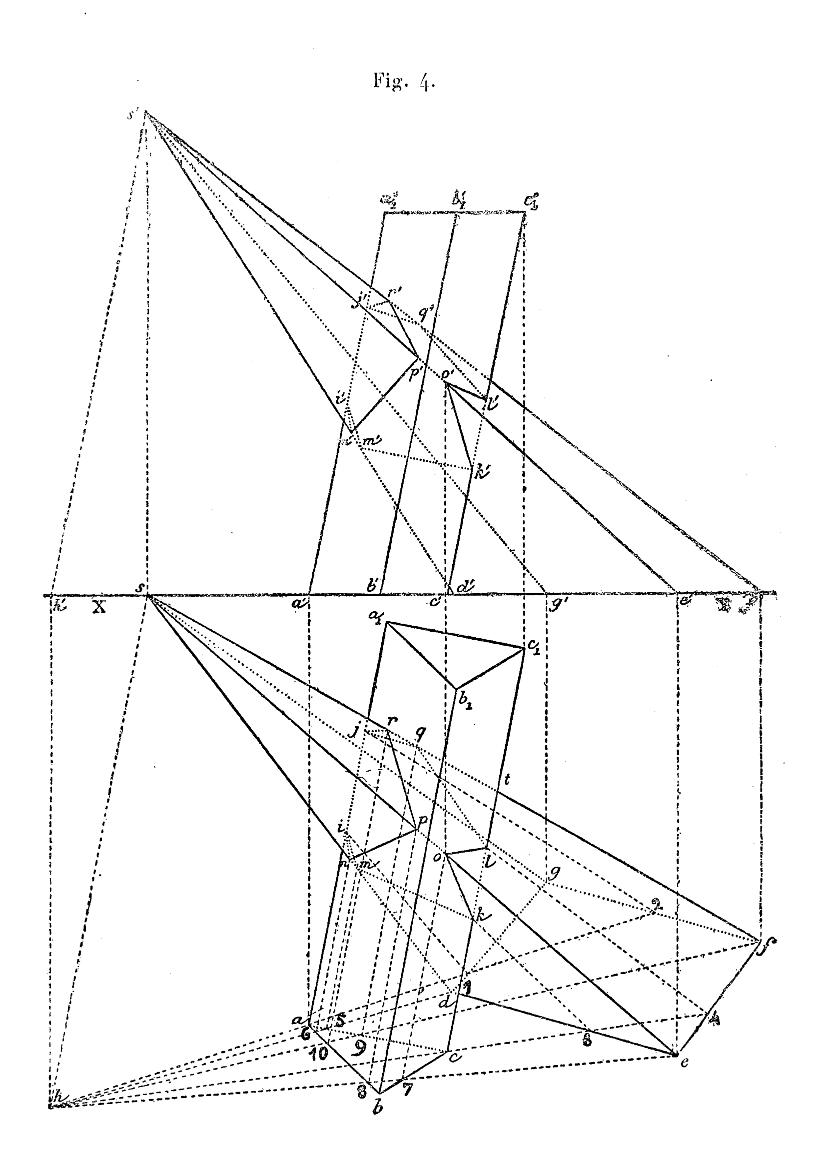


sa trace horizontale est h. Les traces hb et hg des plans sécants limites ne coupant pas les bases $defg$ et abc, il y a arrachement. On cherche les points d'intersection des arêtes de chacun des polyèdres avec les faces de l'autre; leurs projections horizontales sont $i, j, k, l, m, n, o, p, q, r$.

Pour joindre convenablement par des droites les points obtenus, on cherche l'ordre des points d'intersection par le procédé suivant, appelé *procédé des mobiles*.

On suppose qu'un mobile μ parcourt le polygone d'intersection du prisme et

Fig. 4.



de la pyramide, et que deux mobiles μ_1 et μ_2 parcourent les contours de leurs bases, ou leurs directrices. Les mobiles μ_1 et μ_2 sont les projections de μ, le mode de projection étant : pour μ_1 oblique et parallèle aux arêtes du prisme;

pour μ_2 central et ayant pour centre le sommet de la pyramide (¹). Les positions successives du mobile μ sont les points d'intersection des génératrices des deux surfaces passant par les positions des mobiles μ_1 et μ_2, lorsque ceux-ci parcourent les directrices de manière à se trouver en même temps dans un plan sécant auxiliaire.

Quand le mobile μ_1 est en 8 et que le mobile μ_2 est en e, le mobile μ est en p.

Le mobile μ_2 peut parcourir la directrice de la pyramide dans un sens quelconque, par exemple, dans le sens $ed1$; mais le mobile μ_1 ne peut parcourir la directrice du prisme que dans le sens $8ac7$.

Quand μ_1 est en 6, μ_2 est en d et μ est en n;
— a, — 1 — i.

Comme il n'y a pas de points de l'intersection sur la portion de la pyramide qui correspond à la ligne brisée $1g2$, le mobile μ_2 parcourt la directrice de la pyramide dans le sens $1def2$, contraire au précédent; le mobile μ_1 continue à parcourir la directrice du prisme dans le sens $8ac7$.

Quand μ_1 est en 5, μ_2 est en d et μ est en m;
— c, — 3 — k;
— 7, — e — o.

A présent le mobile μ_1 est obligé de parcourir la directrice du prisme dans le sens $7ca8$, et le mobile μ_2 continue à parcourir la directrice de la pyramide dans le sens de $1def2$.

Quand μ_1 est en c, μ_2 est en 4 et μ est en l;
— 9, — f — q;
— a, — 2 — j.

Maintenant le mobile μ_2 est obligé de parcourir la directrice de la pyramide dans le sens $2fed1$, et le mobile μ_1 continue à parcourir la directrice du prisme dans le sens $7ca8$.

Quand μ_1 est en 10, μ_2 est en f et μ est en r;
— 8, — e — p.

Le mobile μ, qui a toujours parcouru l'intersection dans le même sens, est revenu en son point de départ p; donc les projections du polygone d'intersection, qui est fermé, sont

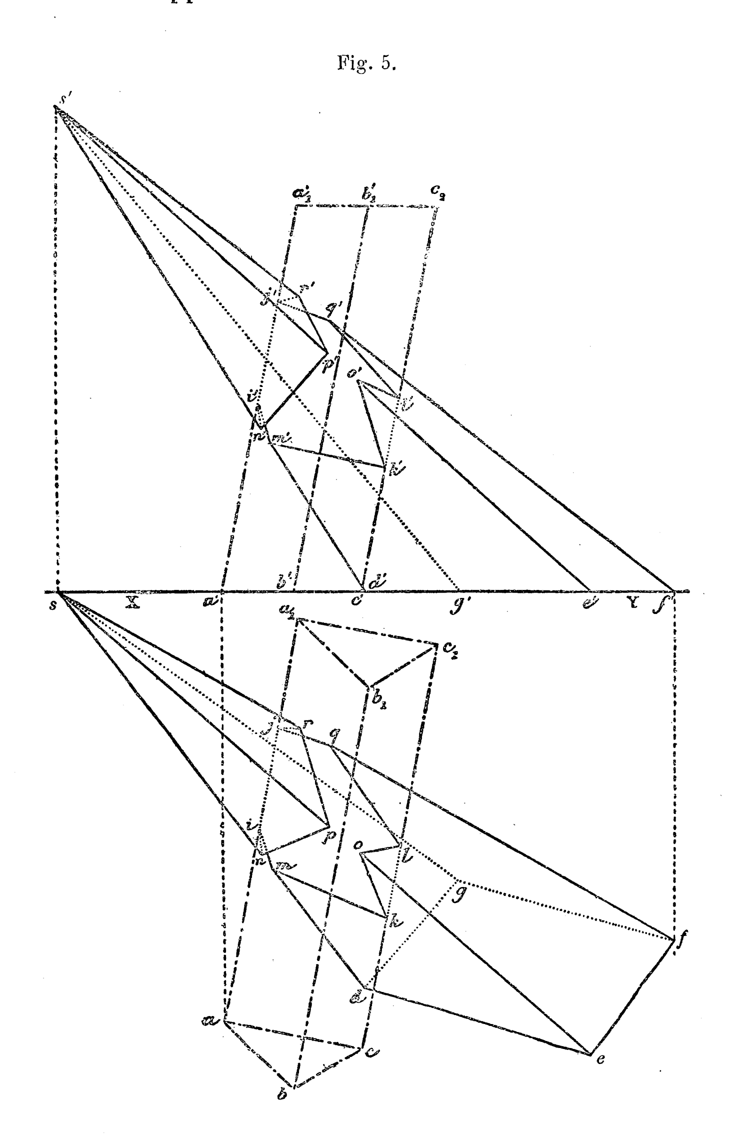
$$p\,n\,i\,m\,k\,o\,l\,q\,j\,r\,p,$$
$$p'\,n'\,i'\,m'\,k'\,o'\,l'\,q'\,j'\,r'\,p'.$$

6. Sur la *fig.* 4, la distinction des parties vues et des parties cachées est faite en supposant que les surfaces opaques des deux polyèdres existent à la fois. Alors

(¹) Dans cet article, nous désignons, pour abréger, les points et les lignes par les lettres de leurs projections horizontales.

une projection du point d'intersection d'une arête et d'une face est vue quand les projections de même nom de celles-ci sont vues. Ainsi, sur le plan horizontal, le point *o* est vu, car il appartient à une arête *se* et à une face bcc_1b_1 vues; le point *q* est caché, car il appartient à une face cachée acc_1a_1. L'arête *sf* est vue du

Fig. 5.



point *f* au point *t*, où elle rencontre cc_1; puis cachée de *t* en *r*, *tq* étant sous le prisme, et *qr* à l'intérieur de ce polyèdre; et enfin elle est vue de *r* en *s*.

7. Sur la *fig.* 5, nous avons supposé que le prisme est enlevé, et représenté le corps opaque ou le solide restant de la pyramide après avoir enlevé le prisme. Les lignes vues précédemment restent vues; le prisme a creusé dans la

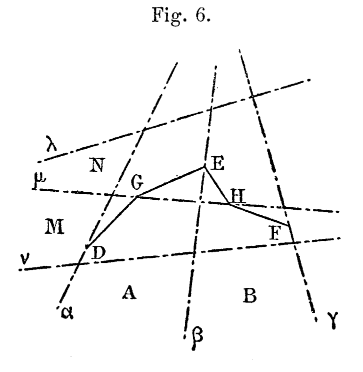
pyramide un trou, dont la surface est une partie de celle du prisme; un côté tel que *lq* est vu, car il joint deux points vus *l* et *q* de la pyramide; la droite *kl*, projection horizontale d'une arête cachée de la surface prismatique du trou, est cachée ([1]). On reconnaît qu'une projection d'un point est vue quand le rayon visuel que l'observateur, situé à l'infini, dirige selon la projetante correspondante du point considéré n'a pas coupé la surface du polyèdre conservé avant de passer par ce point.

Polyèdres quelconques placés d'une manière quelconque.

8. Quand les deux polyèdres qui se coupent sont quelconques et ont une position quelconque, on obtient les sommets du polygone de leur intersection au moyen des plans projetant les arêtes.

Considérons deux surfaces polyédriques P et Q (*fig.* 6). L'une P est formée

Fig. 6.

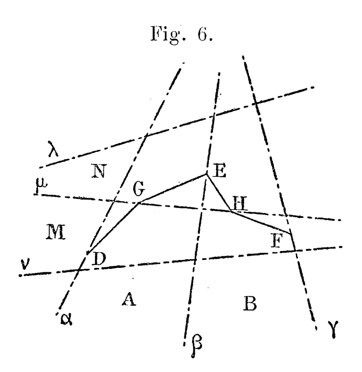


de deux faces A et B, comprises entre les arêtes α, β et γ, adjacentes selon l'arête β; l'autre Q est formé de deux faces M et N, comprises entre les arêtes λ, μ et ν, adjacentes selon l'arête μ. Supposons que α rencontre M au point D, que β rencontre N au point E, que γ rencontre M au point F, que μ rencontre A au point G et B au point H, et que D, E, F, G, H sont les seuls points d'intersection des arêtes et des faces de P et de Q. En partant du point D, on voit que la droite DG est un côté de l'intersection appartenant aux faces A et M; que la droite GE est le second côté appartenant à la même face A de P et à la face suivante N de Q; que la droite EH est le troisième côté appartenant à la même face N de Q et à la face suivante B de P, et que la droite HF est le quatrième côté appartenant à la même face B de P et à la face suivante M de Q. La ligne d'intersection cherchée est DGEHF.

([1]) Les portions d'arêtes supprimées sont dessinées en traits mixtes quand leur longueur est suffisante.

On peut aussi opérer autrement. On détermine d'abord les points d'intersection D, E, F des arêtes de P avec les faces de Q. On considère ensuite les deux points D et E appartenant à deux arêtes consécutives α et β de P. Si ces points étaient situés sur une même face de Q, la droite DE serait un côté de l'intersection. Si, comme cela a lieu ici, les points D et E sont situés sur deux faces consécutives M et N de Q, il faut déterminer l'intersection G de leur arête com-

Fig. 6.



mune μ avec la face A de P comprise entre les arêtes α et β; les côtés de l'intersection sont les droites DG et GE. De même, les points E et F étant situés sur deux faces consécutives de Q, on cherche le point d'intersection H de leur arête commune μ avec la face B de P comprise entre β et γ; les côtés suivants de l'intersection sont EH et HF.

EXEMPLE.

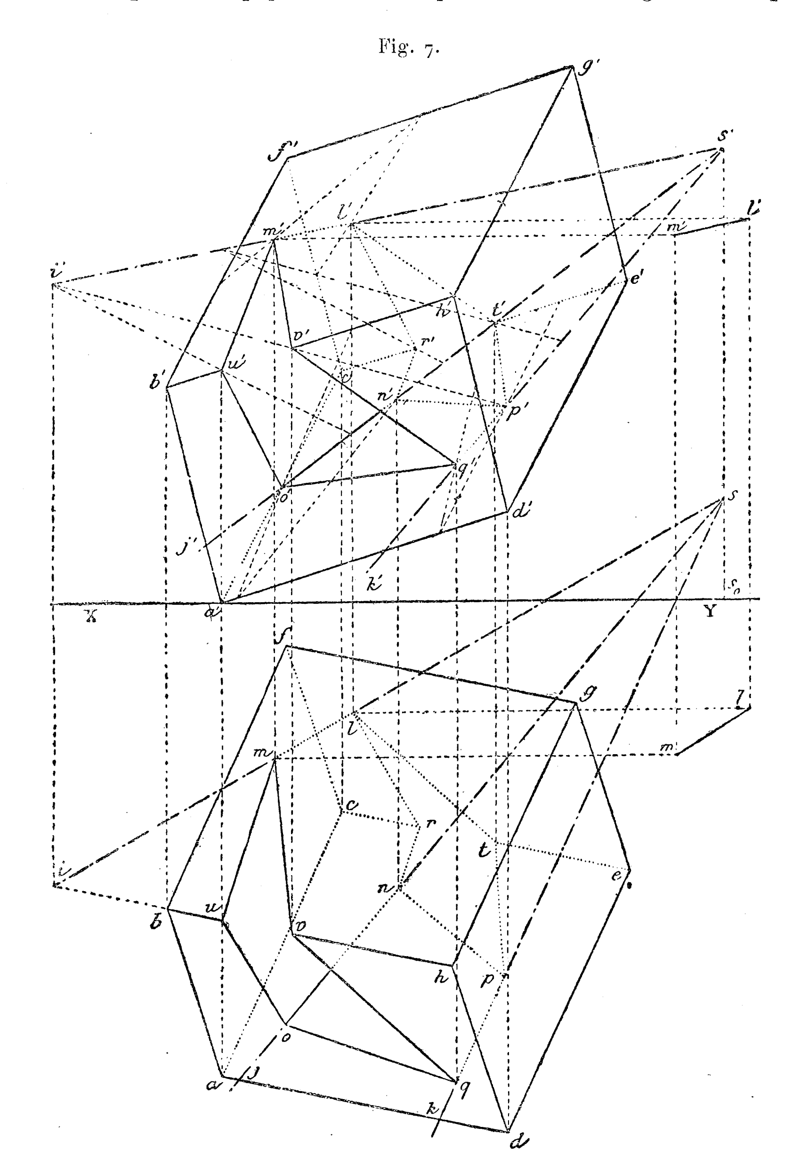
9. *Trouver l'intersection d'un parallélépipède et d'une pyramide ayant chacun une position quelconque dans l'espace.*

Nous définissons le parallélépipède en donnant les projections des arêtes AB, AC, AD (*fig.* 7), et nous considérons une surface pyramidale triangulaire indéfinie SIJK, dont les arêtes latérales sont SI, SJ et SK. Nous déterminons d'abord les points d'intersection l, l'; m, m'; n, n'; o, o'; p, p'; q, q' des faces du parallélépipède par les trois arêtes latérales de la pyramide, en employant les plans qui les projettent horizontalement; puis nous remarquons que les points l' et n' des arêtes $s'i'$ et $s'j'$ [1] sont situés dans deux faces $c'e'g'f'$ et $c'e'd'a'$ du parallélépipède adjacentes selon $c'e'$; il faut donc déterminer l'intersection r' de l'arête $c'e'$ et de la face $i's'j'$: nous avons ainsi les côtés $l'r'$ et $r'n'$ de l'intersection. La droite $n'p'$ est un côté dans la même face $c'e'd'a'$ du parallélépipède et dans la face suivante $j's'k'$ de la pyramide. Les points p' et l' sont situés dans la face $i's'k'$ de la pyramide et dans les deux faces $c'e'd'a'$ et $c'e'g'f'$ du parallé-

(1) Pour abréger, nous désignons les points, les arêtes et les faces par les lettres de leurs projections verticales.

lépipède adjacentes selon $c'e'$; il faut donc trouver l'intersection t' de l'arête $c'e'$ et de la face $i's'k'$: nous avons ainsi les côtés $p't'$ et $t'l'$ de l'intersection. Le polygone fermé $l'r'n'p't'l'$ est la projection verticale du polygone d'entrée de la pyramide dans le parallélépipède. Des explications analogues aux précédentes

Fig. 7.

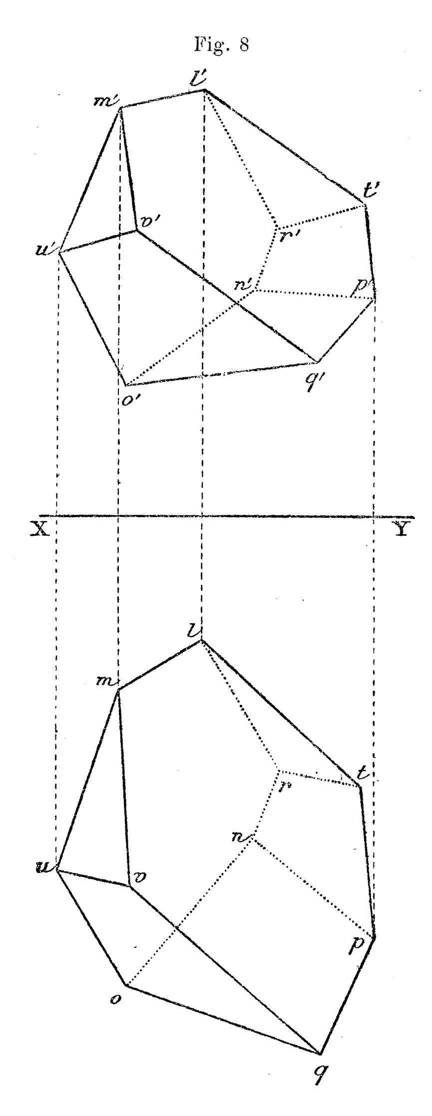


font trouver la projection verticale du polygone de sortie $m'u'o'q'v'm'$. On obtient aisément les projections horizontales de ces deux polygones. Il y a pénétration. La représentation est faite en supposant que la pyramide est enlevée, et que le parallélépipède est un polyèdre plein. Nous avons déjà expliqué com-

ment on reconnaît les parties vues et les parties cachées de chaque projection.

10. Nous avons dessiné à part (*fig.* 8) les projections du corps opaque ou du solide commun aux deux polyèdres; il suffit, pour les obtenir sur la même épure, de prendre sur des parallèles à XY (*fig.* 7) des longueurs égales *ll*,

Fig. 8



l'l'; *mm*, *m'm'*, etc. Les arêtes du solide commun sont des portions d'arêtes des deux polyèdres et les droites d'intersection de leurs faces; les faces de ce solide sont des portions de faces des deux polyèdres. Les contours des projections du solide commun sont vus; on sait comment on reconnaît qu'une projection d'un point est vue.

LIVRE DEUXIÈME.

CYLINDRES, CONES ET SURFACES DE RÉVOLUTION.

CHAPITRE PREMIER.

COURBES PLANES ET SURFACES COURBES.

Courbes planes.

85. Une ligne est le lieu des positions d'un point mobile; elle est plane quand le point se meut dans un plan fixe. Nous ne nous occuperons dans ce Chapitre que des lignes planes.

En général, quand la loi du mouvement ne change pas, la ligne ne présente ni angle ni point d'arrêt ([1]); elle se développe indéfiniment comme une droite, ou se replie sur elle-même comme un cercle.

86. Considérons (*fig.* 65) une droite MN qui coupe une ligne courbe en deux points, et faisons-la tourner autour de l'un d'eux M; le second point de section N prendra successivement les positions n, n_1, n_2, n_3, ... On conçoit qu'il y aura un moment où le point N sera confondu avec M; la droite dans cette position unique est dite *tangente;* elle n'a qu'un point de commun avec la partie considérée de la courbe.

Deux courbes sont dites *tangentes en un point* quand elles ont la même tangente en ce point.

87. En général, les tangentes en deux points voisins A et B sont d'un même côté de la courbe qui est celui de la *convexité;* cependant il peut arriver qu'elles soient de côtés différents, comme cela a lieu sur la *fig.* 66. Dans ce cas, il y a entre A et B un point d'*inflexion* M où la tangente est en partie d'un côté et en partie de l'autre.

([1]) Quelques courbes exceptionnelles ne sont pas soumises à cette règle; ainsi la perspective de la logarithmique a deux points d'arrêt à distance finie, et la logarithmique elle-même en a deux à distance infinie. Mais nous ne devons pas nous occuper de ces singularités, qui n'ont aucune importance pour les questions que nous avons à examiner.

Si l'on suppose que la droite Bb se transporte en restant toujours tangente à la courbe, mais en des points de plus en plus rapprochés de M, le point de section b se rapprochera du point de contact B, et viendra se confondre avec lui en M. On voit que, à un point d'inflexion, un point de contact et un point de section sont réunis, et que, par suite, il faut considérer la courbe comme ayant avec sa tangente un contact plus intime que dans le cas ordinaire.

A un point d'inflexion la tangente TT′ forme transition entre les sécantes qui coupent la courbe en trois points, telles que NP, et celles qui la rencontrent seulement au point M.

Lorsque la droite Bb se meut en restant tangente à la courbe, elle tourne dans un certain sens jusqu'à ce que le contact ait lieu en M; elle prend ensuite des positions parallèles à celles qu'elle vient de quitter. La tangente d'une courbe en un point d'inflexion fait donc avec une droite quelconque du plan un angle plus petit ou plus grand que les tangentes aux points voisins; cette circonstance peut servir à la déterminer (art. **145**).

88. Il arrive quelquefois qu'une courbe présente un *rebroussement* (*fig.* 67 ou 68). Il faut concevoir que la vitesse du point mobile qui décrit la ligne diminue graduellement, devienne nulle en un point M, puis prenne une direction de sens contraire, de manière que la position de la tangente varie d'une manière continue. Le rebroussement est de première ou de seconde espèce, suivant que les deux bras sont ou non d'un même côté de la tangente MT.

89. Une courbe telle que MA (*fig.* 69) présente un *nœud* ou *point double* en M.

Quand une courbe varie de forme d'une manière continue, un rebroussement se présente quelquefois comme une *feuille* MA réduite à un point. La ligne qui a un rebroussement est alors une transition entre les lignes qui ont un nœud et celles qui n'en ont pas.

En général, on appelle *point multiple* un point par lequel passent plusieurs arcs d'une même courbe.

90. Lorsqu'une courbe a un point double, toute droite située dans son plan et passant à ce point peut, *à un certain point de vue*, être regardée comme tangente, car c'est une sécante dont les deux points de rencontre se sont réunis en un seul. Mais nous réserverons le nom de *tangente* pour les droites qui touchent l'une ou l'autre des branches considérées isolément.

Quand on est assuré qu'une courbe ne présente ni nœud ni rebroussement, on peut obtenir une tangente en faisant mouvoir une sécante d'une manière quelconque, jusqu'à ce que deux points de section viennent se confondre avec le point que l'on considère sur la courbe. Cette méthode est souvent plus commode que celle que nous avons indiquée à l'article **87**.

91. La droite est la plus simple des lignes qui s'étendent à l'infini.

Considérons une droite AB (*fig.* 70) et une sécante Pm, puis faisons tourner

cette dernière ligne autour d'un de ses points P, de manière que le point de rencontre m prenne successivement différentes positions m_1, m_2, ..., en s'éloignant indéfiniment vers la gauche; dans une certaine position la sécante sera parallèle à AB : le point de rencontre, toujours unique, sera alors à l'infini sans qu'on puisse le supposer plutôt d'un côté que de l'autre. Si la sécante continue son mouvement de rotation, le point revient de l'infini par la droite de la figure.

On voit qu'on peut considérer une droite comme une courbe fermée, dans laquelle un point situé à l'infini forme la jonction des deux bras qui s'étendent dans les directions opposées.

Quand une courbe se développe indéfiniment, elle a ainsi un point situé à l'infini, et elle ne s'arrête pas plus à ce point qu'à tout autre; un second bras distinct du premier doit s'étendre vers le même point situé à l'infini.

Une courbe a autant de branches infinies qu'elle a de points situés à l'infini. Chaque branche est formée de deux bras qui se rejoignent à l'infini.

92. Nous avons dit (art. **85**) qu'une courbe ne présentait pas d'angle, c'est-à-dire que les deux parties n_3M et NM (*fig.* 65), qui se réunissent en un point quelconque M, ont la même tangente MT. En d'autres termes, les sécantes MN et Mn_3 se confondent, lorsque les points N et n_3 sont réunis en M. Quand le point M est à l'infini, la tangente commune des deux bras RC, QE qui s'y rejoignent (*fig.* 71) est appelée *asymptote*.

Il arrive quelquefois que la tangente d'une courbe au point situé à l'infini se trouve tout entière à l'infini; on dit alors que la courbe n'a pas d'asymptote.

On obtient une asymptote, comme toute autre tangente, en considérant une sécante RN, et en la faisant mouvoir de manière que les points de section R et N arrivent ensemble à l'infini. On peut prendre deux points R et Q sur les deux bras et les réunir à l'infini, en les éloignant indéfiniment en sens opposé; au moment où ils se confondent, la sécante RQ devient asymptote.

Quelques courbes présentent des points multiples et des rebroussements à l'infini; nous étudierons ces circonstances plus loin. Nous nous bornerons à dire ici que, pour les lignes de ce genre, on n'est pas assuré d'avoir une asymptote en faisant mouvoir une sécante de la manière que nous venons d'indiquer. Il faut pouvoir considérer une droite GH qui rencontre la courbe au point situé à l'infini, et la transporter parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'un point de section P rejoigne celui-là.

93. On considère quelquefois des courbes qui se modifient graduellement, telles qu'un cercle dont le rayon varie et dont le centre parcourt une ligne. Quand la courbe n'a ni point multiple ni rebroussement, et qu'elle n'éprouve dans sa forme aucun changement brusque, une sécante fixe ou mobile devient tangente dès que deux points de section se confondent en un seul. Si la réunion a lieu à l'infini, la droite est asymptote.

94. Considérons le cercle déterminé par les conditions de toucher en un point M une courbe $\alpha\beta$ (*fig.* 72), et de passer par un autre point N de cette ligne. Si l'on suppose que le point N se déplace, le cercle se modifiera; il aura un contact plus intime avec la courbe, lorsque ce point de section sera réuni au point de tangence M. On dit alors que le cercle est *osculateur*.

L'arc MN n'existant plus, le cercle est du côté de la convexité de la courbe sur la gauche du point M (*fig.* 73), tandis que sur la droite il est toujours resté du côté de la concavité : il la traverse donc en M sans cesser d'avoir la même tangente. Cette propriété est caractéristique du cercle osculateur, car, si le point N continuant son mouvement passe à droite de M (*fig.* 72), l'arc du cercle compris entre eux se trouvera du côté de la partie convexe de la courbe.

Si l'on considère la série des cercles qui passent par un point d'une droite, et qui ont leur centre sur cette ligne, on verra que l'un d'eux, celui qui a son centre à l'infini, se transforme en une ligne droite. Il peut donc arriver que la tangente remplace le cercle osculateur et en ait les propriétés; elle traverse alors la courbe, et il y a inflexion (art. **87**).

A un point de rebroussement de première espèce le rayon du cercle osculateur est généralement nul; on le reconnaît facilement en considérant un rebroussement comme une feuille réduite à un point.

Le cercle osculateur peut se trouver exceptionnellement d'un même côté de la courbe, près du point de contact. Cela arriverait si, quand le point N se confond avec M (*fig.* 72), le point P s'y réunissait aussi.

95. Considérons sur une courbe deux points M et G (*fig.* 74) peu éloignés l'un de l'autre, et les droites MO et GO qui sont perpendiculaires aux tangentes, c'est-à-dire *normales;* en divisant l'arc MG par le nombre abstrait qui indique la grandeur de l'angle MOG, l'angle droit étant représenté par la moitié du rapport de la circonférence au diamètre, nous aurons une longueur qui, si la courbe était un cercle, serait égale au rayon. Supposons maintenant que le point G se rapproche indéfiniment de M : plus l'arc MG sera petit, moins il différera de l'arc correspondant à l'angle MOG dans le cercle osculateur en M, et la limite du rapport $\frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{MOG}}$ sera le rayon de ce cercle. L'angle MOG est égal à celui des tangentes en M et en G; on l'appelle *angle de contingence* quand on le considère à la limite. On dit alors qu'il est *infiniment petit*, et que le point G est *infiniment voisin* du point M.

Le cercle osculateur fait apprécier la *courbure* d'une ligne en un point : plus son rayon est grand, plus la courbure est petite. D'après cela, le centre du cercle osculateur est souvent appelé *centre de courbure*, et son rayon *rayon de courbure*.

96. Si une courbe roule sur une autre courbe en lui restant toujours tan-

gente, lorsque l'arc compris entre un des points où elles se coupent et le point de contact devient nul, il y a osculation ou tangence du second ordre, et les courbes se traversent. Si deux points de section se réunissent en même temps au point de contact, la tangence s'élève au troisième ordre, et les courbes ne se traversent pas.

Dans l'osculation, les courbes ont trois points communs réunis en un seul; dans la tangence du troisième ordre elles en ont quatre, et ainsi de suite, car on considère quelquefois des contacts d'un ordre plus élevé.

97. Une ligne regardée comme la solution d'un problème spécial peut avoir des points d'arrêt; ainsi le diamètre d'un cercle, lieu des milieux d'une série de cordes parallèles, est une droite limitée aux points où elle rencontre la circonférence; ainsi encore la projection horizontale d'un cercle situé dans un plan vertical est un segment de droite.

Les parties d'une ligne qui forment la solution d'un problème spécial dont on s'occupe sont appelées *utiles*, et les autres *parasites*.

98. Une courbe est *géométrique* quand elle est soumise dans sa génération à une loi déterminée; on la dit *graphique* lorsqu'elle a été tracée d'après des conditions qui ne sont pas susceptibles d'être mathématiquement définies, telles que celle d'avoir une forme gracieuse. Les considérations que nous venons de présenter ne sont complètement applicables qu'aux courbes géométriques.

Une courbe graphique n'existe que là où elle est tracée; elle n'a donc ni partie parasite ni branche infinie. Elle peut avoir des points d'arrêt et des angles; mais dans les parties où sa courbure paraît bien continue, on doit la considérer comme une courbe géométrique, et les considérations que nous avons développées pour les tangentes et les rayons de courbure lui sont applicables.

Certaines lignes participent de la nature des deux genres de courbes dont nous venons de parler : ce sont celles que l'on obtient en projetant les courbes graphiques, ou en leur faisant éprouver diverses autres transformations géométriques. Nous nous bornons, quant à présent, à signaler ces lignes.

99. Le cercle est la seule courbe géométrique qu'il soit facile de tracer d'un mouvement continu. Il existe pour quelques autres lignes des compas fort ingénieux, mais il y a presque toujours quelques difficultés à les ajuster et à les placer dans la position convenable pour l'arc que l'on veut avoir : aussi les instruments de ce genre ne sont que très peu employés.

En général, pour tracer une courbe géométrique, on détermine d'après la loi de sa génération un nombre de points suffisant pour que sa forme soit bien déterminée, puis on les réunit par un trait continu que l'on corrige jusqu'à ce qu'il présente une apparence satisfaisante. C'est un travail auquel il est essen-

tiel de former son œil et sa main, lorsqu'on veut s'occuper des arts graphiques. Toutes les fois que la forme de la courbe n'est pas nettement accusée, il faut chercher de nouveaux points, ou mieux encore construire des tangentes. En général, on doit éviter de trop multiplier les points : de petites erreurs peuvent s'introduire dans leur position, par suite de l'imperfection des tracés, et alors, si leur nombre était très grand, on serait conduit à donner à la ligne une courbure ondulée qu'elle ne doit pas avoir.

Bien que dans les applications on ait rarement besoin de tracer sur de grandes longueurs les branches des courbes qui s'étendent à l'infini, il est cependant souvent nécessaire de déterminer les asymptotes, afin de bien comprendre la disposition des différentes parties.

100. Pour mener une tangente à une courbe graphique par un point donné hors de la courbe, on fait passer une règle par ce point, et on la fait tourner jusqu'à ce que son bord affleure la courbe. Sa position est alors bien déterminée.

On ne peut pas opérer d'une manière analogue quand c'est le point de tangence C qui est donné (*fig.* 75). La position limite de la règle présente alors beaucoup d'incertitude si la courbure de la ligne est un peu grande.

On prend sur la courbe deux ou trois points en deçà du point C et autant au delà, on trace les sécantes qui passent par ces divers points et par le point C, et on les coupe par un arc de cercle décrit du point C comme centre. On porte sur chaque sécante Ca, à partir de l'arc, une longueur $a\alpha$ égale à la corde AC, et de manière que le point α soit du même côté de a que le point A de C; enfin on trace une courbe par les points α, β, δ, ... ainsi obtenus : elle coupe l'arc de cercle en un point c qui appartient à la tangente, car la corde doit être nulle sur la droite Cc.

Si nous faisons tourner la droite ACa autour du point C, il pourra arriver que, dans une certaine position Pp, la corde PC soit égale au rayon du cercle abc. Le point α sera alors en C, et la droite ACa, ordinairement sécante de la courbe auxiliaire, lui sera devenue tangente.

Si la courbe coupait l'arc de cercle sous un angle trop petit, on pourrait la modifier en portant sur les sécantes des longueurs doubles des cordes.

Les courbes auxiliaires du genre de celles que nous venons d'employer sont appelées *courbes d'erreur*. Nous allons donner un autre exemple de ce mode de solution.

101. Lorsque l'on a tracé une tangente à une courbe graphique par un point extérieur, on a quelquefois besoin de déterminer son point de contact d'une manière plus précise qu'on ne pourrait le faire à la simple vue. Il existe pour cela une construction assez facile.

Nous menons des sécantes parallèles à la tangente TT' (*fig.* 76), et par les

points où elles rencontrent la courbe nous leur élevons de côtés différents des perpendiculaires sur lesquelles nous portons, à partir de la tangente TT′, des ordonnées égales aux cordes déterminées par la courbe donnée sur les sécantes. Ainsi les longueurs αa et $\alpha_1 a_1$ sont égales à AA_1. Les points a, b, c, c_1, b_1, a_1, étant déterminés d'après une même loi, appartiendront à une courbe qui passera évidemment par le point cherché, et qui sera continue si la proposée l'est elle-même.

La première sécante CC_1 doit être aussi rapprochée de la tangente que le permet la condition essentielle qu'il n'y ait pas d'incertitude sur la position précise des points où elle coupe la courbe. La seconde sécante BB_1 étant également peu éloignée de la première, il arrivera souvent que les quatre points b, c, c_1 et b_1 seront à peu près en ligne droite. La ligne aMa_1 serait même rigoureusement droite, si la proposée était symétrique par rapport à sa normale au point M.

La courbe d'erreur coupe la tangente TT_1 sous un angle dont la tangente trigonométrique est égale à 2.

Il n'est pas nécessaire que les ordonnées soient exactement perpendiculaires à TT_1; il suffit qu'elles soient bien parallèles [1].

102. On a souvent des moyens exacts pour tracer des tangentes aux courbes géométriques; dans tous les cas, on peut appliquer à ces lignes les procédés que nous venons de faire connaître pour les courbes graphiques.

S'il s'agit de mener une tangente à une courbe en un point (*fig.* 75), on appuiera la construction sur des points A, B, D, E qui auront été déterminés directement. Il ne sera pas nécessaire que la courbe soit tracée.

La construction exposée à l'article **101** pour avoir le point de contact d'une tangente (*fig.* 76) exige que la courbe soit tracée, ou au moins que l'on connaisse des points situés sur des parallèles à la tangente. La construction serait encore juste si les sécantes étaient soumises dans leur position à une même loi, mais on ne pourrait pas opérer sur des points A, B, C espacés d'une manière arbitraire.

103. On emploie quelquefois une courbe d'erreur pour déterminer, sur la normale d'une courbe, la position du centre du cercle osculateur, mais ces tracés exigent beaucoup de soin quand on veut opérer avec exactitude. On obtient le centre de courbure avec un degré de précision qui suffit généralement dans la pratique, en le supposant d'abord un peu loin sur la normale, et le rapprochant progressivement jusqu'à ce que le cercle tangent, d'abord complètement extérieur dans la partie voisine du point de contact, arrive à traverser la courbe.

104. Supposons que l'on prenne sur une courbe un certain nombre de points,

---

[1] En modifiant légèrement la construction que nous venons d'expliquer, on résout le problème qui consiste à *déterminer le point d'une courbe donnée où la tangente est parallèle à une droite donnée.*

et qu'on les considère comme les sommets d'un polygone; cette figure différera beaucoup de la courbe; mais, en multipliant progressivement le nombre des côtés, on diminuera la différence, et l'on conçoit que, si cette opération était poursuivie indéfiniment, le polygone se rapprocherait aussi indéfiniment de la ligne considérée. C'est ce que l'on exprime en disant qu'*une courbe est un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits*.

Cette considération permet d'étendre aux courbes les propriétés des polygones qui, comme les théorèmes de similitude, sont indépendantes du nombre et de la grandeur des côtés.

Nous voyons donc qu'il y a des courbes semblables entre elles : les grandeurs linéaires homologues y sont dans un même rapport; les cordes homologues comprennent les angles égaux. Quand ces cordes deviennent parallèles, les figures ont un centre commun de similitude et sont homothétiques (art. **68**).

105. La direction d'une ligne en un point est celle de sa tangente en ce point. L'angle de deux courbes qui se rencontrent est déterminé par l'angle de leurs tangentes au point commun. On les dit *normales* l'une à l'autre lorsqu'elles se coupent à angle droit.

Un *diamètre* est le lieu des milieux d'un système de cordes parallèles.

Un *axe* est un diamètre rectiligne perpendiculaire aux cordes qu'il partage en parties égales.

La projection d'un diamètre d'une courbe est évidemment un diamètre de la projection.

Surfaces courbes.

106. *Une surface est le lieu des positions d'une courbe qui se meut et qui varie de forme suivant des lois continues.* Cette courbe se nomme *génératrice*.

Une même surface peut être considérée comme engendrée par une courbe mobile et variable, d'une infinité de manières différentes.

Quand la génératrice est assujettie à rencontrer certaines courbes, ces lignes prennent le nom de *directrices*.

Les génératrices et les directrices ne sont pas toujours planes, mais nous les supposerons telles jusqu'à ce que nous ayons considéré les courbes qui ne sont pas comprises dans un même plan et que l'on appelle *gauches*. Cette restriction ne nous empêchera pas d'étudier les surfaces d'une manière générale, car on peut toujours les regarder comme engendrées par des courbes planes.

Nous supposerons enfin que la génératrice et les directrices sont des courbes géométriques.

107. Une surface peut avoir des parties parasites. Si l'on considère un plan comme étant engendré par une droite toujours tangente à un cercle, la surface

du cercle, quoique faisant partie du plan, ne sera pas comprise dans la définition.

Un cercle engendre une zone sphérique lorsqu'il tourne autour d'une droite qui rencontre la perpendiculaire élevée à son plan par son centre. Les parties de la sphère situées en deçà et au delà de la zone sont rattachées à cette génération comme parties parasites.

108. *Si trois courbes* A, B, C *qui se croisent en un point* M (*fig.* 77) *appartiennent à une même surface, leurs tangentes en ce point sont dans un même plan.*

Pour le prouver, nous considérons la courbe A comme appartenant à un système de génératrices situées dans des plans parallèles. L'une d'elles *a*, peu éloignée de A, rencontre les courbes B et C en des points *n* et *r*, et les trois sécantes M*n*, M*r* et *nr* sont dans un même plan. Ce résultat ayant lieu pour les diverses génératrices, tant en deçà qu'au delà de A, subsiste nécessairement pour la courbe A; les sécantes sont alors tangentes aux trois lignes considérées; leur plan est le *plan tangent* de la surface.

Il résulte de là qu'en un point d'une surface le plan déterminé par les tangentes à deux des courbes de la surface qui passent par ce point contient les tangentes de toutes les autres courbes.

Le raisonnement qui précède cesse d'être juste quand, au moment où son plan passe par le point M, la courbe génératrice *a* éprouve dans sa forme un changement tel qu'on puisse la considérer comme ayant alors, en ce point, une infinité de tangentes (art. **90**). C'est un cas que nous aurons l'occasion d'étudier.

Une droite tangente à une surface est une sécante dont deux points de section sont réunis en un seul. *Toute droite tangente à une courbe tracée sur une surface est tangente à la surface.*

La *normale* à une surface en un point est la perpendiculaire au plan tangent en ce point.

109. Il résulte du théorème que nous venons d'établir qu'une surface courbe peut être considérée comme composée de facettes, c'est-à-dire comme un polyèdre ayant un nombre infini de faces infiniment petites, et, par suite, que les surfaces courbes ont toutes les propriétés des polyèdres qui ne dépendent ni du nombre ni de la grandeur des faces.

Les théorèmes de similitude s'étendent donc immédiatement des polyèdres aux surfaces courbes.

CHAPITRE II.

DÉFINITION ET REPRÉSENTATION DES CYLINDRES ET DES CONES.

Définition, représentation et principales propriétés du cylindre.

110. *Un cylindre est une surface engendrée par une droite qui se meut en restant toujours parallèle à une même droite.*

Pour définir un cylindre, on donne une droite à laquelle la génératrice rectiligne doit rester parallèle, et une directrice qu'elle doit rencontrer. Une infinité de courbes différentes peuvent être considérées comme directrices d'un même cylindre, mais dans les premières études nous prendrons toujours une ligne tracée sur le plan horizontal.

111. *Connaissant la projection horizontale d'un point d'un cylindre, déterminer sa projection verticale.*

Soient A la trace du cylindre (*fig.* 79), (D, D′) une droite à laquelle les génératrices doivent être parallèles et m la projection donnée.

La génératrice de la surface qui passe par le point cherché a pour projection horizontale la droite mn parallèle à D, et perce le plan horizontal au point n de la trace A. La projection verticale de la génératrice est la parallèle à D′ menée par le point n'; il ne reste plus qu'à relever m en m' par une perpendiculaire à la ligne de terre.

La droite mn rencontre la droite A en un second point r, trace d'une autre génératrice dont un point se projette en m. On trouve ainsi une seconde solution m''.

112. Si la ligne menée par le point m parallèlement à D ne rencontrait pas la trace A, il n'y aurait pas de solution. D'après cela les deux droites P et Q tangentes à A et parallèles à D sont, sur le plan horizontal, la limite de la projection des points du cylindre, ou son *contour apparent*. Si l'on suppose que la surface limite un corps en relief, ces droites devront être tracées en trait plein.

Le point (m, m') est plus élevé que le point (m, m''), et, par conséquent, il le cache sur la projection horizontale. Les génératrices qui ont leur trace sur l'arc pkq sont ainsi vues, tandis que les autres sont cachées.

Il peut arriver que la trace du cylindre considéré ait plus de deux tangentes parallèles à D, qu'elle n'en ait qu'une, ou même pas du tout. On discutera chaque cas comme celui que nous venons d'examiner.

113. Si l'on se donnait la projection verticale m' (*fig.* 79) d'un point du

cylindre, par des raisonnements analogues et la même construction faite en ordre inverse, on déterminerait deux projections horizontales correspondantes m et m_1.

La projection verticale de la surface est limitée aux droites K′ et I′ parallèles à D′, et menées par les points k' et i' où les tangentes de A perpendiculaires à la ligne de terre rencontrent cette ligne.

Les génératrices qui ont leurs traces sur l'arc *kpi* sont seules vues sur la projection verticale.

114. Un cylindre est géométriquement défini par sa trace A et par une droite de parallélisme (D, D′); mais, pour qu'il soit représenté, il faut ajouter les lignes de contour apparent; elles donnent d'ailleurs la direction des génératrices, et rendent inutile une droite de parallélisme.

Le corps, s'il existe réellement, est limité, et pour le représenter il sera nécessaire d'avoir la projection de ses bases; mais nous ne nous occupons pas encore de ces questions.

115. *Le plan tangent à un cylindre en un point est tangent tout le long de la génératrice qui passe par ce point.*

Soient A et *a* (*fig.* 78) deux points quelconques d'une génératrice G; M et *m* deux courbes tracées par ces points, et G′ une autre génératrice de la surface.

Les droites G et G′, étant parallèles, déterminent un plan qui contient les sécantes U et *u* des courbes M et *m*. Si l'on suppose que la génératrice G′ se meuve sur la surface, en se rapprochant de G, les points B et *b* s'avanceront respectivement vers A et *a*, et se confondront avec eux quand G′ sera réuni à G. Les lignes U et *u* seront alors tangentes à M et à *m*, et leur plan, contenant la génératrice rectiligne qui est sa propre tangente en A comme en *a*, sera tangent en ces deux points. Il le serait de même en tout autre point de la droite G.

La proposition que nous venons d'établir ne cesse pas d'être vraie quand la directrice M est une courbe graphique, pourvu qu'elle n'ait en A qu'une seule tangente. Dans le cas contraire, il faut considérer la surface comme composée de deux cylindres qui se coupent suivant la génératrice A*a*, et dont chacun a son plan tangent.

116. *La tangente à la trace m* (*fig.* 80) *d'un cylindre sur un plan* P, *en un point a, est l'intersection, avec le plan* P, *du plan tangent le long de la génératrice* A*a*.

L'ensemble des droites qui projettent sur un plan P les différents points d'une courbe M forme un cylindre dont la trace *m*, sur le plan, est la projection de M.

Le plan projetant d'une tangente T est tangent au cylindre projetant de M, tout le long de la projetante du point de contact A, et par suite sa trace *t*, projection de T, est tangente à *m*. Il résulte de là que *la projection de la tangente à une courbe est tangente à la projection de la courbe.* Nous n'avons pas supposé que les génératrices du cylindre fussent perpendiculaires au plan de projection;

la proposition sera donc encore vraie, si les projetantes toujours parallèles entre elles sont inclinées sur ce plan. Nous devrons quelquefois employer ce genre de projection.

Quand la tangente à une courbe est perpendiculaire au plan de projection, elle y est représentée par un point. Si la courbe est plane, sa projection est alors une droite, et il n'y a pas à rechercher sa tangente.

La projection d'une normale à une courbe n'est pas, en général, normale à la projection de la courbe (art. **46**).

116 *a.* Pour obtenir les points où une droite perce un cylindre, on fait passer par la droite un plan parallèle aux génératrices du cylindre : ce plan coupe le cylindre suivant des génératrices qui rencontrent la droite aux points cherchés.

117. *Le cylindre est développable,* c'est-à-dire qu'on peut le dérouler sur un plan, sans contraction ni distension d'aucune de ses parties, mais par de simples flexions. Si la directrice est une courbe fermée, il faut supposer que le cylindre a été coupé au préalable le long d'une génératrice.

Pour démontrer cette propriété, considérons une surface de prisme, sans base (*fig.* 81); on peut concevoir que la face P tourne autour de l'arête B pour se placer dans le plan Q, et que ces deux faces réunies se mettent dans le plan R par une rotation autour de C. En continuant ce mouvement autour des différentes arêtes, on développera la surface.

Cette propriété, n'étant dépendante ni du nombre ni de la grandeur des faces, est encore vraie quand le polygone G devient une courbe (art. **109**); la surface est alors un cylindre.

118. Dans le développement du prisme, les côtés *ab*, *bc*, . . . d'un polygone quelconque G (*fig.* 81) tournent autour des droites A, B, . . . et par suite les angles que chacun d'eux forme avec les arêtes qui passent à ses extrémités ne sont pas altérés. Cette propriété s'étend naturellement au cylindre; les angles que la directrice ou toute autre courbe forme avec les génératrices ne sont pas modifiés lorsque l'on déroule la surface.

Les angles que deux courbes tracées sur un cylindre forment avec la génératrice de leur point de rencontre n'étant pas altérés dans le développement, l'angle qu'elles comprennent est égal à celui de leurs *transformées*.

Les génératrices restent parallèles entre elles comme les arêtes du prisme.

La section droite, c'est-à-dire l'intersection du cylindre par un plan perpendiculaire aux génératrices, devient une ligne droite.

Définition, représentation et principales propriétés du cone.

119. *Un cône est une surface engendrée par une droite qui se meut en passant par un point fixe que l'on nomme* sommet.

Un cône est défini par la position du sommet (s, s') (*fig.* 82), et par une directrice A que nous prendrons généralement sur le plan horizontal.

Quand la génératrice est une droite indéfinie, ses deux parties en deçà et au delà du sommet décrivent des *nappes* distinctes qui se réunissent à ce point.

120. Si l'on cherche la projection verticale d'un point situé sur le cône, et dont la projection horizontale m (*fig.* 82) est connue, en opérant comme il est expliqué à l'article **111** pour le cylindre, on trouvera sur le plan vertical deux points m' et m'', et l'on reconnaîtra que, sur le plan horizontal, toutes les projections des points de la surface sont comprises entre les droites P et Q menées du point s tangentiellement à la trace A. Ces lignes forment le contour apparent du cône sur le plan horizontal.

Lorsque du point s on ne pourra pas mener une tangente à la trace A, il n'y aura pas de contour apparent sur le plan horizontal, et tout point de ce plan sera la projection d'un point ou de plusieurs points de la surface.

A un point m', projection verticale d'un point du cône, correspondent sur le plan horizontal deux points m et m_1. Le contour apparent de la surface sur le plan vertical est donné par les droites K' et I' menées du point s' aux points k' et i' où les tangentes de A perpendiculaires à la ligne de terre rencontrent cette ligne.

En raisonnant comme à l'article **112**, on reconnaît quelles sont les génératrices vues sur l'un ou sur l'autre des plans de projection.

121. *Un plan tangent à un cône en un point est tangent tout le long de la génératrice qui passe par ce point.*

On démontre ce théorème, comme celui qui lui correspond pour le cylindre (art. **115**), en considérant deux génératrices G et G' (*fig.* 83), et faisant mouvoir la seconde sur la surface, jusqu'à ce qu'elle se confonde avec la première; alors les sécantes u et U de deux courbes m et M deviennent en même temps tangentes, et déterminent un même plan tangent aux points a et A.

121 *a.* Pour obtenir les points où une droite perce un cône, on fait passer un plan par la droite et par le sommet du cône : ce plan coupe le cône suivant des génératrices qui rencontrent la droite aux points cherchés.

122. On reconnaît que le cône est développable en considérant cette surface comme une pyramide ayant un nombre infini de faces. Les angles que les lignes tracées sur un cône font avec les génératrices, et entre elles, ne sont pas altérés par le développement.

Si l'on coupe un cône par une sphère ayant son centre au sommet, les longueurs interceptées sur les génératrices seront égales, et formeront en développement les rayons d'un arc de cercle qui sera la transformée de la courbe d'intersection.

123. On voit qu'il y a une grande analogie entre les propriétés du cône et celles du cylindre; c'est que le cylindre est un cône dont le sommet est trans-

porté à l'infini, et que, par suite, il possède toutes les propriétés du cône qui ne dépendent pas de la distance à laquelle se trouve le sommet.

Cône de révolution.

124. Le cône de révolution mérite une mention spéciale. Il est engendré par une droite G (*fig.* 84), qui tourne autour d'un axe B qu'elle rencontre en S, en faisant toujours un même angle avec lui.

Un point quelconque M de la génératrice décrit un cercle A dont le centre O est sur l'axe, et dont le plan P est perpendiculaire à l'axe.

Toutes les génératrices du cône font des angles égaux avec le plan P, car ce sont des obliques qui s'éloignent également du pied de la perpendiculaire. Aucune autre ligne passant par le sommet S ne peut faire le même angle avec le plan P.

125. La trace FE (*fig.* 84) du plan Q tangent au cône le long de la génératrice SM est tangente au cercle A du cône, et par conséquent perpendiculaire au rayon OM et à la génératrice SM. Ces lignes comprennent ainsi un angle égal à celui des plans P et Q.

Il suit de là que tous les plans tangents à un cône de révolution font, avec un plan perpendiculaire à l'axe, des angles égaux à ceux que forment les génératrices, et par conséquent égaux entre eux.

Tout plan passant par le sommet S, et faisant avec le plan P le même angle que les génératrices, est tangent au cône.

126. On emploie le cône de révolution par la solution de divers problèmes. Nous en donnerons immédiatement un exemple.

Déterminer les génératrices d'un cône qui font un angle donné avec le plan horizontal.

Soient (s, s') le sommet et A la trace horizontale du cône donné (*fig.* 85). Nous traçons la droite $s'e'$ faisant l'angle donné avec la ligne de terre, et la droite se parallèle à cette ligne. Les génératrices cherchées appartiennent à un cône de révolution dont l'axe est la verticale du point s, et dont la droite $(se, s'e')$ est une génératrice. La trace de ce cône est le cercle décrit du point s comme centre, avec se pour rayon. Ses rencontres p et q avec A font connaître les droites $(sp, s'p')$, $(sq, s'q')$ qui satisfont à la question.

On remarquera la manière dont ces lignes sont ponctuées, suivant leur position sur les nappes du cône.

Si l'arc décrit du point s comme centre, avec se pour rayon, ne rencontrait pas la trace du cône, le problème n'aurait pas de solution.

126 *a*. *Mener par un point (a, a') (fig. i, Pl. LV) une droite faisant respectivement avec le plan horizontal et avec le plan vertical de projection des angles donnés α et β.*

La droite cherchée appartient à deux cônes de révolution qui ont leur sommet

au point (a, a') et qui peuvent être déterminés par la construction indiquée à l'article **126**. Les axes de ces cônes sont respectivement perpendiculaires aux plans de projection. La droite $(ab, a'b')$, parallèle au plan vertical et faisant avec le plan horizontal l'angle α, est une génératrice du premier. L'horizontale $(ac, a'c')$, qui rencontre le plan vertical sous l'angle β, appartient au second. Nous ne considérerons d'abord sur chaque cône qu'une nappe.

Si nous coupons les deux cônes par une sphère ayant son centre à leur sommet commun, nous aurons deux cercles dont les points de rencontre détermineront des génératrices communes, c'est-à-dire des droites satisfaisant au problème.

Nous prenons la sphère qui a pour rayon $a'b'$: son intersection avec le premier cône est le cercle décrit sur le plan horizontal du point a comme centre, avec ab pour rayon.

Le cercle suivant lequel la sphère coupe le second cône est dans un plan de front. On en obtient un point (c, c') en portant sur la génératrice $(ac, a'c')$ une longueur égale au rayon $a'b'$ de la sphère. La projection horizontale du cercle est la droite cnm, parallèle à la ligne de terre; sa projection verticale, le cercle décrit du point a' comme centre, avec $a'c'$ pour rayon.

Les projections horizontales des cercles se coupent en m et en n, leurs projections verticales en m' et en n'. Ces points se correspondent de manière à déterminer deux rencontres, car les courbes sont sur une même sphère. Nous trouvons donc deux génératrices communes $(am, a'm')$ et $(an, a'n')$.

Si nous considérons les cônes dans toute leur étendue, la sphère coupera chacun d'eux suivant deux cercles situés à des distances égales du sommet. Ces cercles donnent, en général, huit points d'intersection qui appartiennent à quatre génératrices communes. Nous obtenons ainsi, outre les premières droites, les deux droites $(pam, n'a'm'')$ et $(qan, m'a'n'')$, qui, comme elles, satisfont aux conditions du problème.

La construction donne des solutions toutes les fois que le cercle bmn coupe la droite cnm, et par suite quand on a

$$ae < ba,$$

ou bien

$$ae < b'a_1.$$

Les triangles rectangles aec et $b'a_1a'$ ont leurs hypoténuses égales; l'inégalité précédente conduit donc, pour les angles opposés aux côtés ae et $b'a_1$, à la relation

$$\widehat{ace} < \widehat{b'a'a_1},$$

c'est-à-dire à

$$\beta < 90^\circ - \alpha,$$

d'où

$$\alpha + \beta < 90^\circ.$$

Il est, en effet, facile de reconnaître que, lorsqu'une droite est dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, les angles aigus qu'elle fait avec les plans de projection sont complémentaires, et que, pour toute autre position, la somme de ces angles est inférieure à 90°.

CHAPITRE III.

PLANS TANGENTS AU CYLINDRE ET AU CONE.

Construction des plans tangents.

127. *Mener un plan tangent à un cylindre en un point donné de la surface* (1).

Soit (m, m') le point (*fig.* 87, *Pl. XVIII*). Une seule de ses deux projections peut être prise arbitrairement, l'autre sera déterminée comme il est dit aux articles **111** et **113**.

Le plan tangent au point (m, m') est tangent tout le long de la génératrice $(mb, m'b')$, et sa trace horizontale est la droite T tangente à la trace A du cylindre au point b.

Sa trace verticale T′ passe par la trace c' de la génératrice de contact, et par le point où T rencontre la ligne de terre. Ce point étant éloigné, nous y suppléons en menant par un point (n, n') de la génératrice une droite $(ng, n'g')$ parallèle à la trace (T, XY). Cette ligne se trouvera dans le plan tangent, et sa trace verticale g' sera un point de T′.

128. *Mener à un cylindre un plan tangent par un point extérieur.*

Soit (m, m') le point donné (*fig.* 88). Le plan cherché devant contenir une génératrice, la droite $(mb, m'b')$ menée par le point (m, m') parallèlement aux génératrices y sera tout entière. La trace horizontale du plan passe donc par la trace b de cette droite; elle doit d'ailleurs être tangente à la trace A du cylindre, et il y a autant de solutions que l'on peut mener de droites satisfaisant à ces deux conditions : nous en trouvons deux, T et T_1.

Les traces horizontales des génératrices de contact sont les points de tangence r et r_1.

Les traces verticales des plans passent par la trace verticale de la droite $(mb, m'b')$; sur notre épure ce point est éloigné; nous ne pouvons pas non plus

(1) Les problèmes traités aux articles 127, 128 et 129 étant en eux-mêmes très aisés, nous avons disposé les données de manière à introduire de petites difficultés graphiques, avec lesquelles il est nécessaire que les élèves soient familiarisés.

utiliser les traces des génératrices de contact; alors nous avons mené par le point (m, m') des parallèles aux traces horizontales des plans tangents. Ces droites $(me, m'e')$, $(me_1, m'e'_1)$ sont dans les plans cherchés, et leurs traces e' et e'_1 achèvent de déterminer les traces T' et T'_1 des plans.

Les droites auxiliaires parallèles aux traces T et T_1 peuvent évidemment être menées par tout point de la droite $(mb, m'b')$.

129. *Mener à un cylindre un plan tangent parallèle à une droite.*

Soit (D, D′) la droite donnée (*fig.* 89). Par un point (m, m') de cette droite, nous menons une droite $(mg, m'g')$ parallèle aux génératrices du cylindre, et nous déterminons la trace horizontale eg du plan de ces deux droites.

Le plan cherché doit être parallèle à chacune d'elles; sa trace est donc parallèle à eg, et il y aura autant de solutions que la trace A du cylindre admettra de tangentes parallèles à cette droite; nous en trouvons deux, T et T_1.

Pour avoir les traces verticales, par des points b et b_1, pris sur les traces T et T_1, nous menons des parallèles aux génératrices du cylindre. Ces droites sont respectivement dans les plans tangents, et leurs traces verticales c' et c'_1 sont sur les traces verticales T' et T'_1 de ces plans. T' passe par c' et par le point k où T rencontre la ligne de terre; T'_1 passe par c'_1 et est parallèle à T'.

Pour diminuer le nombre des lignes à tracer, nous avons pris les points b et b_1 sur une parallèle aux projections horizontales des génératrices.

Les droites T' et T'_1 sont parallèles à la trace verticale du plan qui passe par (D, D′) et par $(mg, m'g')$. Il est quelquefois utile de construire cette ligne.

130. *Mener un plan tangent à un cône par un point extérieur.*

Le cône est donné par son sommet (s, s') (*fig.* 90) et par sa trace A. Nous le supposons limité à son sommet et au plan horizontal. Nous avons indiqué le contour apparent sur le plan vertical; il n'y en a pas sur le plan horizontal. Le point donné est (m, m').

Le plan cherché, devant contenir une génératrice du cône, passera par son sommet, et par suite la droite $(sm, s'm')$ y sera tout entière. La trace horizontale du plan passe donc par la trace horizontale b de cette droite; elle doit d'ailleurs être tangente à la trace A du cône; il y a autant de solutions que l'on peut mener de droites satisfaisant à ces conditions. Nous en trouvons deux, T et T_1. Les génératrices de contact sont $(sr, s'r')$ et $(sr_1, s'r'_1)$.

La trace verticale de chacun des deux plans passe par la trace verticale c' de la droite $(sm, s'm')$.

130 *a*. Lorsque le point m, m' est donné sur la surface du cône, le point b est sur la trace A, et la construction donne un seul plan tangent, dont la trace horizontale est la tangente en b à la courbe A.

131. *Mener à un cône un plan tangent parallèle à une droite donnee.*

Le plan cherché contient la droite $(sb, s'b')$ menée par le sommet (s, s')

parallèlement à la droite donnée (D, D′) (*fig.* 90). La question se trouve ainsi ramenée au problème que nous venons de traiter.

132. Les problèmes que nous avons résolus dans les articles précédents peuvent être considérés comme des questions d'ombre [1] pour des cylindres d'une longueur indéfinie.

Si un cylindre est éclairé par des rayons qui divergent d'un point (m, m') (*fig.* 88), les lignes d'ombre seront les génératrices de contact des plans tangents (T, T′), (T_1, T'_1); car les rayons dirigés de (m, m') aux différents points de ces génératrices seront tangents comme contenus dans des plans tangents.

Les traces des plans tangents au delà des points de contact sont les limites des ombres portées sur les plans de projection; ainsi l'ombre sur le plan horizontal est $urir_1 u_1$.

Si la *fig.* 88 avait été établie en vue d'un problème d'ombre, les parties br et br_1 des traces auraient dû être pointillées.

La *fig.* 89 montre, pour un cylindre éclairé par des rayons parallèles à une direction (D, D′), les génératrices limites de l'ombre propre, et les traces des plans tangents qui limitent l'ombre portée sur les plans de projection. Considérées comme lignes d'ombre sur le plan horizontal, les droites T et T_1 ne devraient pas être prolongées à droite des points r et r_1.

La *fig.* 90 présente également les constructions nécessaires pour déterminer les ombres d'un cône.

133. *Mener à un cylindre un plan tangent qui fasse avec le plan horizontal un angle donné.*

Prenons un point (s, s') (*fig.* 86), et considérons-le comme le sommet d'un cône de révolution dont les génératrices rencontrent le plan horizontal sous l'angle donné. Nous pouvons tracer l'une des deux génératrices parallèles au plan vertical, puis le cercle trace horizontale du cône (art. **126**).

Le plan cherché fait avec le plan horizontal le même angle que les plans tangents au cône; d'ailleurs il contient une génératrice du cylindre; il est donc parallèle au plan mené tangentiellement au cône par la droite $(sb, s'b')$ parallèle aux génératrices du cylindre : sa trace est ainsi parallèle à t ou à u; c'est T, T_1, U ou U_1.

Nous trouvons ainsi quatre solutions, mais il n'y en aurait que deux si, par la nature du problème, le dièdre égal à l'angle donné devait être du côté du cylindre; les traces T_1 et U_1 seraient alors à rejeter, parce que les plans qu'elles déterminent, bien que parallèles aux deux autres, devraient être considérés comme formant avec le plan horizontal des angles supplémentaires de l'angle donné.

---

[1] Les généralités relatives aux ombres linéaires sont exposées dans le *Livre cinquième* (deuxième Partie).

On obtient la trace verticale de chaque plan en cherchant la trace verticale de la génératrice de contact, ou d'une droite parallèle à cette ligne menée par un point quelconque de la trace horizontale. Nous avons cru inutile de reproduire ces constructions.

Il n'y aurait pas de solution si le point b était dans l'intérieur du cercle s, et si la trace du cône n'avait pas de tangente parallèle, ni à t ni à u.

134. *Mener à un cône un plan tangent qui fasse un angle donné avec le plan horizontal.*

On construira la trace horizontale d'un cône de révolution qui aura son sommet au sommet du cône donné, et dont les génératrices feront l'angle donné avec le plan horizontal. Les plans cherchés auront pour traces, sur ce plan, les tangentes communes aux traces du cône donné et du cône de révolution.

Si l'angle donné est aigu, et si le dièdre qui lui est égal doit être du côté du cône, on ne devra admettre que les tangentes qui laisseront les traces d'un même côté.

Il y a des cas d'impossibilité dans ce problème comme dans le précédent.

Solution, par la théorie des plans tangents au cône de révolution, de divers problèmes relatifs à la ligne droite et au plan.

135. On emploie un cône de révolution dans toutes les questions où un plan doit faire avec un plan donné un angle donné.

Construire un plan qui passe par une droite donnée et fasse un angle donné avec le plan horizontal.

Soit (bc, $b'c'$) la droite donnée (*fig.* 92). Un point (s, s') de cette ligne est pris pour le sommet d'un cône de révolution dont les génératrices font avec le plan horizontal l'angle donné. Il n'y a qu'à mener à ce cône un plan tangent qui contienne la droite : nous en trouvons deux (P, P′) et (Q, Q′). Si le sens de l'inclinaison était indiqué par la nature du problème, il pourrait y avoir lieu de rejeter une des deux solutions.

La trace P ne rencontrant pas la ligne de terre, pour déterminer P′ nous avons cherché la trace verticale d'une droite passant par deux points (m, m') et (n, n'), situés l'un sur la droite donnée, l'autre sur la trace du plan.

136. *Construire un plan qui contienne une droite donnée et fasse un angle donné avec un plan donné.*

On ramène cette question à la précédente, en changeant les plans de projection (art. **60**).

Soient (P, P′) le plan et (eh, $e'h'$) la droite (*fig.* 91). Nous prenons un plan auxiliaire (cg, gg') perpendiculaire au plan horizontal et au plan donné, et nous

le rabattons en le faisant tourner autour de la droite cg qui devient une nouvelle ligne de terre; la trace du plan (P, P′) sur ce nouveau plan vertical est P″.

La droite donnée coupe le plan auxiliaire au point (s, s') qui se place en s'' sur le rabattement. Nous prenons ce point pour sommet d'un cône de révolution dont les génératrices font l'angle donné avec le plan (P, P″). En traçant les droites s''O″ et s''R″, l'une perpendiculaire à P″, l'autre ayant sur cette droite l'inclinaison voulue, nous avons l'axe du cône, et l'une des deux génératrices situées dans le plan auxiliaire. Nous rabattons le plan (P, P″) sur le plan horizontal, et nous décrivons le cercle OR trace du cône.

La droite donnée (eh, $e'h'$) perce le plan (P, P″) au point (b, b'') qui se place en B. Les tangentes Bl et Bk sont les traces des plans cherchés sur le plan (P, P″) rabattu; elles rencontrent le rabattement P'_1 de la trace verticale P′ aux points m_1 et n_1, que nous relevons sur P′ en m et n. Comme d'ailleurs les plans doivent contenir la droite (eh, $e'h'$), on voit que leurs traces sur les plans coordonnés primitifs sont kei et inh' pour l'un, ej et jmh' pour l'autre.

137. *Connaissant une face* β *d'un angle trièdre, l'angle dièdre opposé* B *et l'un des deux autres* C, *trouver les faces inconnues* α *et* γ, *et le troisième angle dièdre* A.

Par un point S (*fig.* 61, *Pl. XIV*) nous traçons sur le plan de la figure supposé horizontal deux droites Sc et Sa comprenant entre elles l'angle β; nous prenons un plan vertical EN perpendiculaire à l'arête Sc, et nous plaçons sous l'inclinaison donnée C la trace verticale ER de la face opposée à Sa. Pour former l'angle trièdre, il faut mener par la droite Sa un plan formant avec le plan (SE, ER) l'angle donné B; c'est un problème que nous savons résoudre (art. **136**) : la position particulière des données rend la construction très facile.

Nous traçons les droites NP et NR, l'une perpendiculaire à ER, l'autre formant avec cette droite l'angle B : ce sont l'axe et une génératrice d'un cône de révolution auquel la troisième face doit être tangente. Si nous rabattons le plan (SE, ER) sur le plan horizontal, nous pourrons décrire le cercle base du cône et placer la troisième arête SI, qui doit le toucher; cette construction nous fait connaître l'angle bSc du plan de la seconde face.

La tangente SJ doit être rejetée; elle correspond, en effet, à une face qui serait en deçà de l'axe du cône par rapport à l'arête Sc, et qui par conséquent ferait en regard de la face β non pas l'angle B, mais son supplément.

Si, les angles β et C restant les mêmes, l'angle B était remplacé par son supplément, la construction ne serait pas modifiée; elle convient donc à deux angles trièdres différents. Suivant qu'une droite Sb tangente à la base du cône laissera les points p et E d'un même côté, ou passera entre eux, elle correspondra à l'angle trièdre dans lequel l'angle B est aigu, ou à celui dans lequel il est obtus.

Sur la *fig.* 61 *bis* cet angle est aigu, et chacune des tangentes SI et SJ laisse les points p et E d'un même côté; elles doivent donc être admises toutes les deux,

mais la dernière se trouvant abaissée au-dessous du plan horizontal quand le plan (SE, ER) est relevé, c'est son prolongement Sb' qui forme la troisième arête. Nous trouvons ainsi que l'angle plan de la seconde face est égal à bSE ou à b'SE.

Si, les angles β et C conservant les grandeurs qu'ils ont sur la *fig.* 61 *bis*, l'angle B était remplacé par son supplément, les deux tangentes devraient être rejetées, et l'angle trièdre serait impossible.

138. Supposons que l'on rabatte la troisième face en la faisant tourner autour de Sa : le point de contact I (*fig.* 61) se placera sur l'arc de cercle décrit du point S comme centre, avec SI pour rayon. Comme d'ailleurs nous savons que sa distance au sommet N du cône est la longueur NR d'une génératrice, nous pouvons déterminer sa position I_1 par recoupement.

Dans l'espace, la troisième arête est tangente à la base du cône, et par suite perpendiculaire à la génératrice du point de contact I. D'après cela le rabattement sb_1 doit être tangent en I_1 au cercle dont le centre est en N, et dont le rayon égale NB.

Si le cercle décrit du point p comme centre passait par le point S, les points I, J et I_1 se réuniraient à S, et l'angle NSb_1 serait droit.

Sur la *fig.* 61 *bis*, en menant du point S des tangentes au cercle dont le rayon est NR, nous trouvons que la troisième face est aSb_1 dans la première solution, et aSb'_1 dans la seconde. Ces angles sont supplémentaires.

139. La *fig.* 61, faite en ordre inverse, donne une solution du problème de l'angle trièdre dans le troisième cas, déjà examiné à l'article **77**.

Les données sont les angles cSa, aSb_1 et NER. Les diverses droites qui les forment sur la figure étant placées, on abaisse les perpendiculaires NI_1 et NP. Un cône de révolution dont l'axe serait NP, et dont la droite NR égale à NI_1 serait une génératrice, toucherait la face aSb_1 relevée, et la troisième arête du trièdre serait tangente au cercle de sa base situé dans le plan (SE, ER). Si donc nous rabattons ce plan par une rotation autour de SE, nous pourrons tracer le cercle de centre p, de rayon pr égal à PR, que la troisième arête devra toucher.

Les tangentes SI et SJ doivent être admises toutes les deux, parce qu'elles se trouvent, après le relèvement, sur la partie du plan qui forme avec le plan horizontal l'angle donné C. Nous trouvons ainsi deux grandeurs ESI, ESJ pour le troisième angle plan.

Il y a deux cas d'impossibilité : celui où les tangentes sont toutes les deux sur la partie inférieure du plan de la troisième face, et celui où le cercle décrit du point N comme centre avec NI_1 pour rayon ne rencontre pas la droite ER.

140. *Mener un plan tangent à deux cônes de révolution dont les sommets coïncident, et dont les axes sont dans le plan horizontal de projection.*

Connaissant les angles au sommet et les axes EP, EQ des deux cônes (*fig.* 59 a,

Pl. XIII), nous pouvons tracer l'une des deux génératrices que chacun d'eux possède sur le plan horizontal. Nous obtenons ainsi la droite Ex génératrice du premier cône et la droite Ey génératrice du second.

D'un point P de l'axe du premier cône, nous abaissons une perpendiculaire Px sur Ex : une sphère, ayant son centre en P et Px pour rayon, sera touchée par toutes les génératrices du premier cône et par tous ses plans tangents. De même une sphère, ayant son centre en Q et pour rayon la perpendiculaire Qy à Ey, sera touchée par tous les plans tangents du second cône. Le problème revient en conséquence à mener du point E un plan tangent à deux sphères ayant leurs centres en P et en Q, et respectivement pour rayons Px et Qy.

Nous supposons maintenant que le point Q a été déterminé sur EQ par la condition que Qy ait la même longueur que Px : les deux sphères sont égales, et la trace du plan tangent est la droite EI parallèle à la ligne des centres PQ.

Nous prenons un plan vertical de projection perpendiculaire à l'un des axes EP : le cône correspondant a pour trace verticale un cercle dont nous n'avons tracé qu'un quart; la tangente Ii est la trace du plan tangent.

La seconde tangente menée du point I à la trace du cône donne une seconde solution. Chacun des deux plans tangents ainsi obtenus laisse les sphères d'un même côté. Si les sphères devaient être placées de côtés différents du plan tangent, la trace de ce plan, au lieu d'être parallèle à la ligne des centres QP, passerait par le milieu de cette droite ([1]).

140 *a*. *Mener par un point* (a, a') (*fig. j, Pl. LV*), *un plan faisant avec le plan horizontal et avec le plan vertical de projection des angles donnés* α *et* β.

D'après la méthode indiquée à l'article **135**, il faut considérer deux cônes de révolution ayant leur sommet au point (a, a') et coupant respectivement le plan horizontal et le plan vertical sous les angles α et β, puis leur mener un plan tangent commun.

Le plan passant par (a, a') et perpendiculaire à la ligne de terre contient les axes des deux cônes. Nous le rabattons sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace IaE. Le point (a, a') se place en A; les axes sont Aa et Aa'_1. On établit sans difficulté sur ce rabattement les droites Ab et Ac_1, dont chacune est la génératrice d'un cône.

La méthode des sphères inscrites (art. **140**) donne un moyen facile de construire les plans tangents aux deux cônes.

Nous prenons un point o sur Aa, et nous déterminons sur Aa'_1 un point o_1 tel que les droites or et o_1r_1, respectivement perpendiculaires à Ab et à Ac_1, soient égales. Les points o et o_1 sont les centres de deux sphères de rayons

([1]) La solution du problème de l'article 140, par la considération de deux sphères égales, est due à Hachette. Olivier a donné une autre solution de ce problème.

égaux, dont chacune est inscrite dans un cône. Un plan tangent aux cônes touche ces sphères, et a pour trace une droite EF_1 parallèle à la ligne des centres oo_1 et passant par le sommet A. Lorsque nous relevons le plan des axes, le point F_1 se place en F. Les traces du plan demandé, sur les plans de projection, passent par les points E et F et sont respectivement tangentes aux traces des cônes. On trouve les deux plans (HE, HF) et (KE, KF).

En considérant la seconde nappe du cône dont l'axe est Aa'_1, on voit que le centre de la sphère qui lui est inscrite aurait pu être placé en o_2, à une distance de A égale à Ao_1. La ligne des centres eût alors été oo_2. Cette construction fait trouver deux plans (PGU, PS) et (QGV, QT), qui, comme les premiers, satisfont aux conditions du problème.

On peut obtenir ces nouvelles solutions par la considération des premières sphères, en remarquant qu'elles admettent des plans tangents alternes ayant une trace commune AG qui coupe la ligne des centres en son point milieu o_3. Par les mêmes motifs, la ligne EF_1 passe au point o_4, milieu de oo_2. Il résulte de là que les droites AE et AG ont des positions symétriques par rapport à Aa, et par suite que les points E et G sont à des distances égales de a. On reconnaît de la même manière que la projection a' est également éloignée de F et du point où se rencontrent les traces verticales PS et QT. Ce point est déterminé sur la ligne IE par l'arc de cercle décrit du point I comme centre, avec IG_1 pour rayon. Il se trouve très rapproché du point G, et par suite les traces PS et PU forment un angle peu différent de 180°.

Les axes des cônes étant à angle droit, l'une de ces surfaces ne peut pas être dans l'intérieur de l'autre. Elles ont quatre plans tangents communs lorsqu'elles ne se rencontrent qu'à leur sommet (a, a'). Il faut pour cela que la somme des angles bAa et $c_1Aa'_1$, formés par les génératrices avec les axes, soit inférieure à 90°, et, comme ces angles sont complémentaires de α et de β, on doit avoir

$$\alpha + \beta > 90°.$$

Lorsque la somme $\alpha + \beta$ atteint 90°, les cônes se touchent suivant deux génératrices, et il n'y a que deux solutions distinctes; elles se réduisent à une seule quand un des angles est droit et l'autre nul.

Enfin, quand la somme $\alpha + \beta$ est inférieure à 90°, les cônes se coupent, et il est facile de reconnaître que la construction ne donne plus de solution. En effet, pour que les deux premières solutions soient réelles, il faut que l'on puisse mener du point E et du point F des droites respectivement tangentes aux cercles dont les centres sont a et a'. On a donc

$$ab < aE$$

et

$$a'_1 c_1 < a'_1 F_1,$$

ou bien

$$\widehat{aAb} < \widehat{aAE}$$

et

$$\widehat{c_1 A a'_1} < \widehat{a'_1 A F_1};$$

ajoutant ces deux inégalités membre à membre, on trouve

$$(90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta) < 90^\circ,$$

d'où

$$\alpha + \beta > 90^\circ.$$

Les points E et G étant à des distances égales de a, si le premier est dans l'intérieur du cercle, le second s'y trouvera aussi, et par suite les deux dernières solutions disparaissent en même temps que les premières.

On doit remarquer que le plan cherché et les deux plans de projection forment un trièdre rectangle. La surface du triangle sphérique qui lui correspond est mesurée par l'excès

$$(\alpha + \beta + 90^\circ) - 180^\circ$$

ou

$$\alpha + \beta - 90^\circ;$$

lorsque la somme $\alpha + \beta$ est inférieure à 90°, le triangle sphérique et le trièdre sont imaginaires.

141. *Déterminer les faces α, β et γ d'un angle trièdre dont on connaît les angles dièdres* A, B, C.

Nous désignerons simultanément par α, β et γ les faces de l'angle trièdre et les plans qui les contiennent. Nous aurons ainsi l'angle α et le plan α.

Sur le plan de la figure, que nous supposons horizontal, nous traçons deux droites EN et Em' comprenant un angle égal à C (*fig.* 62, *Pl. XIV*), et nous les considérons comme les traces de deux plans verticaux, qui seront ceux des faces β et α, respectivement opposées aux dièdres B et A. Nous pouvons de plus supposer que le sommet de l'angle trièdre se trouve au point E.

Le plan γ opposé à l'angle C passe par le sommet E, et fait avec les plans verticaux EN et Em' des angles connus A et B. Nous pouvons, par conséquent, déterminer deux cônes de révolution qui doivent être touchés par ce plan ; ils ont l'un et l'autre leur sommet en E.

Le premier cône a pour axe la droite Ec perpendiculaire à EN et par suite au

plan β. La ligne Eu, qui fait avec le prolongement de EN un angle égal à A, est une des deux génératrices contenues dans le plan horizontal. De même, si nous traçons les droites EL et Ev, faisant respectivement avec EM′ un angle droit et un angle égal à B, nous aurons l'axe et une génératrice du second cône.

En opérant comme il est dit à l'article **140**, nous déterminons la trace horizontale EI du plan γ tangent aux deux cônes, et sa trace Ii sur le plan vertical IK perpendiculaire à EP et par suite parallèle à β.

Les droites Vc et Vi sont parallèles aux intersections du plan β avec les plans α et γ, et par suite l'angle cVi est égal à β. Le problème peut maintenant être considéré comme résolu.

141 *a*. Les constructions faites permettent d'obtenir très facilement les angles α et γ. Nous rabattons le plan vertical β autour de sa trace EN, et nous supposons que l'angle trièdre a été transporté parallèlement à lui-même, de manière que son sommet se trouve en un point S sur la verticale du point E; en traçant SN parallèle à Ii, nous avons dans ESN la face β.

Quand le sommet de l'angle trièdre est élevé en S, la trace EI du plan γ se transporte parallèlement à elle-même, et vient passer par le point N. Les deux traces de ce plan dans sa position définitive sont m'N et NS; les deux traces du plan α sont m'E et ES.

Le point m', intersection des traces horizontales des plans α et β, appartient à la troisième arête; il est facile de voir que, quand on rabat ces plans sur le plan vertical, le point m' est porté en M d'un côté, et en M_1 de l'autre. Les angles cherchés α et γ sont ainsi MSE et NSM_1.

Nous aurions pu placer le sommet de l'angle trièdre en V, mais nous avons cru qu'en lui donnant une autre position S, les diverses constructions seraient plus faciles à saisir et à distinguer. Si l'on suppose que les points V et S soient d'un même côté du plan horizontal, les rabattements autour des lignes de terre EN et IK sont faits en sens contraire, et, dans l'espace, la droite SN est parallèle, non pas à IV, mais à la seconde tangente menée du point I à la trace du cône. Les deux tangentes déterminent deux angles trièdres symétriques.

Nous avons pris le point P du côté de EN où nous avions placé l'angle C, et le point Q du côté de Em' où est le même angle, de manière que le plan de la face γ laissât d'un même côté les deux sphères touchées. Si, conservant le point P, nous avions placé le point Q sur le prolongement de LE au delà de E, le plan eût passé par le milieu de la ligne des centres (art. **140**).

141 *b*. Pour qu'il y ait une solution, il faut que la longueur KI soit plus grande que le rayon Ku. On reconnaîtra que cela arrive toutes les fois que la somme des trois angles donnés surpasse 180 degrés. Nous ne nous arrêterons pas à cette question de Géométrie plane.

Si l'un des angles dièdres est droit, en le mettant dans la position C, on pourra

conserver le tracé, mais il vaut mieux lui donner la position B; le second cône se réduit à son axe EQ_1 et le problème consiste à mener par cette droite un plan tangent au premier cône.

CHAPITRE IV.

SECTIONS PLANES DU CYLINDRE ET DU CONE.

Sections planes du cylindre.

142. Pour construire l'intersection d'un cylindre par un plan, on prend sur la surface un certain nombre de génératrices convenablement espacées, on détermine séparément les points où elles percent le plan, et on les réunit, sur chaque plan de projection, par un trait continu.

Lorsque l'on a obtenu les projections de la courbe, on peut déterminer sa vraie grandeur en rendant son plan parallèle à l'un des plans coordonnés, et construire sa transformée dans le développement du cylindre.

1er Exemple. — *Cylindre vertical; plan sécant perpendiculaire au plan vertical.* (*Planche XXI.*)

143. Nous supposons d'abord le cylindre vertical, et le plan sécant (P, P′) (*fig.* 93) perpendiculaire au plan vertical. Les projections de l'intersection sont, sur le plan horizontal, la trace du cylindre, et, sur le plan vertical, la partie de la trace du plan comprise dans le contour apparent du cylindre. Nous n'avons donc à déterminer que la vraie grandeur de la section, et sa transformée par développement.

Nous rabattons le plan sécant sur le plan vertical en le faisant tourner autour de sa trace P′. Un point quelconque (c, c') tourne autour du point c', et se place en C sur une perpendiculaire à la trace P′, et à une distance de cette droite égale à c_0c. Il faut opérer sur un nombre de points assez grand pour qu'on puisse tracer la courbe sans incertitude.

On trouve la position que prend une tangente (fr, P′) en cherchant par le même procédé le point où se place l'un quelconque (r, r') de ses points. La construction est un peu plus simple lorsque l'on choisit un point tel que (t, d') sur une ligne (dd_1, d') déjà tracée sur le rabattement.

On peut également résoudre le problème en faisant tourner le plan autour de l'une quelconque de ses horizontales, jusqu'à le rendre parallèle au plan horizontal, et en déterminant la nouvelle projection de la courbe.

144. Dans le développement du cylindre, la trace, étant une section droite, a pour transformée une ligne droite à laquelle les génératrices sont perpendiculaires (art. **118**).

Nous supposons le cylindre coupé suivant la génératrice qui a sa trace en a, et nous portons sur une droite XY (*fig.* 94) des longueurs égales aux divisions successives de la section droite à partir de a; nous élevons ensuite des perpendiculaires auxquelles nous donnons les longueurs des génératrices mesurées sur le plan vertical où elles sont projetées en vraie grandeur.

L'angle formé par une tangente de la courbe et la génératrice du point de contact est le même dans l'espace et le développement (art. **118**). D'après cela, il est facile de construire la tangente de la transformée, en un point quelconque F (*fig.* 94).

Considérons le triangle rectangle formé par la génératrice du point (f, f') (*fig.* 93), la tangente de la courbe en ce point, et sa projection ft sur le plan horizontal qui contient le point (d, d') : pour reproduire ce triangle sur le développement, il suffit de prendre la longueur φt (*fig.* 94) égale à ft (*fig.* 93); l'hypoténuse Ft est la tangente. On pourrait limiter cette droite à tout autre plan horizontal, par exemple à celui du point (r, r'); la longueur br (*fig.* 93) serait alors portée en $\varphi_1 r$ (*fig.* 94).

145. Tous les points de la courbe se projetant verticalement sur la droite limitée $a'g'$, on voit que les points (a, a') et (g, g') sont, l'un le moins élevé, et l'autre celui qui l'est le plus. Les tangentes aux points A, G et A_1 de la transformée (*fig.* 94) sont donc horizontales.

On arriverait au même résultat en remarquant que les tangentes à la trace du cylindre en a et en g sont parallèles à P, et par suite à toutes les horizontales du plan sécant. Les tangentes aux points correspondants de la courbe sont donc horizontales et restent telles dans le développement.

Les tangentes de la courbe aux points (d, d'), (d_1, d') sont des lignes de plus grande pente du plan sécant, parce que leurs projections horizontales sont perpendiculaires à P; elles ont donc sur le développement une inclinaison plus grande que les autres tangentes, et de là résultent des inflexions aux points D et D_1 de la transformée (art. **87**).

On verrait l'inflexion se produire sur le plan vertical (*fig.* 93), si l'on y projetait un développement fait sur le plan tangent le long de la verticale du point d. Les points (e, e') et (c, c') s'éloigneraient l'un à droite, l'autre à gauche, chacun en restant à la même hauteur, et par suite ils se trouveraient de côtés différents de la trace P' qui serait toujours la projection de la tangente.

146. Si l'on compare l'une à l'autre la trace du cylindre et la courbe de section rabattue, on verra que les points homologues de ces lignes se trouvent à

des distances égales des droites ag et AG, et que les abscisses [1], mesurées sur ces lignes à partir des points a et A, sont dans un rapport constant, celui de ag à $a'g'$. D'après cela, quand la trace du cylindre est un cercle, la section est une ellipse, comme nous savons que cela doit être. Le centre de cette courbe, avant son rabattement, est un point (o, d') où le plan coupe l'axe du cylindre. Le petit axe est dans un plan passant par le centre et perpendiculaire aux génératrices.

147. La projection $a'g'$ (*fig.* 93) étant une ligne droite, il y a proportionnalité entre les ordonnées et les abscisses de ses différents points; mais les ordonnées sont les mêmes que celles de la transformée (*fig.* 94), et les abscisses mesurées sur XY à partir de d_0 sont les sinus des arcs formés par les abscisses de la transformée enroulées sur la section droite que nous supposons un cercle. Nous voyons donc quelle est la loi qui relie les coordonnées de la transformée par développement. Cette courbe, que l'on appelle *sinusoïde*, est géométriquement indéfinie, comme si la surface d'un cylindre était indéfiniment déroulée; mais, dans les applications, la partie utile ne peut pas avoir une longueur plus grande que celle qui correspond à une circonférence de la section droite.

IIe EXEMPLE. — *Cylindre vertical, plan sécant dans une position quelconque.* (*Planche XXI.*)

148. Nous allons maintenant supposer qu'un cylindre vertical est coupé par un plan (P, P′) (*fig.* 95) ayant une position quelconque par rapport aux plans coordonnés.

Il faut d'abord construire la projection verticale de l'intersection. Le problème revient à celui-ci : *Déterminer la projection verticale d'une courbe dont on connaît la projection horizontale, et qui est située dans un plan donné.*

Par un point c pris arbitrairement sur la trace du cylindre, nous menons une droite cc_2 parallèle à P; cette droite est la projection horizontale d'une horizontale du plan dont il est facile de déterminer la projection verticale c'_2c'. Relevant sur cette droite c en c', nous avons la projection verticale du point de l'intersection qui se projette horizontalement en c.

La droite cc_2 rencontre la trace du cylindre en un second point c_1 qu'on relève en c'_1.

Les droites aa_2 et gg_2, parallèles à P et tangentes à la trace, correspondent aux horizontales du plan entre lesquelles la courbe est comprise; elles font trouver le point le moins élevé (d, d') et celui qui l'est le plus (g, g').

---

(1) La perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite prise pour *axe* est l'*ordonnée* du point, et la distance du pied de la perpendiculaire à un point de l'axe pris pour *origine* en est l'*abscisse*. La droite ag étant prise pour axe (*fig.* 93), et le point a pour origine, les longueurs ao et od sont l'abscisse et l'ordonnée du point d. L'abscisse et l'ordonnée sont les *coordonnées* du point.

Pour déterminer le point i' situé sur l'une des droites qui forment le contour apparent du cylindre sur le plan vertical, il faut opérer sur le point i de la trace horizontale, où la tangente est perpendiculaire à la ligne de terre.

Nous avons ponctué la figure dans la supposition que le cylindre était limité au plan de section.

149. La tangente en un point f' est la projection verticale de la droite du plan (P, P′) qui se projette horizontalement sur la droite tfr, tangente en f à la base du cylindre. On l'obtient par la construction expliquée à l'article **29**. On peut d'ailleurs déterminer un quelconque de ses points t', en opérant comme pour les points de la courbe.

Si l'on cherchait les tangentes aux points i' et j', on trouverait les génératrices qui forment le contour apparent, et il doit en être ainsi ; car, en ces points, le plan tangent, qui contient la génératrice et la tangente à la courbe, est perpendiculaire au plan vertical, et projette ces deux droites sur sa trace.

Les courbes qui sont sur une surface ont ainsi leur projection tangente au contour apparent. Il n'y a d'exception que quand la tangente à la courbe au point où elle rencontre le contour apparent dans l'espace est perpendiculaire au plan de projection, parce qu'alors cette tangente est projetée tout entière sur un point (art. **116**).

Cette circonstance se présente sur la *fig*. 93 ; les tangentes aux points (a, a') et (g, g') sont perpendiculaires au plan vertical, et la projection $a'g'$ de la courbe n'est pas tangente aux droites qui forment le contour apparent du cylindre sur le plan vertical. Elle s'y arrête, et est géométriquement prolongée par des parties de la droite P′ que l'on doit considérer comme parasites.

150. Nous allons maintenant rabattre le plan sécant pour avoir la vraie grandeur de la courbe : nous arriverons facilement au résultat par deux rotations.

Nous faisons tourner le plan sécant d'abord autour de la verticale du point o jusqu'à ce qu'il soit perpendiculaire au plan vertical, puis autour de sa nouvelle trace sur ce plan. Le point I vient en I_1, et la trace verticale du plan se trouve être $I'_1 o'$. Le second mouvement amène le point (o, o') sur la droite o'T perpendiculaire à $I'_1 o'$; sa distance à cette ligne devrait être oo_0, mais pour dégager complètement la courbe rabattue des autres lignes de la figure, nous repoussons le point jusqu'en O, à une distance convenable et d'ailleurs arbitraire. La droite du plan qui se projetait sur ag est devenue parallèle au plan vertical, et arrive se placer sur la droite AOG, parallèle à $I'_1 o'$.

Si nous considérons un point quelconque (e, e'), la première rotation amène sa projection verticale en ε sur $I'_1 o'$, la seconde le place en E, à une distance de AG égale à $e\eta$.

La tangente est obtenue par les mêmes procédés.

On voit qu'il n'est pas beaucoup plus difficile de rabattre une figure plane

quand son plan est oblique aux plans coordonnés, que quand il est perpendiculaire à l'un d'eux. Il est inutile de dire que l'on peut construire la vraie grandeur de la section, en faisant tourner le plan (P, P′) autour de l'une de ses traces, de manière à le rabattre sur un plan de projection.

Le développement du cylindre peut être construit immédiatement : on trouve pour transformée de l'intersection la courbe AA_1 (*fig.* 94), car les *fig.* 93 et 95 représentent le même tronc de cylindre dans deux positions différentes, par rapport au plan vertical.

151. La trace du cylindre étant un cercle, la section et sa projection sur un plan quelconque sont des ellipses. Les tangentes aux points a' et g' (*fig.* 95) sont parallèles et horizontales; la droite $a'g'$ est donc un diamètre, et son diamètre conjugué est la corde horizontale $d'd'_1$ qui passe à égales distances des points a' et g'.

On aurait encore deux diamètres conjugués en traçant la droite $i'j'$, et cherchant les points situés sur la verticale du point o'. Enfin, d'une manière plus générale, on peut prendre sur le cercle trace du cylindre deux diamètres à angle droit, et chercher ce qu'ils deviennent sur la projection verticale. Cela résulte de ce que des cordes parallèles dans l'espace sont parallèles en projection, et que leurs milieux se correspondent.

152. Dans les constructions de la Géométrie descriptive, les courbes sont obtenues d'après les conditions du problème, comme projections, intersections ou contours apparents. Quelquefois cependant, quand on a déterminé la nature d'une courbe, on peut employer pour la tracer des procédés qui résultent de ses propriétés spéciales.

L'ellipse est, après le cercle, la courbe que l'on rencontre le plus souvent dans les applications. Nous supposons que l'on connaît ses principales propriétés, mais nous croyons devoir rappeler quelques constructions qui sont souvent utiles.

Pour tracer une ellipse dont on a les axes AA′ et BB′ (*fig.* 99), on porte sur une règle, et à partir d'un point M, deux longueurs Mq et Mp égales, l'une au demi petit axe, et l'autre au demi grand axe; puis on place la règle en diverses positions, de manière que les points q et p soient toujours le premier sur le grand axe, et le second sur le petit; le point M se trouve nécessairement sur l'ellipse.

Les segments Mp et Mq peuvent être placés d'un même côté du point M, ou de côtés opposés. La première disposition est généralement plus commode, parce que la construction occupe moins d'étendue sur la feuille, mais elle présente peu de précision quand la différence des axes est petite.

153. Il y a plusieurs moyens de trouver les axes d'une ellipse quand on connaît deux demi-diamètres conjugués OM et ON (*fig.* 100). Voici celui que nous croyons le plus simple.

De l'extrémité M de l'un des diamètres, on abaisse une perpendiculaire MI sur l'autre, et l'on prend sur cette droite des longueurs MC et MC_1 égales à ON; on trace OC et OC_1. On mène par le point M une sécante parallèle à OC_1; elle coupe OC en un point E à partir duquel on prend les segments Ep et Eq égaux à EO. Les axes sont, en direction les droites Op et Oq, en grandeur les doubles des segments Mq et Mp.

Si l'on trace la sécante parallèlement à la plus petite des longueurs OC et OC_1 (*fig.* 100 *bis*), le point M sera entre les points p et q. On opère d'une manière ou de l'autre, suivant celle des deux dispositions représentées sur la *fig.* 99 que l'on veut employer pour décrire l'ellipse.

154. On peut, du reste, tracer facilement une ellipse par points, quand on connaît deux diamètres conjugués $a'g'$ et $d'd'_1$ (*fig.* 96). Décrivons un cercle sur $a'g'$ comme diamètre, élevons la perpendiculaire om, et joignons md'_1; si l'on construit sur une ordonnée quelconque εn du cercle un triangle $\varepsilon ne'_1$ semblable à omd'_1, le point e'_1 et le point e' situé à une distance égale de ε appartiendront à l'ellipse.

On voit d'après cela que nous pourrons toujours regarder une ellipse comme tracée, quand nous aurons obtenu deux diamètres conjugués.

IIIe EXEMPLE. — *Cas général.* (*Planche XXII.*)

155. Nous allons maintenant construire l'intersection d'un cylindre par un plan dans le cas le plus général. Le cylindre est donné comme à l'ordinaire par sa trace horizontale et la direction de ses génératrices. Les traces du plan sécant sont les droites Q et Q′ (*fig.* 97).

155 *a*. La perspective cavalière [1] de la *fig. a*, *Pl. LIII*, représente le cylindre dans l'espace, ses projections sur le plan horizontal et sur le plan vertical, les traces Q et Q′ du plan sécant, la section du cylindre et ses projections.

Les constructions expliquées aux articles **155** et **156** sont tracées sur cette perspective, et nous engageons le lecteur à les suivre en étudiant l'épure (*fig.* 97). Nous avons mis aux projections les mêmes lettres indicatrices que sur la *fig.* 97 et aux points dans l'espace des lettres majuscules accompagnées de l'indice 1.

On voit deux groupes de lignes parallèles, les unes à XI, les autres à nN; elles représentent des droites perpendiculaires, les premières à la ligne de terre XY, les autres aux projections horizontales des génératrices.

155 *b*. Nous pourrions déterminer les projections de la courbe en cherchant, d'après les procédés ordinaires (art. **30**), l'intersection d'un certain nombre

---

[1] Les explications relatives à la Perspective cavalière sont données à la fin de cette *Première Partie* (art. 311).

de génératrices avec le plan; mais nous devons disposer les constructions en vue du rabattement qu'il sera nécessaire de faire pour obtenir la courbe dans sa vraie grandeur, et des tracés qu'exigera la détermination de la section droite pour le développement du cylindre.

Nous considérons le plan vertical qui contient une génératrice quelconque, par exemple celle dont les projections sont $e\varepsilon$ et $e'E'$, et nous le rabattons sur le plan horizontal en supposant qu'il entraîne avec lui la génératrice et sa propre intersection avec le plan (Q, Q').

Il est facile d'avoir le rabattement ee_1 de la génératrice, en cherchant le point N où se place un point (n, n') de cette droite.

L'horizontale du plan (Q, Q') située à la même hauteur que (n, n') a sa trace verticale en r', et se projette horizontalement sur la droite rm parallèle à Q; le point où elle rencontre le plan vertical $e\varepsilon$ a sa projection en m, et son rabattement en M à la même distance que N de la droite $e\varepsilon$. La section du plan (Q, Q') par le plan vertical que nous considérons est ainsi rabattue sur la droite εM; son point de rencontre e_1 avec la génératrice eN appartient à la courbe. Si nous relevons le plan, le point e_1 ira se projeter sur le plan horizontal en E, et sur le plan vertical en E', à une hauteur au-dessus de la ligne de terre, donnée par la perpendiculaire e_1E. Le point E' doit d'ailleurs se trouver sur la projection verticale de la génératrice considérée.

Les mêmes constructions devraient être reproduites pour différentes génératrices; mais il est à remarquer que ces droites, faisant les mêmes angles avec leurs projections, se trouveront encore parallèles lorsqu'elles auront été ramenées sur le plan horizontal par le rabattement successif de leurs plans projetants. Il en sera de même des intersections de ces plans avec le plan donné (Q, Q'). En conséquence, après avoir pris sur la trace du cylindre un certain nombre de points convenablement espacés $a, b, c, \ldots$, on tracera les projections des génératrices correspondantes, et l'on obtiendra ainsi sur la trace Q les points $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. On mènera ensuite par les points $a, b, c, \ldots$ et par les points $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des droites respectivement parallèles à ee_1 et à εe_1; les points de rencontre $a_1, b_1, c_1, \ldots$ seront ramenés en A, B, C, ... par des perpendiculaires aux projections des génératrices, et de là en A', B', C', ... sur les projections verticales des mêmes droites.

156. La tangente en un point (D, D') est l'intersection du plan sécant avec le plan tangent le long de la génératrice (dD, d'D'). Si les traces horizontales Q et dp de ces plans se rencontraient dans le cadre de l'épure, nous aurions un second point de la tangente; mais cela n'ayant pas lieu, par un point p de la trace dp, nous concevons une droite parallèle aux génératrices du cylindre. Cette droite est dans le plan tangent, et perce le plan (Q, Q') en un point de la tangente cherchée. Pour trouver ce point nous opérons comme précédemment,

c'est-à-dire que nous traçons la ligne $p\pi$ projection horizontale de la droite, puis les droites pp_1 et πp_1 respectivement parallèles à ee_1 et à εe_1, et enfin que nous ramenons le point d'intersection p_1 de ces deux droites, d'abord en P, puis en P'.

157. Nous obtiendrons la vraie grandeur de la courbe en rabattant son plan sur le plan horizontal. Considérons un point quelconque du plan (Q, Q'), par exemple celui qui se projette en m : il va se placer en un point M_1 sur la perpendiculaire mM_1 à Q, et à une distance de ε égale à la longueur εM qui nous est donnée sur le premier rabattement. Nous avons ainsi la direction εM_1 de la droite εE_1, et nous pouvons placer le point E_1, rabattement de (E, E'), à la distance εe_1.

Les intersections du plan sécant avec les autres plans projetants des génératrices sont parallèles à εE_1 ; nous avons les longueurs de ces lignes sur les premiers rabattements, on construira donc la courbe $A_1B_1C_1\ldots$ sans difficulté.

Pour avoir la tangente au point D_1, on transporte le point (P, P') en P_1 par le même procédé.

158. Pour faire le développement du cylindre, il faut d'abord déterminer sa section droite. Nous traçons une droite $\alpha_1\varepsilon_1$ perpendiculaire aux projections horizontales des génératrices, et nous la considérons comme la trace horizontale d'un plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre. Si l'on conçoit que des points α_1, β_1, γ_1, ... on abaisse des perpendiculaires sur les différentes génératrices, en supposant ces droites entraînées dans les rabattements successifs des plans projetants, on pourra les tracer sur le plan horizontal, et on aura leurs vraies grandeurs $\alpha_1 a_2$, $\beta_1 b_2$, ... Si maintenant le plan de section droite tourne autour de sa trace, toutes les perpendiculaires que nous considérons se mouvront dans les plans projetants des génératrices correspondantes, et se placeront sur leurs projections. Mais, comme la courbe prendrait une position qui jetterait un peu de confusion sur l'épure, nous avons d'abord transporté la trace $\alpha_1\varepsilon_1$ en $\alpha_2\varepsilon_2$, et c'est à partir de cette ligne que nous avons porté les longueurs $\alpha_1 a_2$, $\beta_1 b_2$, ...; nous avons ainsi obtenu les points A_2, B_2, ...

Pour avoir la tangente en D_2, nous opérons sur la parallèle au cylindre menée dans le plan tangent par le point p, comme nous venons de le faire sur les génératrices elles-mêmes. La ligne $\pi_1 p_2$, perpendiculaire à pp_1, donne le point p_2 qui appartient au plan de section droite. La longueur $\pi_1 p_2$ est portée de π_2 en P_2.

159. Le développement est maintenant facile. Nous portons sur une droite indéfinie B_2H_2 (*fig.* 98) les longueurs rectifiées des différents arcs de la courbe $A_2B_2C_2\ldots$ (*fig.* 97), et par les points de division nous élevons des perpendiculaires. Nous portons sur ces droites les segments des génératrices pris sur les rabattements des plans projetants; ainsi les longueurs D_2d et D_2d_1 (*fig.* 98) doivent être égales à d_2d et à d_2d_1 (*fig.* 97).

Nous obtenons les tangentes aux points d et d_1, en plaçant sur le développe-

ment, et dans sa position relative par rapport à la génératrice dd_1, la droite que nous avons menée par le point p parallèlement au cylindre. Sa distance à dd_1 est donnée sur la section droite, c'est la ligne P_2D_2 (*fig.* 97). Les longueurs P_2p_1 et P_2p (*fig.* 98) doivent être égales à p_2p_1 et à p_2p (*fig.* 97).

Les transformées bh et b_1h_1 ont des points d'inflexion. Nous verrons plus loin (art. **169**, note) comment on détermine leur position.

On peut reconstruire le cylindre en découpant et en enroulant la feuille sur laquelle le développement est fait. Il faut que la face du papier qui porte la figure soit sur la partie concave; autrement, par suite de l'ordre adopté dans le développement pour la succession des génératrices, on aurait un cylindre symétrique de celui qui est représenté sur la *fig.* 97.

160. La trace du cylindre est un cercle; la section et ses deux projections sont, en conséquence, des ellipses. Les droites CG et AE sont des diamètres conjugués de la projection horizontale, car la première passe par le milieu de la seconde et est parallèle aux tangentes de l'ellipse à ses extrémités. D'après cela les lignes C'G', A'E' et C_1G_1, A_1E_1 seront des diamètres conjugués de l'ellipse en projection verticale et en rabattement. Les lignes C_2G_2 et A_2E_2 sont les axes de la section droite.

161. La droite qui va du point (E, E') à son rabattement e_1 (*fig.* 97) est inclinée à 45° sur le plan horizontal, parce qu'elle est la corde d'un quart de cercle. Toutes les autres droites analogues qui vont des points (A, A'), (B, B'), ... à leurs rabattements a_1, b_1, ... ont la même inclinaison et sont parallèles dans l'espace. Elles forment ainsi un cylindre dont la courbe (ABC..., A'B'C'...) est la directrice; les points a_1, b_1, c_1 sont par suite sur une ellipse dont les droites a_1e_1 et g_1c_1 sont deux diamètres conjugués.

La droite p_1d_1 est tangente à cette courbe en d_1, car elle est la trace du plan tangent au cylindre dont nous venons de parler, le long de la génératrice qui aboutit au plan d_1.

On peut considérer la courbe $a_1b_1c_1$ et la droite p_1d_1 comme des projections obliques de la courbe d'intersection et de sa tangente au point (D, D').

En raisonnant de la même manière pour les points a_2, b_2, c_2, ..., on verrait qu'ils forment également une ellipse dont les lignes a_2e_2 et g_2c_2 sont deux diamètres conjugués. La droite p_2d_2 est tangente en d_2 à cette ellipse.

162. Il nous reste encore à déterminer le point le plus haut et le point le plus bas de la courbe d'intersection, et ceux des courbes transformées qui sont le plus éloignés de la ligne de section droite B_2H_2 (*fig.* 98). Mais, comme la *fig.* 97 est déjà un peu compliquée, nous nous contenterons d'indiquer les tracés. Nous traiterons d'ailleurs la question d'une manière générale et sans faire aucune supposition sur la forme de la directrice du cylindre.

Si l'on coupe la trace abc... par une droite parallèle à Q, les génératrices qui

passent par les points d'intersection rencontreront le plan sécant à une même hauteur; par suite, si nous menons à cette trace des tangentes parallèles à Q, les génératrices des points de tangence contiendront, l'un le point le plus haut, l'autre le point le plus bas de la courbe d'intersection.

Aux points c et g (*fig.* 97), les tangentes de la trace du cylindre sont parallèles au plan de la section droite; il en résulte que, sur la *fig.* 98, les points c et g sont, l'un le plus bas et l'autre le plus haut de la courbe *bah*.... Pour avoir les points analogues sur la ligne $b_1 a_1 h_1$, ..., il faudrait mener à la courbe d'intersection (*fig.* 97) des tangentes parallèles à la droite suivant laquelle son plan coupe le plan de section droite; car une sécante de même direction déterminerait deux points à égale distance de la section droite (1).

Il est plus exact de reporter l'opération sur la trace du cylindre. Pour cela, nous remarquerons que, si l'on conçoit par l'intersection du plan (Q, Q') et du plan de section droite un troisième plan parallèle aux génératrices du cylindre, il sera parallèle aux plans qui seraient tangents à cette surface aux points cherchés. En menant à la trace du cylindre des tangentes parallèles à la trace du troisième plan, les points de contact seront les extrémités des génératrices qui passent aux points qu'il s'agit de déterminer.

Sections planes du cône.

Ier Exemple. — *Cône de révolution à axe vertical; plan sécant perpendiculaire au plan vertical; section elliptique.* (*Planche XXV.*)

163. Nous nous proposons de déterminer l'intersection par un plan d'un cône de révolution dont l'axe est vertical. Nous prenons le plan sécant (P, P') (*fig.* 104) perpendiculaire au plan vertical; par suite, il projette la courbe sur la partie A'G' de sa trace P', comprise entre les deux génératrices qui forment le contour apparent de la surface.

Pour avoir la projection horizontale, nous divisons la circonférence trace du cône en un certain nombre de parties égales, placées symétriquement par rapport au diamètre ag parallèle à la ligne de terre. Les projections verticales des génératrices qui passent par les points de division coupent la trace P' en des points A', B', C', ... qu'on ramène en A, B et B_1, C et C_1, ... sur leurs projections horizontales.

Cette construction ne peut pas être appliquée aux génératrices qui se pro-

(1) Sur la *fig.* 95, le plan de section droite est le plan horizontal, et les points a' et g', qui sont l'un le plus éloigné et l'autre le plus rapproché de ce plan, sont ceux où la tangente est parallèle à la trace P.

jettent sur la verticale $S'd'$. Pour déterminer sur les projections horizontales Sd et Sd_1 de ces droites les points D et D_1 qui correspondent à D', on peut couper le cône par un plan horizontal $D'\delta'$, et tracer le cercle de section sur le plan horizontal de projection avec un rayon $S\delta$ égal à $D'\delta'$. Si le cône n'était pas de révolution, on pourrait encore employer le plan horizontal $D'\delta'$, mais il faudrait prendre son intersection avec la génératrice (Sd, $S'd'$) que l'on aurait préalablement fait tourner autour de la verticale du point S, de manière à la rendre parallèle au plan vertical.

Pour la ponctuation des projections, nous avons supposé qu'il s'agissait de représenter un tronc de cône.

164. La tangente en un point F de la projection de la courbe est l'intersection du plan tangent le long de la génératrice Sf et du plan sécant; elle a donc sa trace horizontale à la rencontre des droites lf et P, traces des plans. Comme ce point est éloigné, il faut opérer sur un plan horizontal plus élevé, par exemple sur celui qui est à la hauteur du point (D, D'). La génératrice Sf le rencontre au point f_0, et les nouvelles traces du plan tangent et du plan sécant sont les droites f_0t et Sd respectivement parallèles à fl et P. La tangente Ft passe au point t où ces droites se rencontrent.

On peut encore, d'un point (l, l') pris sur la trace fl du plan tangent, mener une droite (lm, $l'm'$) parallèle à la génératrice du contact (Sf, $S'f'$); cette droite sera dans le plan tangent, et le point (m, m') où elle rencontrera le plan sécant appartiendra à la tangente.

165. Pour avoir la courbe en vraie grandeur, nous avons rabattu le plan sécant sur le plan vertical; un point quelconque (F, F') s'est placé en F'' sur la droite F'F'' perpendiculaire à P', et à la distance à laquelle la projection horizontale F se trouve de la ligne de terre.

On obtient par le même procédé les tangentes sur le rabattement. Nous avons déterminé pour la tangente en F'' les points T et M, rabattements des points (t, D') et (m, m').

166. La courbe d'intersection et sa projection sont des ellipses. Nous pouvons facilement trouver leurs axes.

On voit, par la construction même, que la projection horizontale de l'intersection est symétrique par rapport à la droite ASG perpendiculaire à P. Cette droite est donc un axe de la courbe. Le centre est au point milieu O. De même, l'ellipse d'intersection a l'un de ses axes sur la droite (AG, A'G'), et son centre en (O, O'). Le second axe se projette verticalement au point O'; en coupant le cône et le plan sécant par le plan horizontal $O'\omega'$, nous déterminons les points Ω et Ω_1 de la projection horizontale. La droite $\Omega\Omega_1$ est la projection du second axe et le second axe de la projection.

En général, les projections des axes d'une ellipse sont simplement des dia-

mètres conjugués de la projection; mais, si l'un d'eux est parallèle au plan de projection, comme cela arrive ici, les diamètres conjugués comprennent un angle droit (art. **46**) et sont par conséquent les axes.

Traçons une droite S'H parallèle à XY : en considérant un point quelconque (B, B') de la section, on trouve facilement que le rapport de BS à B'H est constant. On en conclut que le point S est un des deux foyers de l'ellipse AG, et que la directrice correspondante est la projection horizontale de la droite d'intersection du plan (P, P') avec le plan horizontal S'H.

On obtient sans difficulté les droites A''G'' et $\Omega'\Omega'_1$, axes de la courbe rabattue.

167. Toutes les génératrices ont la même longueur depuis le sommet jusqu'au plan horizontal. Il en résulte que, dans le développement, la transformée de la circonférence de la base est un arc de cercle dont les génératrices sont les rayons. Après avoir tracé (*fig.* 105) une partie suffisante de la circonférence dont le rayon est S'*a'* (*fig.* 104), nous prenons sur cette ligne des longueurs curvilignes égales aux arcs *ab*, *bc*, ...; nous traçons les rayons correspondants, et nous portons sur eux les longueurs des génératrices comprises entre le sommet et le plan sécant. Pour déterminer ces longueurs, nous rendons les droites parallèles au plan vertical (art. **16**); leurs projections sur ce plan viennent se confondre avec la ligne S'*g'*, et les points d'intersection se transportent sur des horizontales jusqu'à cette droite. Chaque longueur, telle que S'δ', doit être portée sur les rayons correspondants S*d* et Sd_1 (*fig.* 105), à partir du centre S.

Nous avons supposé que la surface était coupée suivant la génératrice (A*a*, A'*a'*), et, pour montrer la continuité de la transformée de la courbe, nous l'avons prolongée de chaque côté sur la partie qui correspond à un des secteurs coniques.

On peut obtenir la grandeur des segments curvilignes *ab*, *bc*, . . . en décomposant une division du cercle de base en petites parties qu'on puisse assimiler à des droites, et les reportant sur l'arc qui a pour rayon la génératrice du cône; mais, comme les erreurs peuvent s'accumuler, il est plus exact de calculer la grandeur en degrés de l'arc qui représente la circonférence de base, de déterminer avec un rapporteur son amplitude sur le développement, et de la partager ensuite en parties égales. La grandeur angulaire de cet arc est $\frac{a\mathrm{S}}{a'\mathrm{S}'} \times 360^\circ$. Le rapport de *a*S à *a'*S' sera souvent donné par la question même; dans tous les cas, on pourra le trouver en mesurant ces lignes.

Il est peu dans l'esprit de la Géométrie descriptive d'employer ainsi le calcul comme auxiliaire, mais il n'y a pas de règle absolue.

168. Les angles de la courbe avec la génératrice ne sont pas altérés dans le développement (art. **122**). Nous aurons donc la tangente au point F (*fig.* 105),

en appuyant sur la génératrice les constructions qui, dans le plan tangent, feraient trouver la tangente à l'ellipse. On peut supposer que la surface, en se déroulant, recueille dans les différents plans tangents les lignes que l'on peut y concevoir et les entraîne avec elle.

D'après cela, nous plaçons sur la *fig.* 105 les droites fl et $f_0 t$ de la *fig.* 104 dans une direction perpendiculaire à Sf; nous traçons lm parallèle à Sf, et nous lui donnons la longueur $l'_1 m'$ (*fig.* 104), véritable grandeur de (lm, $l'm'$). L'un ou l'autre des points t ou m suffit pour le tracé de la tangente.

169. Il est utile de déterminer les inflexions de la transformée; nous allons démontrer qu'elles se trouvent au point où le plan sécant était normal à la surface.

Nous remplaçons d'abord le cône par une pyramide circonscrite que nous supposons coupée par un plan (P, P′) (*fig.* 107) perpendiculaire à l'une de ses faces (GE, G′S′E′). Cette face est parallèle au plan vertical de projection; elle touche le cône le long de la droite (S, S′I).

La section est projetée verticalement sur la trace P′ du plan, et nous aurons sa transformée par développement en amenant par des rotations les diverses faces triangulaires dans le plan GSE parallèle au plan vertical.

Dans le mouvement de rotation de la face F′S′G′ autour de S′G′, le point A′ décrit un arc de cercle dont le centre est au pied a de la perpendiculaire abaissée du point A′ sur S′G′, et vient se placer en un point A'_1, à une distance de a égale à la vraie grandeur de cette perpendiculaire. Le point D′ va de même en un point D'_1 sur la perpendiculaire dD′ à S′E′. La partie de la section projetée verticalement sur A′B′C′D′ est donc en développement A'_1B′C′D'_1.

Le point A'_1 est dans celui des deux angles A′B′S′ et A′B′G′ qui est obtus; il en est de même du point D'_1 par rapport aux angles D′C′E′, D′C′S′. Il est d'ailleurs facile de voir que, quand les points B′ et C′ seront placés d'un même côté du pied O de la perpendiculaire abaissée du sommet S′ sur P′, les angles obtus, et par suite les points A'_1 et D'_1, se trouveront de côtés différents de la droite P′. Or, à moins que la perpendiculaire S′O ne se confonde avec la génératrice S′I du cône, les droites S′G′ et S′E′ pourront toujours être assez rapprochées de cette dernière droite pour que la condition que nous venons d'indiquer soit satisfaite. Nous voyons donc que, lorsqu'on multiplie les faces de la pyramide pour revenir au cône, les sommets A'_1 et D'_1, qui pouvaient d'abord se trouver d'un même côté de B′C′ prolongé, arrivent nécessairement à se placer de côtés différents.

Quand le plan sécant est perpendiculaire à la génératrice S′I (*fig.* 108), les points A'_1 et D'_1 sont du côté de P′ où se trouve le sommet S′, quelle que soit la grandeur de l'angle G′S′E′.

En résumé, dans le développement d'un cône, la transformée d'une section

faite par un plan traverse sa tangente au point où le plan était normal à la surface, à moins toutefois que ce plan ne fût perpendiculaire à la génératrice ([1]).

Ces résultats s'étendent naturellement au cylindre, qui est une variété du cône; ainsi, il est facile de voir qu'au point où nous avons reconnu que la section plane d'un cylindre prenait une inflexion dans le développement (art. **145**), le plan sécant est normal à la surface ([2]).

Nous n'avons indiqué sur les projections horizontales des *fig.* 107 et 108 ni les arêtes, ni la section de la pyramide, parce que ces lignes ne sont pas nécessaires à la démonstration, et qu'elles auraient pu jeter un peu de confusion.

170. Revenons à la *fig.* 104. Du point D' où le plan coupe l'axe, nous abaissons une perpendiculaire D'*k'* sur S'*g'*; cette droite, en tournant autour de l'axe, engendre un cône de révolution qui rencontre orthogonalement le cône donné suivant le cercle décrit par le point *k'*. Le plan (P, P') contient les deux génératrices (SI, D'I') (SI_1, D'I') du cône auxiliaire; il est donc normal au premier cône en deux points (I, I') et (I_1, I'), qui, rapportés sur la *fig.* 105, sont les points d'inflexion de la transformée. On construit les tangentes Iτ, $I_1\tau_1$ comme toutes les autres ([3]).

171. Il n'y aura d'inflexion que quand le plan sécant coupera le cône auxiliaire; d'après cela, en appelant ε et η les angles aigus que l'axe fait avec les génératrices et le plan de section, on aura deux inflexions, si $\varepsilon + \eta < 90^\circ$, et l'on n'aura pas d'inflexion, si $\varepsilon + \eta > 90^\circ$. Les transformées de la section elliptique et de la base circulaire (*fig.* 104 et 105) donnent des exemples de ces deux cas.

Quand les angles ε et η sont complémentaires, le plan sécant est normal en un seul point et perpendiculaire à la génératrice de ce point; par suite la trans-

---

(1) On peut démontrer ces propositions d'une manière directe et très simple, si l'on admet, ce qui est à peu près évident, que la ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur une surface entre deux points a tous ses plans osculateurs normaux à la surface; car une telle ligne tracée sur un cône a pour transformée une droite, d'où il résulte que la circonstance d'avoir un plan osculateur normal suffit pour que le rayon de courbure de la transformée au point correspondant soit infini.

Pour que la transformée d'une courbe plane tracée sur un cône ait un contact du troisième ordre avec sa tangente, il faut que son plan soit perpendiculaire à deux plans tangents consécutifs, et, par suite, à leur intersection, qui est la génératrice de la surface.

Quand nous parlerons des surfaces développables, nous montrerons que les courbures d'une ligne tracée sur une telle surface, et de sa transformée par développement, sont liées par une loi très simple dont la proposition que nous avons démontrée n'est qu'un corollaire.

(2) Sur la *fig.* 98 les points d'inflexion de la courbe *bah* sont *a* et *e*. Pour la courbe $b_1a_1h_1$, il faut déterminer les génératrices le long desquelles le plan tangent est perpendiculaire au plan (Q, Q') (*fig.* 97). Pour cela, par un point quelconque de l'espace, on mènera deux droites, l'une parallèle aux génératrices, l'autre perpendiculaire au plan (Q, Q'); on fera passer un plan par ces lignes, et on cherchera les points de la trace *abcd* où la tangente est parallèle à la trace de ce plan.

(3) On peut encore construire les génératrices de contact des plans tangents perpendiculaires au plan sécant en menant par le sommet (S, S') du cône une perpendiculaire au plan (P, P'), et en faisant passer par cette droite des plans tangents au cône.

formée ne traverse pas sa tangente (art. **169**), mais elle a un contact plus intime avec elle, car cette circonstance se produit quand deux points d'inflexion se réunissent.

Ces divers cas peuvent indifféremment se présenter pour les transformées de l'ellipse, de la parabole et de l'hyperbole; toutefois, il faut remarquer que, si l'angle ε est plus grand que 45°, aucune des ellipses et des paraboles que l'on peut concevoir tracées sur le cône ne prendra d'inflexion dans le développement, et que, si ε est plus petit que 45°, toutes les transformées des paraboles et des hyperboles auront deux inflexions.

IIe EXEMPLE. — *Cône de révolution à axe vertical; plan sécant perpendiculaire au plan vertical; section hyperbolique* (*Planche XXVI.*)

172. Un plan $(mm', m'\mu')$ (*fig.* 106) passant par le sommet et parallèle au plan sécant (P, P') divise les génératrices en deux groupes : celles du premier groupe ont leur trace sur l'arc mam_1, et rencontrent le plan au-dessous du sommet; celles du second ont leur trace sur l'arc mbm_1, et rencontrent le plan au-dessus du sommet. L'intersection est ainsi formée de deux parties et, pour ne pas négliger l'une d'elles, nous considérons les deux nappes du cône, que d'ailleurs nous limitons à des plans horizontaux et parallèles.

On peut construire la courbe en cherchant les points où un certain nombre de génératrices percent le plan; mais, comme les recoupements seraient assez obliques, il est préférable de déterminer les intersections du cône et du plan par divers plans horizontaux. Nous ne reviendrons pas sur ce tracé, que nous avons déjà expliqué à l'article **163**.

173. La génératrice $(Sm, S'm')$ est parallèle au plan, et les génératrices des deux groupes qui sont voisines de celle-là ne le rencontrent que très loin. La courbe présente ainsi deux bras qui s'étendent en sens contraire, l'un sur la nappe supérieure, l'autre sur la nappe inférieure, et se rejoignent à l'infini, au point où la génératrice $(Sm, S'm')$ atteint le plan.

On détermine l'asymptote, comme toute autre tangente, en prenant l'intersection du plan sécant avec le plan qui touche le cône au point correspondant de la courbe, qui est le point situé à l'infini. Ce plan est tangent tout le long de la génératrice $(Sm, S'm')$; sa trace horizontale est la droite me, et le point e où elle rencontre la trace P du plan appartient à l'asymptote.

L'asymptote est parallèle à la génératrice $(Sm, S'm')$, parce que ces droites se rejoignent en un point situé à l'infini. On peut encore dire que le plan (P, P'), étant parallèle à $(Sm, S'm')$, coupe un plan qui contient cette génératrice suivant une droite qui lui est parallèle.

Les constructions pour déterminer l'asymptote peuvent être faites sur le plan

horizontal supérieur. La génératrice Sm perce ce plan en μ; les traces du plan tangent et du plan sécant sont les droites $\mu\varepsilon$ et $\varepsilon\varepsilon_1$: leur point de rencontre ε appartient à l'asymptote.

La génératrice (Sm_1, S$'m'$) également parallèle au plan sécant détermine une seconde branche infinie, dont l'asymptote $e_1\varepsilon_1$ est obtenue de la même manière.

174. La courbe est une hyperbole. Son axe transverse est la droite (aSb, P$'$) parallèle au plan vertical. On détermine sans difficulté les sommets (A, A$'$) et (B, B$'$), et le centre (O, O$'$).

On construit le rabattement par les procédés expliqués pour l'ellipse (art. **165**).

175. Dans le développement, les différents cercles ont pour transformées des arcs de cercle concentriques dont les rayons sont les segments des génératrices; on les trouve en vraie grandeur sur la droite $a'\alpha'$. Nous traçons tout d'abord des longueurs suffisantes de ces arcs, et nous plaçons la génératrice Sb (*fig.* 109).

Nous supposons la surface coupée suivant la génératrice ($a\alpha$, $a'\alpha'$), et nous portons à partir du point b (*fig.* 109), sur le cercle décrit du point S comme centre avec S$'a'$ pour rayon, des longueurs curvilignes égales à la demi-circonférence ba (*fig.* 106). Traçant ensuite les droites aSα et a_1Sα_1 (*fig.* 109), nous avons les deux positions que prend la génératrice ($a\alpha$, $a'\alpha'$), et qui limitent le développement de la surface.

Pour voir où un point (G, G$'$) de la section doit être placé, nous portons sur le cercle décrit avec la longueur S$'g'$ pour rayon, et à partir du point g de la droite Sα (*fig.* 109), une longueur curviligne gG égale à l'arc gG de la *fig.* 106.

176. Nous donnons aux génératrices $m\mu$, $m_1\mu_1$ les positions qui leur conviennent. Dans le développement, les asymptotes restent parallèles à ces droites et à la même distance d'elles : ce sont les droites $e\varepsilon$ et $e_1\varepsilon_1$.

Vu la symétrie de la figure, les asymptotes de la transformée se coupent sur l'axe bB du développement, mais leur point de rencontre Ω n'a rien de commun avec le centre (O, O$'$) de l'hyperbole (*fig.* 106).

En effet, quand la surface se déroule, à chaque instant, la partie déjà développée se trouve dans un plan tangent et y recueille les tangentes qui s'y trouvent. Les tangentes placées dans des plans tangents différents changent ainsi de position les unes par rapport aux autres; il en est de même des asymptotes.

Si l'on prend sur les asymptotes de la transformée les longueurs eO, e_1O$_1$ égales à e''O$''$ et e''_1O$''$ (*fig.* 106), on aura les points O et O$_1$, qui, avant le développement, étaient réunis au centre de l'hyperbole.

Les transformées des deux arcs de la courbe peuvent être tracées sans difficulté. Les nappes sont développées suivant les polygones mixtilignes bN$_1$A$_1$SANb et BII$_1\alpha_1$SαIIB. La nappe supérieure recouvre en développement une partie de la nappe inférieure; cela arrive quand la longueur développée du cercle de base est plus grande que la moitié de la circonférence dont le rayon est S$'b'$ (*fig.* 106),

c'est-à-dire quand $a'b'$ surpasse $S'b'$. Lorsque le triangle $a'S'b'$ est équilatéral, les deux nappes se rejoignent en développement, sans se recouvrir.

La construction exposée à l'article **168** fait trouver deux points d'inflexion I et I_1. Les inflexions sont peu sensibles; cependant on voit qu'elles existent, parce que la courbe, à son sommet B, tourne sa concavité vers le point Ω où ses asymptotes se croisent.

Section parabolique.

177. Si l'on suppose que le plan sécant tourne autour de sa trace P et prenne avec le plan horizontal le même angle que les génératrices, il sera parallèle à $(a\alpha, a'\alpha')$ (*fig.* 106) et au plan qui touche le cône le long de cette droite. La courbe présentera une branche infinie; mais son asymptote, intersection de deux plans parallèles, sera à l'infini. On sait qu'elle est alors une parabole.

Cas général.

178. Les deux cas que nous venons d'expliquer donnent entièrement la solution du problème de la section d'un cône par un plan pour ce qui concerne les projections et la vraie grandeur de la courbe d'intersection.

On fait d'abord passer par le sommet du cône un plan parallèle au plan sécant; les génératrices qu'il peut contenir déterminent des branches infinies, et les intersections des plans tangents correspondants avec le plan donné sont les asymptotes.

Quand un cône n'est pas de révolution, pour faire le développement, il faut partager le périmètre de la base en petites parties que l'on puisse considérer comme droites, puis déterminer les vraies grandeurs des génératrices qui aboutissent aux points de division. On a alors les longueurs des trois côtés d'une série de triangles qu'on peut construire sur un plan, à la suite les uns des autres.

Eu égard au grand nombre de petites longueurs qu'il faut employer, cette méthode ne donne des résultats exacts que quand les constructions sont faites avec beaucoup de soin. Nous devons cependant faire observer que les recoupements ont généralement lieu sous des angles assez ouverts.

Observations sur les sections planes des cônes, la disposition des bras de leurs branches infinies, et les plans tangents à ces surfaces.

179. *Les sections des cônes par des plans parallèles sont des courbes homothétiques.*

Pour prouver ce théorème, nous allons comparer la trace horizontale A d'un

cône (*fig.* 101) avec la section de cette surface par un plan horizontal xy. La génératrice qui passe par le point (M, M′) de la trace A rencontre le plan xy en un point (m, m'), et l'on a

$$\frac{\mathrm{SM}}{\mathrm{S}m} = \frac{\mathrm{S'M'}}{\mathrm{S'}m'} = \frac{\mathrm{S'H}}{\mathrm{S'}h}.$$

Le rapport de deux rayons vecteurs situés sur une même droite est donc constant, et par suite le point S est un centre commun de similitude pour les courbes A et a. La similitude est inverse; il est facile de voir qu'elle serait directe, c'est-à-dire que les rayons vecteurs proportionnels seraient dirigés dans le même sens, si les deux plans XY et xy étaient d'un même côté du sommet.

Si nous supposons la courbe a, non plus sur le plan horizontal de projection, mais remise dans le plan xy, les deux sections seront encore semblables et semblablement placées, mais le centre commun de similitude sera le sommet (S, S′) du cône.

Les droites SG et SG_1, qui sont tangentes à A et passent par le point S, ont leur prolongement tangent à a. Ce sont les projections des génératrices qui forment le contour apparent de la surface par rapport au plan horizontal (art. **120**). Les points G, G_1, g et g_1 sont leurs traces sur les plans de section.

Nous supposons le cône terminé à deux plans $\mathrm{B}'u'$ et $b'v'$ perpendiculaires au plan vertical, et par suite les courbes A et a ont été limitées l'une aux points B et B_1, l'autre aux points b et b_1. Ces points sont homologues dans les deux courbes. La similitude n'est complète que quand les sections sont considérées dans toute leur étendue géométrique, ou bien lorsqu'elles sont ainsi limitées à des points homologues.

180. Le cylindre n'étant qu'une variété du cône, on peut lui appliquer les résultats que nous venons d'obtenir, et l'on trouve que les sections faites dans cette surface par des plans parallèles sont identiques et semblablement placées. Si l'on veut une démonstration directe, il est facile d'approprier la démonstration précédente au cas du cylindre; mais il est plus simple de remarquer qu'en faisant mouvoir un des plans sécants, de manière que ses divers points décrivent les droites parallèles aux génératrices, la section glissera sur la surface et viendra se placer exactement sur la seconde courbe.

181. Si nous considérons l'ensemble des sections qu'on peut concevoir faites dans un cône par des plans parallèles, celle du plan qui contient le sommet S se réduira à un point, ou sera composée de lignes droites.

Toute droite située dans le plan sécant et passant par le point S devra être considérée comme tangente à la section, car elle aura deux points de rencontre au moins, réunis en un seul. Le raisonnement de l'article **108** n'est pas appli-

cable dans ce cas, et l'on voit que le cône n'a pas à son sommet un plan tangent unique.

Nous aurons plusieurs occasions de revenir sur le théorème du plan tangent et les exceptions qu'il comporte ([1]).

182. Nous allons terminer la question des sections planes d'un cône, en cherchant comment les bras d'une branche infinie sont disposés par rapport à leur asymptote.

Soient (Q, Q′) (*fig.* 103) le plan sécant que nous supposons perpendiculaire au plan vertical, et (S, S′) le sommet d'un cône dont la trace horizontale est la ligne indéfinie GK.

Nous faisons passer par le sommet un plan (AA′, A′S′) parallèle à (Q, Q′); sa trace horizontale rencontre la courbe GK en un point A qui appartient à une génératrice (SA, S′A′) parallèle au plan sécant. L'asymptote de la branche infinie correspondante est la droite (*mn*, M′N′) intersection du plan donné avec le plan tangent le long de la génératrice qui lui est parallèle.

Un plan (BB′, B′S′) passant par le sommet et perpendiculaire au plan vertical coupe le cône et le plan tangent le long de la génératrice (SA, S′A′) suivant des droites qui se projettent sur SB et S*b*, et rencontrent le plan (Q, Q′) aux points M et *m*; ce dernier appartient évidemment à l'asymptote.

Si l'on conçoit que le point B se rapproche de A en entraînant *b*, les points M et *m* s'éloigneront indéfiniment et, par conséquent, la courbe s'étend à l'infini en restant du même côté de l'asymptote. Nous supposons que l'arc BA ne rencontre qu'en A la tangente *b*A; on peut toujours prendre le point B assez rapproché de A pour qu'il en soit ainsi.

183. Raisonnant de la même manière pour une génératrice (SC, S′C′) située sur le cône de l'autre côté de (SA, S′A′), on arrive à des résultats analogues; mais, par suite du croisement qui se fait au sommet S, le point d'intersection N est en deçà de l'asymptote, et la branche infinie se compose de deux bras IM, JN qui sont situés de part et d'autre de cette droite.

Si la trace du cylindre avait été une courbe GAK_1 ayant une inflexion en A, on eût trouvé, au lieu du point N, le point N_1 situé de l'autre côté de l'asymptote, et les deux bras de la branche infinie eussent été d'un même côté de cette droite. Mais, dans ce cas, le plan tangent traverse le cône le long de la génératrice de contact (SA, S′A′), de sorte qu'une section plane quelconque présente une inflexion au point qui appartient à cette droite.

Nous pourrions étudier la question en ordre inverse, prendre la courbe à branche infinie pour directrice du cône, et chercher la forme de la trace GK sur

---

([1]) *Voir*, à la Table analytique qui est à la fin de la troisième Partie, les articles : *Plan de rebroussement*, *Sommets d'une développable*, *Sommets des surfaces gauches*.

le plan horizontal. De quelque manière que nous raisonnions, nous arriverons à cette conséquence que les deux bras d'une branche infinie sont ordinairement de côtés différents de leur asymptote, et qu'ils ne se trouvent d'un même côté que dans un cas exceptionnel, celui où l'on doit regarder qu'un point d'inflexion s'est transporté à l'infini ([1]).

184. Ce résultat pouvait être prévu. Si l'on coupe par une droite parallèle à son asymptote une branche infinie disposée comme celles de l'hyperbole, cette sécante aura sur la courbe deux points dont un à l'infini, et si on la transporte parallèlement à elle-même, elle deviendra asymptote quand ces deux points seront réunis. Lorsque les deux bras tels que IM et J_1N_1 sont d'un même côté de l'asymptote, une sécante parallèle à cette droite peut couper la courbe en deux points à distance finie; s'ils se réunissent au point d'intersection qui est à l'infini, il y a asymptotisme avec inflexion.

Il est facile de voir que deux bras tels que JN et J_1N_1, qui s'étendraient dans la même direction, donneraient un rebroussement à l'infini.

On peut étudier de la même manière la disposition des bras des branches *paraboliques*, c'est-à-dire infinies sans asymptote.

CHAPITRE V.

SURFACES DE RÉVOLUTION.

Définition et principales propriétés.

185. La surface qu'une courbe plane BC (*fig.* 102) engendre en tournant autour d'une droite AZ contenue dans son plan est dite *de révolution*. La droite fixe est l'*axe* de la surface; la courbe génératrice en est la *méridienne;* son plan est le *plan méridien*.

Quand la méridienne est symétrique par rapport à l'axe, par exemple un cercle tournant autour de l'un de ses diamètres, il lui suffit d'une demi-révolution pour engendrer toute la surface. Dans le cas contraire, une révolution complète est nécessaire; alors chaque plan passant par l'axe contient deux courbes identiques dans des positions symétriques.

([1]) Deux sections planes d'un même cône sont la *projection conique* l'une de l'autre. En étudiant la projection conique d'une courbe et d'une de ses tangentes sur un plan convenablement placé, nous avons pu étudier la disposition des branches infinies des courbes. On emploie souvent ce mode de transformation dans les discussions et les recherches de la Géométrie.

Un point quelconque M de la méridienne décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre O est sur l'axe. Ce cercle a reçu le nom de *parallèle*.

On peut considérer la surface comme engendrée par un cercle mobile soumis aux conditions de rencontrer une courbe *bc*, d'avoir son centre sur une droite AZ, et d'être dans un plan perpendiculaire à cette droite. La directrice *bc* engendrerait la surface par sa révolution autour de l'axe; si elle est plane et si son plan contient l'axe, c'est la méridienne dans une de ses positions.

186. En un point quelconque M de la surface, la tangente MT au parallèle, étant perpendiculaire au rayon OM et à l'axe OZ, l'est aussi au plan de ces deux droites, qui est le plan méridien du point M. Le plan tangent au point M contenant MT sera également perpendiculaire au plan méridien. Ainsi, *tout plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien du point de contact.*

La normale MN à la surface au point M, étant perpendiculaire au plan tangent, se trouve dans le plan méridien, et par conséquent va rencontrer l'axe en un point N.

Si le plan méridien OMN tourne autour de AZ, en entraînant toutes les lignes qu'il contient, la droite MN engendrera un cône de révolution dont le parallèle sera la base; elle rencontrera donc toujours à angle droit la tangente de ce cercle, et par suite elle sera normale à la surface, car elle l'est déjà à la méridienne dans toutes ses positions. Ainsi, *les normales à une surface de révolution, aux différents points d'un même parallèle, forment un cône de révolution dont le sommet est sur l'axe.*

187. Quand on veut résoudre des problèmes relatifs à une surface de révolution, on prend l'un des plans de projection perpendiculaire à son axe; c'est généralement celui que l'on considère comme horizontal. Les deux projections de l'axe sont alors un point O et une verticale O′Z (*fig.* 110). On appelle *plan méridien de front* le plan passant par l'axe et parallèle au plan vertical. La méridienne qu'il contient se projette en vraie grandeur sur le plan vertical; dans l'épure qui nous occupe, elle se compose de deux courbes identiques G′B′E′C′ et $G'_1B'_1E'_1C'_1$ symétriquement placées par rapport à l'axe.

188. Proposons-nous de trouver la projection verticale du point de la surface dont la projection horizontale est un point donné *m*. Si nous supposons que le point cherché se transporte sur son parallèle jusque dans le plan du méridien de front, sa projection *m* décrira un arc de cercle dont le point O sera le centre, et se placera en *n* sur OB; sa projection verticale se trouvant alors sur la méridienne G′E′ sera nécessairement *n′* ou *n″*. Si nous ramenons maintenant le point dans sa position, sa projection verticale se transportera horizontalement en *m′* ou *m″*, sur la perpendiculaire menée du point *m* à la ligne de terre.

On eût trouvé les mêmes points m' et m'' en transportant le point m sur la projection $B_1 C_1$ de la *méridienne inverse*.

Si la perpendiculaire à la ligne de terre menée par un point n n'avait pas rencontre la méridienne de front, il n'y aurait pas eu de solution; il faut donc que le point n soit entre les points C et B, ce qui nous montre que les parallèles des points (C, C') et (B, B') forment le contour apparent de la surface sur le plan horizontal. En tous les points de ces parallèles la tangente au méridien est verticale, et le plan tangent qui la contient est également vertical.

189. Si l'on avait donné la projection verticale m' d'un point de la surface, on eût trouvé la projection horizontale correspondante par la même construction faite en ordre inverse. Ainsi, le point m' aurait été porté sur la méridienne de front en n' par une horizontale, puis projeté en n sur CB, et ramené par un arc de cercle en m ou m_0 sur la perpendiculaire menée du point m' à la ligne de terre.

L'horizontale du point m' coupe la méridienne en un second point N' qui fait trouver deux autres solutions M et M_0.

On reconnaît facilement que le point m' ne serait la projection d'aucun point de la surface, s'il était en dehors du périmètre mixtiligne $G'B'E'B'_1G'_1$. On voit ainsi que le contour apparent de la surface sur le plan vertical est formé par les deux segments de droite $E'E'_1$ et $G'G'_1$, et par les deux demi-cercles $E'B'G'$, $E'_1B'_1G'_1$.

Si le point m' se trouvait dans l'intérieur de l'une des deux méridiennes $G'E'$ et $G'_1E'_1$, on n'aurait que deux solutions. Les arcs $G'C'E'$ et $G'_1C'_1E'_1$ ont le caractère de contour apparent pour la partie intérieure de la surface; ils formeraient réellement le contour apparent d'un corps qui serait engendré par la révolution de l'aire $G'C'E'd'a'$. En tous les points des deux méridiennes de front $E'G'$ et $E'_1G'_1$, la tangente du parallèle est perpendiculaire au plan vertical, et le plan tangent qui la contient est également perpendiculaire à ce plan.

190. Proposons-nous maintenant de construire le plan tangent au point (m, m') de la surface de révolution considérée (*fig.* 110).

Pour avoir au point donné la tangente de la méridienne, nous amenons cette courbe dans le plan méridien de front par une rotation autour de l'axe; le point (m, m') se place en (n, n'); nous pouvons tracer la tangente $n'F'$, et déterminer le point F où elle perce le plan horizontal. Si la méridienne est ramenée dans sa première position, le point F décrit un arc de cercle autour du point O et s'arrête en f sur la droite Om, la tangente se meut sur un cône de révolution dont le sommet est au point K de l'axe, et ses projections définitives sont mOf, $m'Kf'$; ses traces f et H' appartiennent aux traces du plan tangent.

Ce plan contient encore la tangente du parallèle, qui est horizontale et perpendiculaire à la droite mOf : la trace horizontale fL de ce plan est donc aussi perpendiculaire à la droite mOf en f; sa trace verticale est déterminée par les points H' et L.

Pour démontrer la perpendicularité de fL sur mOf, on peut dire que Of est la projection de la normale à la surface, ou encore que, le plan horizontal et le plan tangent étant l'un et l'autre perpendiculaires au plan méridien Om, leur intersection, qui est la trace fL, est perpendiculaire au plan méridien, et par suite à sa trace.

En menant la droite $n'R$ perpendiculaire à $n'F'$, nous déterminerons sur l'axe le point R, sommet du cône formé par les normales à la surface le long du parallèle $(mn, m'n')$. La droite Rm' est donc la projection verticale de la normale au point (m, m'), et elle doit par suite rencontrer à angle droit la trace $H'L$ du plan tangent (art. **40**).

191. En raisonnant comme nous l'avons fait pour le cône à l'article **181**, on reconnaît qu'une surface de révolution n'a pas de plan tangent unique aux points où la méridienne rencontrerait l'axe obliquement, mais en ces points-là seulement.

Au point (n, n') (*fig.* 110) les tangentes au méridien et au parallèle sont de côtés différents de la surface; le plan qui contient toutes les tangentes coupe donc la surface. Nous rencontrerons d'autres exemples de cette disposition, qui conduit à une question intéressante dont nous aurons à nous occuper dans la seconde Partie de cet Ouvrage.

Le plan tangent au point (N, N') ne coupe pas la surface et n'a que ce point de commun avec elle.

Enfin le plan du parallèle supérieur $G'G'_1$ et celui du parallèle inférieur $E'E'_1$ sont tangents chacun tout le long du parallèle qu'il contient.

Sections planes. — (*Pl.* XXIX, *fig.* 112).

192. La méridienne est $(ED, E'D')$, l'axe $(O, O''Z)$; $R\alpha$ et $\alpha'H'$ sont les traces du plan sécant sur le plan horizontal et sur le plan méridien de front αT. Ce plan est notre plan vertical; mais, pour empêcher les deux projections de se superposer, nous l'éloignons de la longueur $\alpha\alpha'$ avant de le rabattre.

Nous coupons le plan et la surface par une série de plans horizontaux convenablement espacés. Les sections du plan donné sont des droites parallèles à αR, dont on obtient les projections horizontales en ramenant en $\beta, \gamma, \ldots$ les points $\beta', \gamma', \ldots$ où la trace $\alpha'H'$ rencontre les horizontales $\beta'B''$, $\gamma'C''$, $\ldots$, traces verticales des plans auxiliaires. Les sections de la surface sont des parallèles qui se projettent horizontalement en vraie grandeur. Les rencontres respectives des droites et des cercles donnent, sur le plan horizontal, les points $1, 2, 3, \ldots$, qu'on relève sur les projections verticales des parallèles en $1', 2', 3', \ldots$.

193. On reconnaît par la construction même que l'intersection du plan donné

avec le plan méridien qui lui est perpendiculaire est un axe de la courbe. La projection horizontale OR de cette droite est également un axe de la projection de la courbe. Sur le plan vertical la droite O′R′, rencontrant obliquement les cordes horizontales qu'elle partage en parties égales, est simplement un diamètre de la projection.

Pour avoir les points où le plan vertical OR rencontre l'intersection, nous le faisons tourner autour de l'axe, de manière à le rabattre sur le plan méridien de front. La droite (OR, O′R′) devient (OR_1, $O'R'_1$) et coupe la méridienne $D'_1E'_1$ aux points (m', m'_1) et (n', n'_1) qu'on ramène l'un en (m, m') et l'autre en (n, n'). A ces points, la tangente est horizontale, et par suite ses projections sont respectivement parallèles à Rα et à la ligne de terre.

La tangente est également horizontale aux points (6, 6′) et (13, 13′) qui sont situés sur le parallèle supérieur, et qui, par conséquent, sont les plus élevés de la courbe.

La construction qui nous a donné les points (m, m') et (n, n') peut servir pour déterminer les points de l'intersection situés sur un méridien quelconque, et par suite pour tracer la courbe.

194. La tangente en un point (5, 5′) de l'intersection est contenue dans le plan tangent et dans le plan sécant. Si nous ramenons le point considéré dans le plan méridien de front par une rotation autour de l'axe, il se placera en (B, B′) et nous pourrons tracer la tangente B′T′ à la méridienne. Elle perce en (T, T′) le plan horizontal 17′, 2′ que nous choisissons pour cette construction. Nous ramenons le point T en T_1 sur la droite O5, et la trace du plan tangent est la droite T_1T_2, perpendiculaire à OT_1. La trace du plan sécant sur le point horizontal choisi est 17, 2. Le point de rencontre T_2 et le point T'_2 qui lui correspond sur l'horizontale 17′, 2′ font connaître la tangente ($T_2 5$, $T'_2 5'$).

Nous avons opéré sur un plan horizontal plus élevé que celui qui nous avait d'abord servi, afin de maintenir les constructions dans le cadre de l'épure.

Par suite des symétries que nous avons établies, les tangentes aux points (5, 5′) et (14, 14′) rencontrent la droite (RO, R′O′) en un même point (K, K′).

195. La projection horizontale de l'intersection touche les parallèles qui forment le contour apparent de la surface aux points 3 et 16 d'une part, 9 et 10 de l'autre (art. **149**).

La trace α'H′ coupe la méridienne $E'_1D'_1$ aux points u' et v'; la projection verticale de la courbe passe par ces points, et y est tangente à la méridienne, qui doit être considérée comme le contour apparent de la surface (art. **189**). La projection traverse la méridienne en divers points, dont un se trouve entre 2′ et 3′; ces rencontres ne correspondent pas à un point commun dans l'espace.

La projection verticale de l'intersection paraît se confondre, sur une petite longueur, avec la méridienne E′D′; mais en réalité elle la traverse seulement, et

ces courbes ne se rencontrent même pas dans l'espace, comme on le voit par la projection horizontale [1].

196. Les deux projections de la courbe se correspondent point à point; ainsi le point 5 est la projection d'un seul point de la courbe qui est projeté verticalement en 5'. Il résulte de là que toute droite perpendiculaire à la ligne de terre rencontre les deux projections de l'intersection en un même nombre de points, et que ces projections ont des tangentes communes perpendiculaires à la ligne de terre; il y en a quatre : chacune d'elles forme les deux projections d'une même tangente de la courbe de l'espace. On voit immédiatement la position approximative des points de contact de ces lignes : l'un d'eux est entre (4, 4') et (5, 5'); mais on ne peut le déterminer d'une manière un peu précise que par une *courbe d'erreur*.

Après avoir tracé la tangente $4.t_2$ au point 4, nous cherchons dans le cercle dont le rayon est $4.t_2$ la longueur $4.c$ du sinus de l'angle qu'elle fait avec une perpendiculaire à la ligne de terre. Nous déterminerons ensuite, dans des cercles de même rayon, les sinus des angles analogues pour d'autres tangentes : on trouve pour celle du point 5 la ligne bb'.

Ces longueurs sont ensuite portées sur les traces des différents plans auxiliaires, à partir d'une verticale $\lambda\lambda_1$ (*fig.* 113), à droite ou à gauche de cette droite, suivant que, sur le plan horizontal, elles sont à droite ou à gauche des perpendiculaires t_2c, T_2b,... à la ligne de terre. Quand on a déterminé un nombre suffisant de points a', b', c', d', on les unit par une courbe, et le point e' où elle coupe la verticale $\lambda\lambda_1$ fait connaître la hauteur du parallèle qui contient le point pour lequel l'angle analogue à bT_2b' est nul. Par crainte de jeter un peu de confusion sur l'épure, nous n'avons pas fait les opérations pour déterminer les points de la courbe qui sont sur ce parallèle.

Les autres points de l'intersection où la tangente est perpendiculaire à la ligne de terre sont situés près de (17, 17'), (12, 12') et (v, v').

Principales propriétés de l'hyperboloïde de révolution. (*Pl. XXVIII, fig.* 111.)

197. Nous allons nous occuper de la surface engendrée par la révolution d'une droite autour d'un axe qu'elle ne rencontre pas; nous établirons tout d'abord celles de ses propriétés qui nous seront utiles pour les constructions.

---

[1] Si la courbe d'intersection coupait deux fois la méridienne (ED, E'D') près le point (7, 7'), elle aurait sur le plan vertical, avec cette ligne qui forme contour apparent, deux points de contact analogues à u' et v'. Alors, en déplaçant le plan sécant, on pourrait réunir ces points, et les courbes simplement tangentes dans l'espace auraient en projection un contact du troisième ordre.

Rien dans notre raisonnement n'est spécial aux surfaces de révolution; ainsi nous voyons que, *quand*

L'axe est la verticale (O, $O'e'$); ae et $a'e'$ sont les projections de la génératrice dans sa position initiale, que nous supposons parallèle au plan vertical.

Un point quelconque (p, p') décrit un parallèle qui se projette en vraie grandeur sur le plan horizontal. La perpendiculaire abaissée du point O sur ae donne la plus courte distance de l'axe à la génératrice, et le point (e, e') de cette droite, étant le plus rapproché de l'axe, décrit le plus petit parallèle ou *cercle de gorge*. Toutes les génératrices sont à la même distance de l'axe; par suite, leurs projections horizontales se trouvent également éloignées du point O, et tangentes à la projection du cercle de gorge. Aucun point de la surface ne peut se projeter dans l'intérieur de ce cercle, qui présente ainsi le caractère géométrique de contour apparent, et doit être tangent, en projection horizontale, à toutes les lignes qu'il rencontre sur la surface, à moins que leur tangente au point de contact ne soit verticale (art. **189**). La trace horizontale de la surface est le parallèle décrit par le point (a, a').

Sur la figure, nous avons limité la génératrice au plan horizontal de projection et au plan du cercle de gorge; mais elle doit être considérée comme indéfinie.

198. Prolongeons la droite ae jusqu'à sa seconde rencontre avec la trace de la surface en a_1, relevons ce point en a'_1 sur la ligne de terre, et traçons la droite a'_1e' : les deux droites $(ae, a'e')$ et (a_1e, a'_1e') engendrent la même surface dans leur révolution autour de l'axe, car on voit, par la symétrie de la figure, que deux points (p, p'), (p_1, p'_1) situés à la même hauteur décrivent le même cercle.

Ces nouvelles génératrices rectilignes sont, comme les premières, à une distance de l'axe donnée par la ligne Oe; leurs projections sont donc aussi tangentes à la projection horizontale du cercle de gorge, ce qu'il était facile de prévoir, puisque ce cercle forme contour apparent.

199. Supposons que l'on donne la projection horizontale m d'un point situé sur la surface, au-dessous du plan du cercle de gorge : en traçant la projection horizontale nmn_1 du parallèle qui passe par ce point, nous déterminerons, sur les génératrices initiales des deux *systèmes*, les points (n, n') et (n_1, n'_1) qui décrivent ce cercle, et nous obtiendrons sa projection verticale $n'n'_1$, sur laquelle nous pourrons relever la projection m' du point.

Quand le point (n, n') vient en (m, m'), la projection ane de la première génératrice, toujours tangente au cercle de gorge, prend la position smr, et l'on obtient la projection verticale correspondante $s'm'r'$, en relevant les points s et r, respectivement sur $A'A'_1$ et $F'G'$. De même, quand le point (n_1, n'_1) vient en (m, m'), la génératrice $(a_1n_1e, a'_1n'_1e')$ prend la position $(s_1mr_1, s'_1m'r'_1)$. Il passe donc par le point (m, m') deux génératrices faciles à déterminer : elles sont leurs

---

une courbe tracée sur une surface est tangente à son contour apparent, le contact s'élève au troisième ordre sur le plan de projection.

propres tangentes, et par suite le plan tangent de la surface au point m a pour traces ss_1 sur le plan horizontal de projection, et rr_1 sur le plan du cercle de gorge. Ces droites sont perpendiculaires à la trace Om du plan méridien, comme nous savons que cela doit être (art. **190**).

Si le point de la surface projeté en m avait été au-dessus du plan du cercle de gorge, on eût relevé n sur a'_1e' en n'', et n_1 sur $a'e'$; les traces des génératrices projetées sur mr et mr_1 eussent été aux points de rencontre du cercle AA_1 avec ces droites prolongées au delà de r et de r_1.

200. Si le point de contact m change de position en restant toujours sur la génératrice rs, la droite ss_1 tourne autour du point s. Le plan tangent n'est donc pas le même aux divers points d'une génératrice rectiligne, ainsi que cela a lieu pour les cônes et les cylindres.

On remarquera encore que le plan tangent coupe la surface suivant les droites rs et r_1s_1. Ce résultat et celui que nous avons obtenu à l'article **191** nous montrent que le plan déterminé par les tangentes à toutes les courbes qui se croisent sur une surface en un point se présente quelquefois comme plan sécant.

201. Si nous supposons que l'horizontale (Oe, e') tourne de 180°, en entraînant avec elle la génératrice $(ea_1, e'a'_1)$, cette droite prendra la position $(\varepsilon b_1, e'a')$, et elle sera évidemment parallèle à $(ea, e'a')$. Nous voyons donc qu'une génératrice du premier système est toujours parallèle à une génératrice du second.

Les génératrices parallèles ea et εb_1 déterminent le plan tangent à la surface au point infiniment éloigné où elles se rencontrent, comme rs et r_1s_1 déterminent le plan tangent en m. Les traces de ce plan tangent à l'infini sont ab_1, $eO\varepsilon$ et $a'e'$ sur le plan horizontal de projection, le plan du cercle de gorge et le plan vertical.

202. On construit la méridienne en relevant sur le plan vertical les points où les projections horizontales des différents parallèles rencontrent la droite AOA_1, trace du méridien principal : ainsi P en P'. On a

$$\tang^2 a'e'O' = \frac{\overline{p'i}^2}{\overline{e'i}^2}.$$

On déduit de cette équation

$$\tang^2 a'e'O' = \frac{\overline{P'i}^2 - \overline{eO}^2}{\overline{e'i}^2},$$

en remarquant que les longueurs $p'i$ et $P'i$ sont égales au côté pe et à l'hypoténuse pO du triangle rectangle pOe.

L'angle $a'e'O'$ et le rayon eO du cercle de gorge sont constants; les longueurs $e'i$ et $P'i$ peuvent être considérées comme les coordonnées du point quelconque P'

de la méridienne : on voit, d'après cela, que cette courbe est une hyperbole. Cette circonstance a fait donner à la surface le nom d'*hyperboloïde de révolution* (1).

Toute hyperbole peut être déterminée par l'équation qui précède, au moyen de valeurs convenables de l'angle $a'e'O'$ et du rayon eO; il en résulte que la surface engendrée par la révolution d'une hyperbole quelconque autour de son axe non transverse admet toujours deux systèmes de génératrices rectilignes.

203. La méridienne que nous venons de construire est de front; elle forme, par suite, le contour apparent de la surface sur le plan vertical (art. **189**) et les projections des génératrices lui sont toutes tangentes. Ainsi la droite $s'_1 r'_1$ devra être tangente à l'hyperbole au point v'_1, projection verticale de l'intersection de la génératrice $(s_1 r_1, s'_1 r'_1)$ avec le plan méridien AA_1. Supposons maintenant que la droite $(s_1 r_1, s'_1 r'_1)$ tourne sur la surface, de manière que le point (r_1, r'_1) se rapproche de (e, e'); le point de contact v'_1 s'éloignera, et sera à l'infini quand la droite $r_1 s_1$ aura pris la position ea_1. La droite $a'_1 e'$ est donc une tangente de la méridienne dont le point de contact s'est éloigné à l'infini, c'est-à-dire une asymptote. La projection horizontale de cette ligne est $O\alpha_1$; on voit qu'elle est parallèle aux deux génératrices $(ea_1, e'a'_1)$, $(\varepsilon b, e'a'_1)$ et dans le même plan qu'elles.

Par les mêmes raisons, la droite $(O\alpha, e'a')$, seconde asymptote de l'hyperbole méridienne, est parallèle aux génératrices $(ea, e'a')$, $(\varepsilon b_1, e'a')$ et dans le plan qu'elles déterminent.

On peut construire la méridienne en déterminant les points où les génératrices percent le plan vertical AA_1. De cette manière on obtient les tangentes à la courbe et leurs points de contact.

204. Si nous supposons que l'on fasse tourner d'un même mouvement l'asymptote $O\alpha$ et les génératrices parallèles ea et εb_1, ces droites resteront parallèles, et dans un même plan mobile avec elles; pendant que les deux dernières décriront la surface, la première, toujours asymptote de l'hyperbole méridienne dans les différentes positions, engendrera un cône dont le sommet sera au point (O, e'), qui est le centre du cercle de gorge, des hyperboles et de la surface. On appelle ce cône *cône asymptote*.

Le plan $(ab_1, a'e')$, tangent au point infiniment éloigné où les génératrices ea et εb_1 se rencontrent, est évidemment tangent au cône asymptote, le long de la génératrice parallèle $O\alpha$.

En résumé :

1° Tout hyperboloïde de révolution est asymptote d'un cône également de révolution;

---

(1) En Géométrie générale on considère deux hyperboloïdes de révolution : l'un à *une nappe* est celui dont nous nous occupons, l'autre à *deux nappes* est engendré par la révolution d'une hyperbole autour de son axe transverse. Nous ne parlerons pas de ce dernier, qui n'est d'aucune utilité dans les arts graphiques.

2° Ce cône est *directeur* pour les deux systèmes, c'est-à-dire que ses génératrices sont respectivement parallèles à celles de la surface dans les deux systèmes;

3° Les plans tangents au cône asymptote contiennent les génératrices de l'hyperboloïde parallèles à la génératrice de contact du cône, et sont tangents à l'hyperboloïde au point infiniment éloigné où ces droites se rencontrent.

Sections planes de l'hyperboloïde de révolution.

Ier Exemple. — *Axe vertical; section elliptique* (*Planche XXX.*)

205. L'axe de la surface est la verticale (O, O″L′) (*fig*. 114); les projections de la génératrice considérée dans sa position initiale, que nous supposons parallèle au plan vertical, sont (aL, a'L′); enfin les traces du plan sécant sur le plan horizontal et sur le plan méridien de front sont αR et α'O′.

Des plans auxiliaires horizontaux B′β', C′γ', ... coupent le plan donné suivant des droites β8, γ7, ..., et l'hyperboloïde suivant des parallèles 2b8, 3c7, ... Les points de rencontre des droites et des cercles situés dans les mêmes plans auxiliaires appartiennent à la courbe; on les obtient immédiatement sur le plan horizontal, et on les relève sur les droites B′β', C′γ', ... du plan vertical.

La tangente en un point (3, 3′) passe par le point T, intersection de la trace Rα du plan sécant avec la trace $a_1 a_2$ du plan tangent (art. **199**).

206. La droite (OR, O′R′), intersection du plan sécant par le plan méridien qui lui est perpendiculaire, est un axe de la courbe dans l'espace; OR est également un axe de la projection horizontale; O′R′ est le diamètre de la projection verticale conjugué avec les cordes horizontales (art. **193**).

Les points (1, 1′) et (5, 5′), où l'axe (OR, O′R′) rencontre la surface, sont deux sommets de l'intersection. On les détermine facilement, lorsque la méridienne est tracée, en faisant tourner, autour de l'axe de révolution, la droite (OR, O′R′) de manière à la rendre parallèle au plan vertical, et en prenant alors ses rencontres avec cette courbe. Nous allons nous proposer de déterminer les sommets (1, 1′) et (5, 5′) sans tracer la méridienne.

207. Si la droite (OR, O′R′) tourne autour de l'axe de révolution, elle engendre un cône dont nous pourrons construire les intersections avec la génératrice (aL, a'L′) de l'hyperboloïde (art. **121** a). Lorsque les deux génératrices du cône qui passent par les points de rencontre auront été obtenues, en amenant successivement chacune d'elles à coïncider avec (OR, O′R′), les points déterminés resteront sur l'hyperboloïde et donneront les sommets cherchés.

Le cône engendré par la révolution de la droite (OR, O′R′) a pour trace le cercle RQP. Nous menons par le point (O, O′) une parallèle à (aL, a'L′), et nous déterminons sa trace horizontale g : le plan passant par le point (O, O′) et par

la génératrice donnée (aL, a'L') a pour trace l'horizontale ag, et coupe le cône suivant les deux droites OP et OQ. La première rencontre la génératrice aL au point p; si nous la faisons tourner autour de l'axe jusqu'à ce qu'elle prenne la position OR, le point p se place au point 1, que nous relevons en 1'.

L'autre droite OQ coupe la génératrice aL de l'hyperboloïde, au delà du sommet du cône, en un point q, que l'on ramène en (5, 5').

Les tangentes en 1 et en 5 à la projection horizontale de la section sont perpendiculaires à OR; les tangentes en 1' et en 5' à sa projection verticale sont perpendiculaires à O''O'.

208. En construisant notre épure, nous avons déterminé tout d'abord les points (1, 1') et (5, 5'); puis nous avons choisi des plans horizontaux auxiliaires disposés de manière à partager en parties égales la différence de hauteur des points 1' et 5'. Le plan passant par le milieu (I, I') de l'axe (1.5, 1'.5') fait connaître les sommets (3, 3') et (7, 7') du second axe. Nous savons que la courbe est une section conique; elle a quatre sommets : c'est donc une ellipse. Nous avons les deux axes 1.5 et 3.7 de la projection horizontale, et deux diamètres conjugués 1'.5' et 3'.7' de la projection verticale. La tangente (T3, T'3'), obtenue directement, doit être parallèle à (OR, O'R').

209. Pour représenter sur le plan vertical l'hyperboloïde tronqué, nous avons déterminé les arcs d'hyperbole qui forment le contour apparent du corps; ils se terminent en des points u' et v' de la trace du plan sécant sur le plan méridien de front. L'ellipse d'intersection passe par ces points, et y est nécessairement tangente, en projection, au contour apparent.

Si l'on voulait obtenir d'une manière précise les points u' et v', on opérerait comme nous l'avons fait pour les points 1' et 5', en considérant un cône auxiliaire engendré par la révolution de la droite (Oα, O'α') autour de l'axe. La construction est faite pour le point v'.

La génératrice (aL, a'L') a été tracée, comme une ligne existant réellement, jusqu'au point (h, h') où elle rencontre le plan sécant.

210. *Discussion de la forme de la courbe de section.*

La courbe est toujours une section conique [1]; il est intéressant de savoir

---

[1] Nous admettons les principales propriétés des surfaces du second degré, et du moment qu'il est prouvé que la surface engendrée par une droite qui tourne autour d'un axe qu'elle ne rencontre pas est un hyperboloïde, nous en concluons que ses sections planes sont des sections coniques; mais il serait très facile de le prouver.

Un point tel que 8 est donné par l'intersection d'une droite 2.8 avec un cercle. La distance à laquelle la droite se trouve du point O est proportionnelle à l'abaissement du plan auxiliaire 2'.8', au-dessous de O'; le carré du rayon du cercle est facile à trouver d'après les constantes du problème, et l'abaissement du plan au-dessous de L' (art. 202). Ces indications suffisent pour montrer comment on peut trouver une relation entre les longueurs Oe et e8, que l'on peut considérer comme les coordonnées du point 8.

comment on peut promptement reconnaître son espèce, d'après la manière dont les constructions se disposent.

La droite *ag*, trace horizontale du plan qui passe par la génératrice donnée et par le point (O, O′) où l'axe perce le plan sécant, peut couper le cercle PQR, trace du cône auxiliaire, le toucher ou ne pas le rencontrer : de là trois cas à examiner.

1° *La droite ag coupe le cercle* PQR.

A chacun des points P et Q d'intersection correspond un sommet (1, 1′) ou (5, 5′). La courbe a donc deux sommets sur l'axe (OR, O′R′).

Si l'on suppose que le plan sécant soit perpendiculaire au plan vertical (*fig.* 115), les points 1′ et 5′ seront les intersections du contour apparent avec la trace verticale S′ du plan sécant, et ils limiteront, sur cette trace, la projection de la courbe. Quand ils se trouveront de côtés différents de l'axe de révolution, comme cela a lieu sur la trace S′, l'intersection se projettera sur le segment 1′.5′ et sera nécessairement une ellipse. S'ils sont d'un même côté de l'axe, comme sur la trace S″, le segment 1″.5″, étant en dehors du contour apparent, sera parasite (art. **97**), et ses prolongements à l'infini formeront la projection de la courbe, qui sera évidemment une hyperbole.

D'après cela, pour connaître l'espèce de la section, il suffit de voir si les points 1 et 5 (*fig.* 114) sont d'un même côté du point O ou de côtés différents.

Sur la *fig.* 114, la droite *a*L rencontre les génératrices OP et OQ du cône auxiliaire, l'une OP en un point *p* placé du côté du sommet O où est sa trace P, l'autre OQ en un point *q* situé sur son prolongement au delà de O. Il résulte de là que les points 1 et 5 se trouvent de côtés différents du point O, et que la courbe est une *ellipse*.

Si la génératrice *a*L est parallèle à l'une des lignes OP et OQ, un des deux sommets qui sont sur la droite OR s'éloignera à l'infini, et la courbe sera une *parabole*.

Enfin, si la génératrice *a*L rencontre les droites OP et OQ, toutes deux en deçà du point O, ou toutes deux au delà, les sommets 1 et 5 se trouveront d'un même côté de l'axe, et la courbe sera une *hyperbole*.

2° *La droite ag touche le cercle* PQR.

Le plan qui contient la génératrice *a*L, et dont *ag* est la trace, touche le cône auxiliaire, et se trouve, par rapport à l'hyperboloïde, dans une position identique avec celle du plan sécant. Celui-ci contient donc une génératrice, et, comme la section est symétrique par rapport à OR, on voit qu'une seconde droite appartenant à la surface s'y trouve également contenue : le plan est tangent à leur point de rencontre.

Dans le cas que nous examinons, les droites OP et OQ sont confondues, et les deux sommets sont réunis en un point où se croisent les *deux droites* qui forment

la section. Ce point disparaîtrait à l'infini, et les droites seraient parallèles, si la droite sur laquelle OP et OQ se réunissent était parallèle à la génératrice aL.

3° *La droite ag ne rencontre pas le cercle* PQR.

Dans ce cas, la droite OR est un axe sans sommets, un axe non transverse, et par suite la courbe est une *hyperbole*. Nous allons examiner ce cas, qui nous donnera une occasion d'étudier directement la question des branches infinies et des asymptotes.

On peut encore déterminer l'espèce de la conique en cherchant à construire ses asymptotes. Nous donnons, dans l'exercice suivant, un exemple de cette manière d'opérer.

IIe Exemple. — *Axe vertical; section hyperbolique.* (*Planche XXXI.*)

211. L'axe de la surface est la verticale (O, O′O″); la génératrice considérée dans sa position initiale parallèle au plan vertical est (af, $a'f'$); enfin les traces du plan sécant sur le plan horizontal et sur le plan méridien de front sont Rα et O′α'.

Nous déterminons, comme précédemment, l'axe (OR, O′R′) de la courbe, et nous cherchons les points où il coupe la surface (art. **207**). Nous trouvons que le cercle décrit du point O comme centre, avec OR pour rayon, trace du cône auxiliaire, ne rencontre pas la droite ag, trace du plan qui passe par le sommet du cône et qui contient la génératrice (af, $a'f'$). Nous en concluons que l'axe (OR, O′R′) est non transverse, et que l'intersection est une hyperbole (art. **210**).

212. La considération du cône asymptote va nous conduire à la même conséquence, et aura d'ailleurs l'avantage de nous faire trouver les asymptotes de la courbe.

Pour que l'intersection ait un point à l'infini, il faut que le plan sécant soit parallèle à l'une des positions de la génératrice (aa_1, $a'a'_1$), et par suite à une génératrice du cône asymptote (art. **204**).

La trace $\alpha_1 mr$ d'un plan parallèle au plan sécant, et passant par le sommet (O, f') de ce cône, coupe sa trace $a_0 rm$ en deux points r et m; les génératrices Or et Om sont donc parallèles au plan sécant, et, par suite, l'intersection a deux points à l'infini. Si la droite $\alpha_1 mr$ avait été tangente à la trace du cône asymptote, la courbe aurait eu un seul point à l'infini; elle n'en aurait pas eu si la droite n'avait pas rencontré le cercle.

Il est facile de déterminer la position $r_1 s_1$ prise par la génératrice aa_1, quand elle est devenue parallèle à Or. Le plan tangent à l'hyperboloïde au point de cette droite situé à l'infini a pour trace la droite $r_1 r_2$ tangente en r à la trace du cône asymptote (art. **204**, 3°). L'asymptote de l'hyperbole, étant dans ce plan

et dans le plan sécant, passe par le point r_3 où les traces se coupent : c'est la droite $(r_3 s_3, r'_3 s'_3)$ parallèle à $(r_1 s_1, r'_1 s'_1)$.

On trouve de la même manière une autre asymptote $(n_3 m_3, n'_3 m'_3)$ parallèle à la génératrice du cône projeté sur Om. Ces deux asymptotes se coupent en un point (I, I′) de l'axe (OR, O′R′).

On détermine la courbe par points, comme précédemment; sa projection horizontale doit être tangente au cercle de gorge et sa projection verticale à l'hyperbole méridienne. Si l'on veut avoir l'axe transverse, il faut faire passer un plan horizontal par le centre (I, I′).

CHAPITRE VI.

INTERSECTIONS DE SURFACES COURBES.

Courbes gauches.

213. Toute courbe dont tous les points ne sont pas dans un même plan est dite *gauche* ou *à double courbure*.

On considère des tangentes pour les courbes gauches, comme pour celles qui sont planes : la tangente d'une courbe gauche en un point est la limite des positions d'une sécante qui passe par ce point, et dont un second point d'intersection avec la courbe se rapproche indéfiniment du premier.

Nous avons démontré (art. **108**) que les courbes planes que l'on peut tracer sur une surface, par un même point, ont leurs tangentes, en ce point, dans un plan. Pour étendre la démonstration au cas des courbes gauches, il suffit de supposer que la ligne gauche A (*fig.* 77) appartienne à un système de génératrices tel que deux de ces lignes, dans des positions consécutives, ne se coupent pas.

Le théorème relatif à la projection des tangentes (art. **116**) peut ensuite être étendu sans difficulté aux courbes gauches.

214. Considérons une droite TT′ tangente d'une courbe gauche A en un point M (*fig.* 117), et faisons passer un plan Q par cette droite et par un autre point N de la courbe : si le point N se meut de manière à occuper sur la ligne A différentes positions N′, M, N″,..., le plan Q tournera autour de la tangente; il sera *osculateur* de la courbe en M, lorsque le point de section N s'y trouvera réuni au point de contact.

En général, une courbe ne traverse pas sa tangente, et, par suite, dans la partie voisine du point de contact, elle est entièrement d'un même côté de tout plan Q qui contient cette droite. Le plan serait cependant traversé si le point N où il coupe la courbe était réuni au point de tangence M, c'est-à-dire s'il était osculateur.

Il peut arriver qu'un plan osculateur ne traverse pas la courbe. Supposons que le plan Q, mené par la tangente TT' et par un point N de la courbe, la coupe en un autre point P (*fig.* 118), et que les deux points de section se réunissent au point M pour une certaine position du plan : toute la partie de la courbe située entre N et P aura disparu, et il ne restera que les parties qui sont au delà de ces points d'un même côté du plan. Si le plan Q continuait à tourner, il n'aurait plus que le point M de commun avec la ligne courbe AA'. Le contact de cette ligne avec son plan osculateur en M est plus intime que dans le cas général examiné précédemment, car deux points de section se sont réunis au point de tangence.

Cette circonstance se présente notamment quand une courbe tracée sur un cylindre ou sur un cône est tangente à une génératrice TT'. Tous les points tels que N et P se trouvent alors deux à deux sur des génératrices.

215. Supposons qu'un cercle soit déterminé dans le plan Q par les conditions de toucher la droite TT' au point M et de passer par le point N (*fig.* 117). Quand le plan tourne, le cercle se modifie et, lorsque le point N est réuni au point M, son contact avec la courbe s'est élevé d'un degré; il est alors *osculateur*. Le plan qui le contient est devenu osculateur en même temps.

Le cercle que nous considérons sur le plan mobile Q est tangent en M à la projection de la courbe sur ce plan et rencontre la même projection en N. On voit d'après cela que le cercle osculateur de la courbe est également osculateur de sa projection sur le plan osculateur.

Une courbe gauche a une inflexion ou un rebroussement en un point, quand sa projection sur son plan osculateur en ce point a elle-même une inflexion ou un rebroussement.

215 *a*. Quand une courbe gauche possède une inflexion en un point M, elle est traversée par sa tangente en ce point; tout plan Q passant par cette tangente la traverse également et doit être considéré comme osculateur. Si l'on fait tourner le plan Q, lorsqu'un point de section N sera venu se confondre avec M, ce plan laissera toute la courbe d'un même côté, et l'ordre de son contact avec elle se sera élevé d'une unité.

216. *Si la directrice d'un cône est une courbe gauche, et qu'en un point* M *de cette ligne la génératrice* G *lui soit tangente* (*fig.* 119), *le plan osculateur de la courbe en ce point sera tangent au cône.*

Pour prouver ce théorème, considérons le plan qui passe par G et par une

autre génératrice G′, et supposons qu'on le fasse tourner autour de G, de manière que G′ se rapproche de cette droite; le point N s'avancera vers M, et le plan deviendra au même moment osculateur à la courbe et tangent au cône.

La même propriété existe évidemment pour le cylindre.

217. Supposons maintenant que l'on rapporte une courbe gauche à deux plans coordonnés, dont un, le plan horizontal, lui soit osculateur en un point M (*fig.* 120), et considérons deux points A et B situés sur la courbe près de M et de côtés différents : ces points sont l'un au-dessus et l'autre au-dessous du plan horizontal (art. **214**); leurs projections verticales A′ et B′ sont l'une à gauche et l'autre à droite de la verticale du point M′; enfin la projection A′M′B′ doit être tangente à la ligne de terre XY qui est la projection de la tangente TM. Ces diverses conditions exigent que la ligne A′M′B′ ait une inflexion en M′.

Sur un plan vertical perpendiculaire à la tangente TM, les projections A″ et B″ sont d'un même côté de la verticale du point M″. Les autres circonstances étant d'ailleurs les mêmes que précédemment, la courbe A″M″B″ a nécessairement un rebroussement de première espèce dont la tangente est X_1Y_1.

Dans ce dernier cas, la ligne de terre n'étant plus la projection de la tangente TM″, il peut être utile de démontrer directement qu'elle est tangente à la courbe M″A″. Pour cela, nous remarquerons qu'un plan passant par la tangente MM″ et par le point (A, A″) coupe le plan X_1Y_1 suivant la droite M″A″, et que, si ce plan tourne de manière que le point A arrive en M, la droite M″A″ viendra se confondre avec la ligne de terre X_1Y_1.

En résumé, *la projection d'une courbe gauche sur un plan perpendiculaire à l'un de ses plans osculateurs présente une inflexion au point correspondant. Si le plan devient perpendiculaire à la tangente de la courbe, l'inflexion se change en un rebroussement de première espèce. La tangente à l'inflexion ou au rebroussement est la trace du plan osculateur sur le plan de projection.*

Le cylindre qui projette la courbe sur le plan X_1Y_1 a un rebroussement le long de la tangente TMM″; par conséquent, *lorsque la directrice d'un cylindre (ou d'un cône) est tangente à l'une des génératrices, la surface présente un rebroussement le long de cette droite.*

217 *a*. La courbe gauche AMB (*fig.* 120) et sa projection A″M″B″ se correspondent point à point. La projetante qui aboutit au point M″, étant tangente à la courbe gauche, doit être considérée comme passant par deux points de cette ligne, et par suite on doit regarder le point de rebroussement M″ comme un point double de la courbe A″B″.

218. Quand on projette une courbe gauche sur un plan perpendiculaire à une droite qui la rencontre en deux points, on obtient une ligne ayant un point double, telle que celle qui est représentée sur la *fig.* 69. Si l'on suppose que la sécante se meuve de manière que la corde interceptée par la courbe soit de plus

en plus petite, la feuille formée par la projection sur un plan perpendiculaire sera de plus en plus resserrée, et enfin, quand la sécante sera devenue tangente, la feuille se trouvera réduite à un point, et la projection aura un rebroussement, comme nous l'avons reconnu par d'autres considérations.

Il est d'ailleurs facile de voir que, quand un cône a un rebroussement le long d'une génératrice, une courbe tracée sur la surface ne peut traverser cette droite, sans avoir de rebroussement, qu'en lui étant tangente.

219. Les résultats que nous avons obtenus à l'article **217** sont soumis à certaines restrictions : si la courbe gauche n'était pas traversée par son plan osculateur au point considéré M (*fig.* 121), la projection A′B′ serait entièrement d'un même côté de la tangente XY, et le rebroussement sur un plan perpendiculaire à la tangente TM″ serait de seconde espèce.

Nous avons vu (art. **214**) qu'une courbe était d'un même côté de son plan osculateur quand, par suite de sa forme particulière, deux points de rencontre N et P (*fig.* 118) se réunissaient au point de contact M, de sorte qu'elle avait en commun avec le plan quatre points réunis en un seul. Dans ce cas, la projection A′B′ (*fig.* 121) sur un plan perpendiculaire au plan osculateur doit avoir sur la tangente XY quatre points réunis en un seul M′ : le contact est donc plus intime d'un degré que dans le cas d'une inflexion, et le rayon de courbure est également infini, c'est-à-dire qu'un cercle tangent à XY en M′ ne pourrait, quelque grand que fût son rayon, se trouver entre la courbe A′B′ et la tangente, sur une petite longueur voisine du point M′.

220. Les deux bras M″A″ et M″B″ (*fig.* 121) du rebroussement de seconde espèce se superposent quelquefois; alors la projection s'arrête brusquement en M″, mais une partie parasite la continue si la courbe est géométrique.

Supposons, par exemple, que l'on cherche l'intersection du cylindre vertical dont la trace horizontale est B (*fig.* 122), avec le cylindre dont la trace est A sur le plan vertical, et qui est perpendiculaire à ce plan. On trouve une courbe fermée qui se projette sur les arcs nmn_1 et $m'n'm'_1$. Sur ces arcs un point tel que e est la projection de deux points de la courbe, et chacune des extrémités n, n_1, m' et m'_1 correspond à un seul point où la tangente de l'intersection est perpendiculaire au plan de projection. On voit que des parties parasites nin_1, $m'jm'_1$ prolongent géométriquement les arcs utiles.

221. Si l'on projette une courbe ayant une branche infinie sur un plan P perpendiculaire à son asymptote MM_1 (*fig.* 123), la trace m de cette droite sera la projection du point de la courbe situé à l'infini.

Considérons un plan Q passant par l'asymptote, et faisons-le tourner autour de cette droite; lorsque le point N où il coupe la courbe aura disparu à l'infini, le plan sera osculateur à l'infini, et sa trace TT′ sera tangente à la projection AB de la courbe.

Si le plan Q continue à tourner, le point de section N reparaîtra sur l'autre bras de la courbe en revenant de l'infini; on voit que la projection AB ne présente pas de rebroussement. Pour qu'il y en eût un, il faudrait que les deux bras fussent d'un même côté de l'asymptote, c'est-à-dire qu'il y eût inflexion à l'infini (art. **183**). Alors, si les deux parties qui forment le rebroussement se superposaient, le pied de l'asymptote serait un point d'arrêt de l'arc utile de la projection, et une partie parasite la prolongerait.

222. La projection d'une asymptote, lorsqu'elle n'est pas réduite à un point, est asymptote de la projection de la courbe.

Si la projection d'une courbe a une asymptote rectiligne, le cylindre projetant aura un plan asymptote, mais l'asymptote de la courbe peut être tout entière à l'infini dans ce plan; il peut arriver aussi que la branche infinie de la projection soit parasite à partir d'un certain point. On voit qu'une courbe sans asymptote, et même une courbe fermée, peut avoir pour projection sur un plan une courbe avec asymptote.

Les notions que nous venons de donner sur la projection des courbes gauches sont très importantes. Si on ne les possède pas bien, on sera souvent embarrassé, dans le tracé des épures, pour se rendre compte des formes des courbes projetées.

Intersections de cônes et de cylindres.

223. Pour construire l'intersection de deux cônes, d'un cône et d'un cylindre, ou de deux cylindres, on emploie une série de plans auxiliaires disposés de manière à couper les surfaces suivant des génératrices. Ces droites donnent par leurs rencontres des points de la courbe de section. Nous examinerons successivement différents cas, de manière à donner la solution de toutes les difficultés.

I[er] Exemple. — *Intersection d'un cylindre et d'un cône. — Pénétration. — Courbes fermées.* (*Planche XXXIII.*)

224. Un cône a son sommet au point (S, S′) (*fig.* 124); sa base *bpqc*... est sur le plan horizontal de projection; on doit faire dans ce corps un trou qui permette d'y passer le cylindre dont la trace horizontale est $m_1 nm$... et dont la direction est indiquée par la droite ($m_1 B_1$, $m'_1 B'_1$). On demande de tracer les projections des arêtes formées par l'intersection des deux surfaces.

224 *a*. La *fig. b, Pl. LIII*, est une perspective représentant un cylindre et un cône ayant leurs bases dans le plan horizontal P, et les constructions pour déterminer la courbe d'intersection et ses tangentes. Nous conseillons au lecteur de suivre les constructions sur cette perspective en même temps que sur l'épure.

La *fig. d*, *Pl. LIV*, montre comment on doit disposer les constructions lorsque la trace du cône est donnée dans le plan vertical et celle du cylindre dans le plan horizontal.

224 *b*. Par le sommet (S, S′) du cône nous faisons passer une droite (SK, S′K′) parallèle aux génératrices du cylindre, et nous déterminons sa trace horizontale K. Toute droite passant par ce point, telle que K*c*, peut être considérée comme la trace d'un plan qui contient la droite (SK, S′K′), et qui, par conséquent, est parallèle au cylindre et passe par le sommet du cône. Les génératrices des deux surfaces qui ont leur trace en m, m_1 et en b, c sont dans ce plan, et, par suite, se rencontrent. On obtient ainsi quatre points (B, B′), (C, C′), (B_1, B'_1) et (C_1, C'_1).

225. Si l'on veut avoir les points situés sur une génératrice déterminée, il faut opérer sur la trace du plan auxiliaire qui la contient. Ainsi, en joignant le point K au point l, on détermine sur la trace du cylindre les points v et v_1 qui font connaître les points L et L_1 où la génératrice Sl rencontre la courbe. Cette ligne est une des deux droites qui forment le contour apparent du cône, et par suite elle touche l'intersection en L et en L_1 sur la projection horizontale.

226. La tangente en un point quelconque (B, B′) est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces le long des génératrices qui s'y croisent; elle passe donc par le point E, où leurs traces mE et bE se coupent : ses projections sont ainsi EB et E′B′.

On ne peut pas opérer de la même manière pour la tangente au point (C, C′), parce que les droites mE et cG, traces des plans tangents, ne se rencontrent pas dans le cadre de l'épure; alors nous coupons ces deux plans par un troisième contenant la droite (SK, S′K′) : sa trace est une droite KFG passant par le point K, et d'ailleurs quelconque; ses intersections avec les plans tangents sont la droite (FI, F′I′) parallèle aux génératrices du cylindre, et la droite (GS, G′S′) passant par le sommet du cône. Leur point de rencontre (I, I′) appartient à la tangente en (C, C′).

Si cela avait été plus commode pour les tracés, on eût pu couper les plans tangents par un plan horizontal ou par un plan parallèle au plan auxiliaire dont la trace est K*c*. Nous donnerons (art. **235** et **230**) des exemples de ces constructions.

227. La droite Kn, tangente à la trace du cylindre, rencontre la trace du cône en deux points p et q. Les génératrices qui percent le plan horizontal sur l'arc pq ne sont pas coupées par le cylindre; la courbe ne s'étend donc de chaque côté que jusqu'aux droites (Sp, S′p'), (Sq, S′q'), qui lui sont par conséquent tangentes. Il est facile de voir que les génératrices qui sont au delà rencontrent deux génératrices du cylindre, tandis que celles-ci coupent seulement celle qui est projetée sur nPQ et n'P′Q′. Ces deux génératrices sont dites *génératrices-limites*.

La tangente Kn_1 fait trouver sur le cône deux autres *génératrices limites* (Sp_1, $S'p'_1$), (Sq_1, Sq'_1). Les traces des plans auxiliaires qui rencontrent les deux surfaces sont comprises dans l'angle nKn_1. La trace du cylindre est tout entière dans cet angle, et par suite toutes les génératrices du cylindre rencontrent le cône en deux points. L'intersection se compose ainsi de deux parties distinctes qui sont situées sur les secteurs coniques p_1Sp et q_1Sq; quand cette disposition se présente, on dit qu'il y a *pénétration*.

Quelquefois le deuxième *plan limite* n'est pas tangent à la même surface que le premier. Nous examinerons bientôt ce cas.

227 *a*. On se propose quelquefois de déterminer le point le plus bas et le point le plus haut de l'intersection, c'est-à-dire ceux auxquels la tangente est horizontale. Il faut pour cela chercher un plan sécant auxiliaire qui coupe les traces horizontales des surfaces en deux points où les tangentes soient parallèles. On y parvient après un court tâtonnement, que l'on peut régulariser par une courbe d'erreur, dans le genre de celle que nous avons construite pour trouver, sur la section plane d'une surface de révolution, les points où la tangente est perpendiculaire à la ligne de terre (art. **196**).

En général, on emploie une courbe d'erreur pour les problèmes que l'on ne sait pas résoudre directement, mais dont on pourrait vérifier la solution si elle était connue.

228. Nous avons représenté sur la *fig*. 125 la partie du cône qui est enlevée par le cylindre, ou, si l'on veut, le volume qui serait commun aux deux corps s'ils étaient l'un et l'autre en relief. Sur chaque projection, le périmètre se compose de quatre droites appartenant aux génératrices qui forment le contour apparent des surfaces, et de quatre arcs de la courbe d'intersection.

Quelques sections de la surface par des plans auxiliaires ont été tracées en trait plein.

IIe Exemple. — *Intersection de deux cônes. — Arrachement. — Courbe fermée.* (*Planche XXXIV.*)

229. La *fig*. 126 représente un cône en relief, dans lequel une entaille est faite par un autre cône.

229 *a*. La *fig. h, Pl. LV*, est une perspective cavalière représentant deux cônes dont les bases sont dans le plan horizontal P, et les constructions pour obtenir leur intersection. Le cône T pénètre dans le cône S.

La *fig. g, Pl. LV*, est une perspective cavalière représentant deux cônes dont les bases sont l'une dans le plan horizontal et l'autre dans le plan vertical, et les constructions pour obtenir leur intersection.

229 *b*. Les sommets et les traces horizontales des cônes étant donnés, on

détermine le point K, où la droite qui passe par les sommets (S, S′) et (T, T′) perce le plan horizontal, et de ce point on mène diverses droites, traces de plans auxiliaires qui coupent les surfaces suivant des génératrices. On obtient ainsi autant de points qu'il est nécessaire pour tracer les projections de la courbe. Nous avons indiqué la construction pour le plan auxiliaire déterminé par la droite Kc.

230. La tangente au point (C_1, C'_1) passe par l'intersection des droites cG et m_1F, tangentes aux traces des cônes (art. **226**). Comme ce point de rencontre est éloigné, nous coupons les plans tangents aux surfaces le long des génératrices qui se croisent au point (C_1, C'_1), par un plan parallèle à celui qui les contient. Sa trace est une droite FG parallèle à Kc; ses intersections avec les plans tangents sont des droites (FI, F′I′) et (GI, G′I′) respectivement parallèles à (m_1S, m'_1S′) et à (cT, c'T′). Leur point de rencontre (I, I′) appartient à la tangente [1].

231. Du point K nous traçons les droites Kd et Kn qui touchent une des bases et coupent l'autre : ce sont les traces des plans auxiliaires limites (art. **227**); elles déterminent sur le cône plein deux génératrices limites (Se, S′e'), (Se_1, S′e'_1), et deux autres (Tp, T′p'), (Tq, T′q') sur le cône creux. Ces quatre droites sont tangentes à la courbe dans l'espace, et par suite en projection.

Dans le cas que nous avons examiné précédemment (art. **227**), les génératrices du cône qui rencontraient le cylindre étaient réunies sur deux secteurs séparés. Ici cela n'a pas lieu : chaque surface est divisée par un plan limite en deux parties, dont l'une contient toutes les génératrices qui rencontrent l'autre surface. La courbe se compose d'une seule branche : on dit qu'il y a *arrachement*.

232. La projection verticale de la courbe présente à sa partie inférieure une forme presque anguleuse : il y aurait rebroussement si les génératrices S′u' et T′v', qui forment contour apparent sur les deux surfaces, étaient dans un même plan auxiliaire, c'est-à-dire si la droite déterminée par leurs traces horizontales u et v passait par le point K; car, les plans tangents suivant ces génératrices étant perpendiculaires au plan vertical, la tangente de l'intersection au point de l'espace où elles se rencontreraient serait également perpendiculaire

---

(1) Il est évident que les triangles FIG, $m_1 C_1 c$ sont homothétiques; la droite C_1I passe donc par le point de concours des droites m_1F, cG, centre de similitude.

On pourrait également établir la construction exposée à l'article 226 par des considérations de Géométrie plane, mais il faudrait s'appuyer sur un principe plus général que celui des figures semblables. Nous n'insistons pas sur ces considérations, parce qu'elles sont peu dans l'esprit de la Géométrie descriptive. Il est d'ailleurs facile de voir qu'elles ne s'appliquent d'une manière directe qu'à la projection horizontale.

à ce plan (art. **217**). On voit d'ailleurs que la projection verticale de la courbe devrait, sans traverser les droites $T'v'$ et $S'u'$, atteindre le point où elles se coupent : condition qui exige un rebroussement. Les constructions que nous avons données pour les tangentes des projections de la courbe ne peuvent pas être employées pour ce cas particulier.

233. Nous avons représenté sur la *fig.* 127 le volume retiré du cône en relief. Sur chaque projection, le périmètre se compose de trois droites et de trois arcs de la courbe d'intersection.

IIIe Exemple. — *Intersection de deux cylindres ayant un plan tangent commun.* (*Planche XXXV.*)

234. Notre troisième exemple présente un cas intermédiaire entre l'arrachement et la pénétration, celui où les deux surfaces ont un plan tangent commun.

On propose de représenter un cylindre en relief ayant un trou de forme cylindrique. On donne les traces horizontales des surfaces et la direction des génératrices.

234 *a*. La *fig. e, Pl. LIV,* est une perspective cavalière représentant deux cylindres ayant un plan tangent commun, et les constructions exposées dans les articles qui suivent.

La *fig. f, Pl. LIV,* est une perspective cavalière relative au cas où les traces des deux cylindres sont données l'une sur le plan horizontal, l'autre sur le plan vertical.

234 *b*. Par un point quelconque (g, g'), nous menons deux droites $(gf, g'f')$, $(gh, g'h')$ respectivement parallèles aux génératrices des deux cylindres, et nous déterminons leurs traces horizontales f et h. Toute droite parallèle à fh, telle que $rmbc$, peut être considérée comme la trace d'un plan parallèle aux deux cylindres : les génératrices du premier, qui ont leur trace en r et en m, rencontrent donc celles du second, qui percent le plan horizontal en b et en c : on obtient ainsi quatre points (B, B'), (B_1, B'_1), (C, C'), (C_1, C'_1).

235. La tangente au point (B_1, B'_1) est déterminée par la rencontre des tangentes des bases aux points r et b. Ce point de concours étant éloigné, nous prenons un plan horizontal élevé, celui dont la trace verticale est xy. Les génératrices qui se rencontrent en (B_1, B'_1) percent ce plan aux points (r_1, r'_1) et (b_1, b'_1); les traces des plans tangents sur le nouveau plan horizontal sont les droites $(r_1 t, xy)$, $(b_1 t, xy)$, respectivement parallèles aux tangentes en r et en b. Leur point de rencontre (t, t') appartient à la tangente.

236. Les traces des plans limites sont les droites nqp et de; le premier de ces plans touche le cylindre creux, et coupe celui qui est plein suivant deux génératrices respectivement tangentes à la courbe en (P, P') et en (Q, Q'). La

droite *de* est tangente aux deux bases, et par suite le second plan limite touche les deux cylindres. Au lieu de contenir, comme l'autre, deux points d'intersection, il n'en a qu'un seul (D, D′) qui est un point double. Les cylindres sont tangents l'un à l'autre au point (D, D′) : c'est la seconde fois que nous voyons l'intersection de deux surfaces tangentes présenter un nœud au point de contact (art. **200**).

On ne peut pas déterminer par la méthode ordinaire les deux tangentes de la courbe au point (D, D′), mais on les obtient d'une manière suffisamment exacte, en construisant par points, sur de petites longueurs, deux arcs de la ligne qui est le lieu des traces horizontales des tangentes de l'intersection.

Il est facile de déterminer les traces σ et τ des droites qui touchent la courbe d'intersection aux points situés dans un plan auxiliaire dont la trace est une droite $\rho\mu\beta\gamma$ parallèle à *ed* et voisine de cette droite. Quelques autres points déterminés comme ceux-ci permettent de tracer l'arc $\sigma\tau$ sur lequel les tangentes de l'arc (BC_1, $B'C'_1$) ont leurs traces. Celle de la tangente cherchée se trouve aussi sur *ed*; elle est donc au point θ.

On obtiendrait la tangente à l'autre branche du point double en déterminant la courbe lieu des points de rencontre des droites $\gamma\sigma$ et $\mu\tau$ d'une part, $\beta\tau$ et $\rho\sigma$ de l'autre; mais, comme les points seraient éloignés, il faudrait élever le plan horizontal comme nous l'avons fait à l'article **235** [1].

Nous avons représenté sur une figure séparée (*fig.* 129) le volume retiré du cylindre en relief.

IV[e] Exemple. — *Intersection de deux cônes. — Arrachement. — Deux branches infinies.* (*Planche XXXVI.*)

237. La courbe d'intersection a quelquefois des branches infinies. Nous allons étudier cette question dans le cas de deux cônes; nous avons ponctué l'épure en supposant qu'ils forment un seul corps.

La droite qui passe par les sommets (S, S′) et (T, T′) des cônes perce le plan horizontal en un point K, d'où divergent les traces des plans auxiliaires.

Les points de la courbe étant donnés par les rencontres des génératrices des deux surfaces, pour que l'un d'eux se trouve à l'infini, il faut que deux génératrices soient parallèles. Afin de reconnaître si cette circonstance se présente, nous transportons l'un des cônes, celui de droite, parallèlement à lui-même, en faisant glisser son sommet (S, S′) sur la droite (ST, S′T′), jusqu'à ce qu'il se

---

(1) Nous verrons dans la troisième Partie (art. 865-869) une méthode directe pour construire les tangentes au point double de la courbe d'intersection de deux surfaces qui ont un plan tangent commun.

confonde avec le sommet (T, T′) de l'autre cône. Les génératrices parallèles des deux surfaces se superposent, de sorte que chaque point de rencontre des traces, après la translation, indique une couple de génératrices parallèles dans les cônes considérés.

Une génératrice quelconque (Sm_1, $S'm'_1$) du cône (S, S′) est transportée parallèlement à elle-même dans le plan auxiliaire qui la contenait; elle perce successivement le plan horizontal en différents points de la droite Km_1M_1, et elle s'arrête à la position (TM_1, $T'M'_1$). Les rayons vecteurs KM_1 et Km_1 de deux points homologues des traces du cône, avant et après sa translation, sont dans le rapport constant de KT à KS. Ces courbes sont donc homothétiques, ce que nous pouvions prévoir (art. **179**); le point K est le centre de similitude; les points S et T sont homologues. On voit, d'après cela, que la nouvelle courbe M_1J_1 est facile à construire.

La trace du cône transporté rencontre en deux points I_1 et J_1 la trace du cône fixe. Nous menons les lignes I_1K et J_1K, et nous déterminons deux couples de génératrices parallèles (TI_1, $T'I'_1$), (SI, S′I′) et (TJ_1, $T'J'_1$), (SJ, S′J′).

Si l'on fait passer un plan par la droite des sommets, et qu'on le fasse tourner autour de cette ligne, de manière que sa trace approche de la position KI, l'occupe et la dépasse, deux des génératrices qu'il contient tendront au parallélisme, l'atteindront et prendront ensuite une convergence en sens contraire de la première. Le point mobile, par lequel on peut concevoir que la courbe est décrite, s'éloigne donc, passe à l'infini et reparaît sur les nappes opposées des cônes.

La même circonstance se présente quand la trace du plan mobile arrive à la position KJ. Nous voyons ainsi que la courbe a deux branches infinies, autant qu'il y a de couples de génératrices parallèles.

238. Les asymptotes de la courbe sont déterminées, comme ses autres tangentes, par l'intersection des plans tangents aux deux surfaces le long des génératrices parallèles. La trace horizontale de l'une des asymptotes est au point i, où se rencontrent les tangentes Ii et I_1i, traces des plans tangents le long des génératrices parallèles (SI, S′I′) et (TI_1, $T'I'_1$); l'asymptote est d'ailleurs parallèle à ces génératrices, parce qu'elle les rejoint à l'infini. On peut donc tracer ses projections ii_1 et $i'i''$. L'autre asymptote (jj_1, $j'j''$) est obtenue de la même manière.

Les cônes étant limités aux plans horizontaux $i''j''$ et x'K′, la courbe s'arrête aux points (λ, λ'), (μ, μ'), (η, η') et (ε, ε'). Nous l'avons tracée sur la projection horizontale un peu au delà de ces points, mais avec une ponctuation différente.

239. Les traces des plans limites sont Knp et Keh; la base de chaque cône est touchée par une de ces droites et coupée par l'autre. Il y a donc arrachement, et l'intersection se compose, non pas de deux *courbes compagnes*, mais d'une seule

courbe ayant deux points à l'infini, ce qui ne détruit pas la continuité. La projection horizontale de l'intersection est $u\eta\varepsilon\infty\nu\lambda EBP\mu B_1\varpi\infty u$. Si l'on rapporte cette courbe à une origine fixe R et à un axe fixe SK, on pourra passer d'un point quelconque à un autre, en faisant varier le rayon vecteur et l'azimut d'une manière continue.

S'il y avait pénétration, l'intersection se composerait de deux courbes formant un groupe géométrique, mais distinctes. Il pourrait y avoir des branches infinies sur l'une de ces lignes seulement ou sur les deux.

240. La trace i d'une asymptote, étant le point de rencontre de deux tangentes aux bases, se trouve nécessairement en dehors de ces courbes lorsqu'elles sont des cercles, des ellipses ou d'autres lignes sans inflexion. Une asymptote est ainsi extérieure aux cônes; cependant elle peut se trouver sur l'un d'eux : cela arrive quand les génératrices parallèles sont dans un plan limite. Si, par exemple, les génératrices Sn et Tp étaient parallèles, le point P irait à l'infini, et la génératrice Tp, toujours tangente à la courbe d'intersection, deviendrait asymptote.

241. Si la base du cône fixe et celle du cône transporté se touchaient en I_1, les plans tangents le long des génératrices SI et TI_1 seraient parallèles, et l'asymptote disparaîtrait à l'infini. Ainsi la branche infinie qui correspond à un point de rencontre des traces des cônes après la translation est hyperbolique ou parabolique, suivant que ces courbes se coupent ou se touchent. Dans ce dernier cas, il est facile de reconnaître que la convergence des génératrices dans les plans auxiliaires est, en général, dans le même sens en deçà et au delà de la position qui correspond aux génératrices parallèles. Les deux bras d'une branche parabolique sont ainsi sur les mêmes nappes des deux cônes (1).

242. Nous n'avons considéré que le cas où les traces horizontales des cônes sont des courbes fermées. Lorsqu'elles ont des branches infinies, elles peuvent se rencontrer à l'infini : cela a lieu notamment quand elles ont des asymptotes parallèles. Les plans passant par une asymptote et par le sommet du cône correspondant touchent respectivement les surfaces le long de génératrices qui sont horizontales et parallèles. L'intersection de ces plans est asymptote de la courbe suivant laquelle les cônes se coupent.

Nous croyons ne pas devoir entrer dans plus de détails sur ce cas exceptionnel. On pourra lever les petites difficultés qu'il présente en déterminant les traces des cônes sur un plan vertical convenablement choisi.

---

(1) Par une discussion géométrique très simple, on reconnaît que, pour que les deux bras d'une branche parabolique ne soient pas sur les mêmes nappes, il faut que le contact des traces des cônes après la translation s'élève au second ordre.

On peut dire, d'une manière plus générale et sans rien spécifier sur la nature d'une branche infinie, que ses deux bras sont sur les mêmes nappes des cônes, quand les traces de ces surfaces, après la translation, ne se traversent pas au point commun.

V[e] EXEMPLE. — *Intersection d'un cône et d'un cylindre. — Deux branches infinies.* (*Planche XXXVII.*)

243. Dans le cas d'un cône et d'un cylindre, pour que la courbe d'intersection ait des branches infinies, il faut que l'une des génératrices du cône soit parallèle à celles du cylindre. Cette condition est remplie pour les surfaces représentées sur la *fig.* 131, la génératrice (SK, S'K') du cône étant parallèle aux génératrices du cylindre.

243 *a*. La *fig. c*, *Pl. LIV*, est une perspective cavalière permettant de suivre plus facilement les constructions exposées dans les articles suivants.

243 *b*. Une droite quelconque passant par le point K, telle que *mc*, peut être prise pour trace d'un plan auxiliaire. Les génératrices du cylindre qui percent le plan horizontal en *b* et en *c* rencontrent donc la génératrice du cône, qui a sa trace en *m*; on obtient ainsi les points (B, B') et (C, C') de l'intersection.

Si l'on fait tourner la ligne *mc* autour du point K, on obtiendra une série de points qui se relieront à (B, B') et à (C, C'), de manière à former la courbe. Quand le point *m* sera devenu voisin de K, la génératrice (S*m*, S'*m'*) rencontrera le cylindre en un point très éloigné; enfin, lorsque la génératrice mobile sera confondue avec (SK, S'K'), la trace du plan auxiliaire sera la tangente IJ; on voit que les génératrices du cylindre qui passent par les points I et J rencontrent le cône à l'infini.

La génératrice SK du cône est dans tous les plans auxiliaires; elle rejoint à l'infini toutes les génératrices du cylindre, mais celles qui ont leurs traces en I et en J sont les seules qui ne rencontrent le cône qu'à l'infini, et dont les points à l'infini fassent transition entre des bras indéfinis de la courbe situés sur les deux nappes de la surface.

Il suit de là que le nombre des branches infinies est égal à celui des points où la tangente de la trace du cône au point K rencontre la trace du cylindre. Sur la *fig.* 132, la tangente KT ne coupe pas la trace A, et la génératrice (SK, S'K'), bien que parallèle au cylindre, ne doit pas déterminer une branche infinie. On voit, en effet, que l'intersection ne s'étend que sur les génératrices qui rencontrent le plan horizontal aux différents points de l'arc *cad* compris entre les plans limites.

244. Revenons à la *fig.* 131 : les asymptotes sont les sections du plan tangent au cône le long de la génératrice (SK, S'K'), par les plans tangents au cylindre le long des génératrices (I*i*, I'I'') et (J*j*, J'J''), c'est-à-dire que ce sont ces génératrices elles-mêmes.

Au premier abord, ce résultat paraît en opposition avec celui que nous avons obtenu dans le cas de deux cônes (art. **240**), mais il y a en réalité une concor-

dance parfaite, parce que la droite IKJ coupe une base et touche l'autre, et que, par suite, les génératrices qui déterminent les points à l'infini de la courbe sont dans un plan qui a le caractère de plan limite.

Si l'on projette l'intersection sur un plan perpendiculaire au cylindre, on aura la section droite de cette surface. Les génératrices asymptotes sont les projetantes des points situés à l'infini (art. **221**). On voit ainsi qu'une courbe tracée sur un cylindre dont la directrice est fermée ne peut avoir une asymptote rectiligne qui ne soit pas une génératrice de la surface.

245. Le cas que nous venons de traiter n'est, à proprement parler, ni une pénétration ni un arrachement; il se rattache cependant à cette dernière disposition, car l'intersection est formée d'une seule courbe composée de deux parties qui se rejoignent à l'infini. Elle passe par les points (λ, λ'), (μ, μ'), (η, η') et $(\varepsilon, \varepsilon')$, où les bases supérieure et inférieure des surfaces se rencontrent. Nous l'avons prolongée sur le plan horizontal au delà de ces points, mais avec une ponctuation différente. La projection horizontale de l'intersection est $u\varepsilon BH\eta\nu\infty\varpi\mu C\lambda t\infty u$.

246. Nous avons construit les tangentes aux points (B, B') et (C, C'). Pour ce dernier, nous avons employé la méthode expliquée à l'article **226**. Les tangentes cG et mF, se rencontrant en dehors du cadre de l'épure, nous les avons arrêtées à une droite FKG, que nous considérons comme la trace d'un plan passant par le sommet du cône, et parallèle au cylindre; ses intersections avec les plans tangents à ces surfaces sont la droite (FS, F'S') qui passe par le sommet du cône, et la droite (GV, G'V') parallèle au cylindre : leur point de rencontre (V, V') appartient à la tangente.

VIe Exemple. — *Intersection de deux cônes. — Pénétration. — Deux branches infinies, et sur un des plans de projection deux parties parasites.* (*Planche XXXVIII.*)

247. La droite DSTK, parallèle à la ligne de terre, est un axe des deux courbes $GJEJ_1$ et $DqFq_1$, traces horizontales des cônes. Les sommets sont dans le plan vertical qui a cette droite pour trace.

Nous déterminons d'abord le point K, d'où doivent diverger les traces des plans auxiliaires. Nous transportons ensuite le premier cône parallèlement à lui-même, de manière que son sommet (S, S') coïncide avec le sommet (T, T') du second (art. **237**). Sa nouvelle trace ge est semblable à l'ancienne; elle rencontre la trace du cône resté fixe en deux points I et I_1, symétriquement placés par rapport à la droite DK : nous trouvons ainsi deux couples de génératrices parallèles TI, SJ et TI_1, SJ_1, et par suite deux asymptotes ωi, ωi_1. Les génératrices qui ont pour projections horizontales les droites TI et TI_1 sont représentées sur le plan vertical par une seule droite T'I'. Les génératrices corres-

pondantes du second cône ont également une projection verticale commune S′J′. Enfin une seule asymptote $i'i''$ est la projection des deux asymptotes de l'intersection.

Sur le plan vertical nous avons indiqué les deux nappes des cônes, mais sur le plan horizontal la ponctuation a été établie dans la supposition que ces corps étaient limités à leur sommet.

248. Les deux cônes formant un système symétrique par rapport au plan vertical dont la trace est DK, on peut obtenir la projection verticale complète en ne considérant que l'une des deux moitiés de ce système, par exemple, celle qui est en avant du plan vertical DK. La courbe dans l'espace se trouve ainsi limitée à ce plan, et les points où elle le coupe sont des arrêts pour sa projection. Ces points α', β', γ' et δ' sont ceux où se rencontrent les génératrices qui forment le contour apparent des surfaces.

Si les traces des cônes sont des courbes géométriques, la projection de l'intersection sera également une courbe géométrique, et les points d'arrêt limiteront seulement ses parties utiles.

249. On sait que, *quand deux surfaces du second degré ont un plan principal commun, la projection de leur intersection sur ce plan est une conique.*

Dans le problème qui nous occupe, les traces horizontales des cônes sont un cercle et une ellipse, et par suite ces surfaces sont du second degré; le plan vertical de projection est d'ailleurs parallèle au plan principal KD; en conséquence, et d'après le théorème que nous venons de rappeler, la projection verticale de l'intersection est une conique. Nous avons trouvé qu'elle avait une asymptote : c'est donc une hyperbole dont la seconde branche infinie est parasite.

Lorsqu'une hyperbole est coupée par une droite, les segments interceptés entre la courbe et ses asymptotes sont égaux. D'après cela, si nous prenons les longueurs $\gamma'\alpha''$ et $\gamma'\beta''$, respectivement égales à $\gamma''\alpha'$ et $\gamma'''\beta'$, nous aurons deux points α'' et β'' de la seconde asymptote.

La courbe a deux parties parasites qui s'étendent l'une de γ' à δ', et l'autre de β' à α', en passant par l'infini. Nous les avons indiquées par un trait composé d'éléments de lignes séparés par deux points. On peut les construire d'après les propriétés spéciales de l'hyperbole.

250. Nous ne croyons pas nécessaire de revenir sur la détermination par points des projections de l'intersection. Les traces Ku, Ku_1 des plans limites touchent la base du premier cône et coupent celle du second; il y a donc pénétration. L'une des courbes compagnes est la ligne fermée ($\alpha Q \gamma Q_1$, $\alpha' Q' \gamma'$); l'autre a deux branches infinies.

Les génératrices limites ont leurs traces horizontales aux points p, q, p_1 et q_1.

Observations générales.

251. Nous n'avons pas donné de règle pour distinguer, sur chaque projection de l'intersection, les parties vues de celles qui sont cachées ; il ne serait peut-être pas facile d'en avoir une qui fût applicable dans tous les cas, et d'ailleurs elle aurait peu d'utilité, car, dans les exercices graphiques, on doit toujours se rendre un compte exact des formes des objets représentés. En montrant, comme nous l'avons fait sur les *Pl. XXIII*, *XXIV* et *XXV*, une même intersection dans des hypothèses différentes sur la nature des cônes et des cylindres, nous avons donné des exemples qui indiquent comment ces questions doivent être analysées.

Si l'on a besoin de connaître les transformées de la courbe d'intersection, dans le développement des deux surfaces, on opérera comme il est expliqué aux articles **158** et suivants pour le cylindre, et à l'article **178** pour le cône.

Les données ne sont pas toujours disposées comme nous l'avons supposé. Dans quelques épures de Stéréotomie, on détermine l'intersection de deux cylindres horizontaux dont on a les sections droites rabattues sur le plan horizontal. La marche à suivre consiste, dans tous les cas, à couper les surfaces suivant des droites, par des plans convenablement disposés. Les petites modifications qu'il faut apporter quelquefois aux tracés ne méritent pas de nous occuper actuellement.

Notions générales sur la courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre.

251 *a*. La ligne d'intersection C de deux surfaces du second ordre A et B est du quatrième ordre ; en d'autres termes, cette courbe est coupée par tout plan en quatre points qui peuvent être deux à deux imaginaires. On le reconnaît en remarquant qu'un plan coupe les deux surfaces suivant deux coniques dont les points communs sont les rencontres de la courbe C avec le plan. Or on sait que deux coniques situées sur un même plan ont quatre points d'intersection.

Il existe une autre courbe gauche du quatrième ordre qui est dite de *seconde espèce,* et dont nous n'aurons pas à nous occuper.

La projection γ de C sur un plan quelconque, que nous pouvons supposer horizontal, est coupée en quatre points par toute droite λ tracée sur ce plan, car un plan vertical passant par λ coupe C en quatre points dont les projections sont les rencontres de λ avec γ. La courbe γ est donc du quatrième ordre.

Le raisonnement qui précède montre que la projection d'une courbe gauche sur un plan est, en général, du même ordre que la courbe elle-même.

251 *b*. Les figures de 124 à 133 sont relatives à des intersections de cônes du second ordre; elles montrent que la courbe γ a quelquefois des points doubles. Il est intéressant de savoir quel peut être leur nombre.

Nous appelons P et Q les plans diamétraux conjugués aux cordes verticales dans les surfaces A et B, et R l'intersection de ces plans. Un point double de γ correspond à une corde verticale de C (art. **218**); le milieu de cette corde appartient aux plans P et Q et par suite à leur intersection R. Par cette droite nous faisons passer un plan vertical, qui coupe les surfaces A et B suivant des coniques U et V dans lesquelles la droite indéfinie R est un diamètre conjugué aux cordes verticales. Les deux coniques se coupent en quatre points M_1 et M_2, N_1 et N_2, qui se projettent sur deux points doubles μ et ν de la courbe γ. Nous voyons que cette courbe a en général deux points doubles, et qu'elle ne peut en avoir un plus grand nombre, à moins que les surfaces A et B ne soient tangentes l'une à l'autre, car le point de contact serait un point double de l'intersection C (*fig.* 128), et la projection de ce point formerait un troisième point double sur γ.

Il peut arriver que les coniques U et V se touchent en un point de la droite R : deux points de rencontre M_1 et M_2 se confondent alors, la projetante M_1M_2 devient tangente en un même point à U et à V, par suite aux surfaces A et B, et à leur intersection C. La courbe γ possède dans ce cas un rebroussement au point μ (art. **217**). Si les coniques U et V se touchaient en deux points, la courbe γ aurait deux points de rebroussement.

Les quatre points communs aux courbes U et V peuvent être imaginaires deux à deux. La courbe γ peut ainsi n'avoir qu'un point double, et même en être complètement dépourvue (1).

251 *c*. Quand les surfaces A et B ont une génératrice rectiligne commune D, la courbe C, qui avec D forme l'intersection du quatrième ordre, ne coupe un plan qu'en trois points; c'est donc une courbe du troisième ordre : on l'appelle *cubique gauche*.

La droite D passe par un des points de rencontre des coniques U et V (art. **251** *b*). Soit N_1 ce point : la corde M_1M_2 détermine sur la projection γ un point double μ. *La projection d'une cubique gauche est donc une cubique plane* (c'est-à-dire une courbe plane du troisième ordre) *ayant un point double*.

---

(1) M. Chasles a établi le premier que la courbe γ possède deux points doubles ou conjugués (réels ou imaginaires). La démonstration que nous donnons de ce théorème est due à Théodore Olivier; elle a l'avantage de conduire à des constructions possibles. Pour compléter la discussion, il faudrait examiner le cas où les coniques U et V ont une ou deux sécantes communes idéales réelles. La courbe γ possède alors un ou deux points conjugués.

Tout cône ayant pour directrice une cubique gauche et son sommet en un point de cette ligne est du second ordre, car un plan passant par le sommet coupe la cubique en deux autres points, et contient par suite deux génératrices du cône.

251 *d.* Lorsque les surfaces du second ordre A et B, qui ont une génératrice commune D, sont des cônes, chaque plan auxiliaire G (art. **223**) contient la droite D et deux autres génératrices *a* et *b* appartenant respectivement aux cônes A et B. Le plan G détermine ainsi sur la cubique gauche un seul point *q* intersection de *a* et de *b*.

Lorsque le plan auxiliaire G tournant autour de D tend à devenir tangent au cône A, l'angle de *a* avec D diminue indéfiniment, et le point *q* se rapproche indéfiniment du sommet du cône B, car ce sommet est sur la droite D. La cubique gauche passe donc par les sommets des deux cônes. Le deuxième théorème de l'article précédent pouvait faire prévoir ce résultat.

La construction de la cubique gauche comme intersection de deux cônes du second ordre peut donner lieu à des exercices graphiques intéressants.

252. On peut assez souvent simplifier la construction des projections d'une courbe d'intersection, en s'appuyant sur les propriétés spéciales des surfaces que l'on considère. C'est ainsi que nous avons appliqué à l'article **249** un théorème relatif aux surfaces du second ordre qui ont un plan principal commun.

Voici, sur les mêmes surfaces, six autres théorèmes qui sont quelquefois utiles pour les tracés.

1° *Quand deux surfaces du second ordre ont une courbe plane commune, elles se coupent suivant une seconde courbe plane, qui peut se confondre avec la première, et alors les surfaces sont tangentes l'une à l'autre en tous ses points, et qui peut aussi devenir imaginaire.*

2° *Quand deux surfaces du second ordre sont tangentes l'une à l'autre en deux points non situés sur une génératrice rectiligne commune, leur intersection est le système de deux courbes planes qui se croisent au point de contact. Ces deux lignes d'intersection peuvent se confondre en une seule ligne de contact.*

Quelquefois les surfaces n'ont en commun que les deux points de tangence.

Il résulte de ce théorème que, *quand deux surfaces du second ordre se touchent le long d'une courbe, cette ligne est nécessairement plane.* On dit alors que l'une des surfaces est inscrite, et l'autre circonscrite.

3° *Quand deux surfaces du second ordre sont circonscrites à une même troisième surface de cet ordre, leur intersection (s'il y en a une) est le système de deux courbes planes, dont les plans se coupent suivant la même droite que les plans des courbes de contact. Quelquefois les surfaces sont simplement tangentes en deux points.*

4° *Quand deux surfaces développables du second ordre (cônes ou cylindres) sont tangentes l'une à l'autre le long d'une génératrice rectiligne, elles se coupent suivant une courbe plane. Quand les surfaces en question sont deux cônes ayant même*

sommet, ou deux cylindres, la section (s'il y en a une) est le système de deux droites situées dans un plan.

5° *Deux surfaces du second ordre homothétiques ne peuvent se couper que suivant une courbe plane.*

6° *Quand une surface du second ordre est circonscrite à une sphère, la conique suivant laquelle elle est coupée par un plan tangent à la sphère a l'un de ses foyers au point de contact* [1].

Intersection d'une surface de révolution et d'un cylindre. *(Planche XXXIX.)*

253. La trace horizontale du cylindre est la courbe GG_1; la droite $(Or_1, O'_1r'_1)$ fait connaître la direction de ses génératrices.

La surface de révolution est donnée par son axe, qui est vertical, et par sa méridienne de front.

Un plan horizontal $C'E'O'_2$ coupe la surface de révolution suivant deux parallèles dont il est facile d'obtenir les projections horizontales, et le cylindre suivant une courbe identique à la directrice GG_1 : nous pourrions tracer la projection horizontale de cette courbe sur le plan horizontal, et déterminer son intersection avec les projections des parallèles; mais la construction serait minutieuse, et ne donnerait quelque exactitude que si elle était faite avec beaucoup de soin. Il vaut mieux opérer sur la directrice GG_1 elle-même, en reportant les parallèles dans la position convenable.

254. Nous amenons le plan $C'E'O'_2$ sur le plan horizontal en faisant mouvoir tous ses points sur des droites parallèles aux génératrices du cylindre. La section faite dans cette surface vient se placer sur la trace GG_1; le centre (O, O'_2) des parallèles $C'O'_2$ et $E'O'_2$ suit la ligne $(Or_2, O'_2r'_2)$, et se place en r_2 : si de ce point comme centre, et avec un rayon égal à C'_2C', nous traçons un arc de cercle, les points m et n où il rencontre la courbe GG_1, appartiendront à l'intersection; il n'y aura plus qu'à les reporter en $(2, 2')$ et en $(14, 14')$, sur le parallèle considéré, par des génératrices du cylindre.

---

(1) On peut voir pour les premiers théorèmes les démonstrations de Chasles (*Correspondance sur l'École Polytechnique;* t. III, p. 328 et suivantes) ou celles de Poncelet (*Traité des Propriétés projectives;* art. 600, 601 et 603). Pour le cinquième, on remarquera que, d'après la supposition faite sur les surfaces, les termes du second degré ont dans les équations des coefficients proportionnels, et peuvent par suite être éliminés tous ensemble. Dans ce cas, l'intersection du quatrième ordre est complétée par une conique à l'infini.

Le sixième théorème est dû à Dandelin. On peut l'établir en remarquant que les sections faites par un même plan dans la surface et dans la sphère sont tangentes en deux points. Quand le plan touche la sphère, on doit regarder qu'il y fait une section circulaire d'un rayon infiniment petit, ayant un double contact idéal avec la conique. Le point de tangence est, par suite, un foyer de cette courbe.

Les droites $m.2$ et $n.14$ sont égales à r_2O, longueur de la projection horizontale de la partie d'une génératrice du cylindre comprise entre le plan horizontal de projection et le plan auxiliaire. On peut donc obtenir les points 2 et 14 avec exactitude, et sans tracer la projection horizontale du parallèle, en portant la longueur r_2O à partir des points m et n sur des droites parallèles à r_1O. Les points 2 et 14 sont ensuite relevés sur le plan vertical, en 2′ et 14′.

On obtient les points de l'intersection situés sur le deuxième parallèle contenu dans le plan auxiliaire, en traçant un cercle du point r_2 comme centre, et avec un rayon égal à O'_2E. Cette construction n'est pas indiquée sur la figure.

Nous avons ponctué la figure en supposant que le cylindre était enlevé.

255. Nous déterminons la tangente au point (14, 14′), en construisant, sur le plan horizontal T′L′, les traces tL et gL des plans tangents à la surface de révolution et au cylindre. Si nous supposons que la tangente C′T′ du méridien de front soit entraînée dans le mouvement de révolution, sa trace T décrira un arc de cercle autour du point O, et sera en t sur la droite O.14 quand le point (C, C′) se trouvera en (14, 14′). La trace tL du plan tangent à la surface de révolution est perpendiculaire à Ot menée par le point t (art. **190**). La trace du plan tangent au cylindre passe par le point g, ramené de g' sur $n.14$, et est parallèle à la tangente de la trace GG_1 au point n.

Intersection d'une surface de révolution et d'un cône. (*Planche XL.*)

256. Quand le cylindre qui coupe la surface de révolution est remplacé par un cône, il faut modifier la construction en projetant sur le plan horizontal les sections horizontales auxiliaires des deux surfaces, non plus par des obliques parallèles, mais par des droites qui divergent du sommet du cône. Les sections du cône sont projetées sur sa trace, et celles de la surface sur des cercles dont on détermine facilement le centre et le rayon.

Le point (S, S′) est le sommet du cône, et la courbe GG_1 sa trace horizontale.

Considérons le plan horizontal $B'O'B'_1$: les traces K et R des droites (SO, S′O′) et (SB, S′B′), qui, venant du sommet (S, S′), passent l'une par le centre et l'autre par un point quelconque du parallèle, sont le centre et l'un des points de la *projection conique* de ce cercle (art. **183**, note). Le parallèle ainsi amené sur le plan horizontal rencontre en n et en m la trace GG_1 : il n'y a plus qu'à reporter ces points dans leur véritable position par les génératrices (Sn, S′n') et (Sm, S′m'); on trouve les points (9, 9′) et (3, 3′), qui appartiennent à l'intersection.

Nous avons ponctué la figure en supposant que le cône était enlevé.

La construction de la tangente (3.L, 3′.L′) ne présente aucune difficulté. Les

traces des plans tangents de la surface de révolution et du cône au point (3, 3′) sont les tangentes tL et mL au cercle mn et à la courbe GG_1.

Le point le plus haut, le point le plus bas et ceux qui sont sur les contours apparents du cône sont obtenus par l'ensemble du tracé de la courbe résultant de la détermination d'un grand nombre de points. Si l'on veut opérer avec beaucoup d'exactitude, on construira des courbes d'erreur.

Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent. (*Planche XLI.*)

257. Nos plans de projection sont, l'un parallèle aux deux axes, l'autre perpendiculaire à l'une de ces droites : ce dernier est considéré comme horizontal.

Les axes, qui sont (O, R′O′) et (OH, O′H′), se coupent au point (O, O′). Les courbes G′B′R′E′, et l'G′E′H′ sont les méridiennes de front des deux surfaces.

Deux surfaces engendrées par la révolution de deux courbes autour d'un même axe se coupent suivant un ou plusieurs cercles situés dans des plans perpendiculaires à cette droite. Donc, si nous prenons pour surfaces auxiliaires des sphères dont le point (O, O′) soit le centre, les surfaces considérées étant de révolution autour de chacun des axes O′R′ et O′H′, leurs intersections avec les surfaces considérées formeront deux séries de cercles qui se projetteront sur le plan vertical suivant des droites respectivement perpendiculaires aux deux axes.

Un arc de cercle B′b'B″ décrit du point O′ comme centre avec un rayon arbitraire peut être considéré comme faisant partie, sur le plan méridien de front, de la trace d'une sphère qui a son centre au point (O, O′), et qui coupe les deux surfaces de révolution suivant des cercles projetés sur les droites B′B″ et $b'\beta'$ respectivement perpendiculaires à O′R′ et O′H′. Le point M′, où ces deux droites se coupent, appartient donc à la projection verticale de l'intersection cherchée. On en déduit facilement sur le plan horizontal les points correspondants M et M_1 de la projection de la courbe (art. **189**).

En traçant différents arcs convenablement espacés, on obtiendra autant de points qu'il sera nécessaire pour bien déterminer l'intersection. On devra chercher ceux qui appartiennent au parallèle C′C″, contour apparent, sur le plan horizontal, de la surface dont l'axe est vertical.

La méthode que nous venons d'exposer est, au fond, la même que celle que nous avons employée pour déterminer l'intersection des cônes et des cylindres, mais les surfaces auxiliaires sont des sphères et non des plans. On remarquera encore que la facilité des constructions exige que l'un des plans coordonnés soit parallèle aux deux axes, et l'autre perpendiculaire à l'un d'eux.

258. La courbe dans l'espace est symétrique par rapport au plan vertical JH;

elle le rencontre normalement aux points (E, E′) et (G, G′). Par suite, la partie utile de sa projection verticale s'arrête brusquement aux points E′ et G′, et des parties parasites la prolongent (art. **220** et **248**).

Si un cercle auxiliaire coupe les méridiennes en des points D′ et *d′* situés en deçà de G′, la construction fera trouver un point N′ extérieur à la circonférence, et situé par conséquent sur les prolongements des cordes. Aucun point ne lui correspond sur la projection horizontale : il appartient à la partie parasite. On peut, en général, prolonger ainsi la courbe G′E′ au delà des extrémités de l'arc utile.

Le rayon du plus petit cercle qui rencontre les deux méridiennes est O′*l*; celui du plus grand O′R′. Les points P′ et Q′ qui leur correspondent sont les derniers que nous puissions obtenir par la méthode générale qui fait connaître la partie utile de la projection verticale de l'intersection. L'arc parasite s'étend au delà, si les méridiennes sont des courbes géométriques; mais on ne peut le tracer qu'autant que l'on connaît la loi de leur génération ([1]).

Sur notre épure, les méridiennes sont des ellipses, et le plan vertical SH peut être considéré comme principal par rapport à chacune des deux surfaces. L'arc P′Q′ appartient donc à une courbe du second degré (art. **249**); mais on compliquerait inutilement la question si l'on voulait avoir égard à cette circonstance pour son tracé ([2]).

([1]) En prenant pour méridiennes des courbes du second degré, M. Poncelet a montré qu'on pouvait déterminer des points au delà des extrémités P′ et Q′, en construisant des *sécantes idéales* communes aux cercles auxiliaires et aux méridiennes (*Traité des propriétés projectives;* art. 60 et 61, et Note de la page 410 de la deuxième édition).

([2]) La courbe est une hyperbole, parce que les deux ellipsoïdes sont allongés; elle serait également une hyperbole si les ellipsoïdes étaient tous les deux aplatis. On trouve une ellipse quand l'une de ces surfaces est allongée et l'autre aplatie, une parabole lorsque l'une d'elles est une sphère, et une droite dans le cas de deux sphères. Quand les axes sont parallèles, la courbe est une parabole, et une ligne droite si, de plus, les ellipses méridiennes sont semblables.

Du centre des sphères auxiliaires on peut abaisser sur chaque méridienne deux normales (réelles ou imaginaires), en outre de celles qui sont confondues avec l'axe de révolution. Quand ces normales sont de même longueur pour les deux courbes, l'hyperbole se change en deux droites, ou l'ellipse en un point. On voit, en effet, qu'une même sphère est alors circonscrite aux deux ellipsoïdes (art. 252, 3°). Cette sphère peut avoir un contact idéal avec une des surfaces, ou avec les deux; elle peut aussi devenir imaginaire.

M. Catalan a démontré que, quand chacune des ellipses méridiennes a un de ses foyers au point de rencontre des axes, l'intersection est le système de deux droites. La règle générale que nous venons de donner est satisfaite dans ce cas, car dans une conique les normales imaginaires abaissées de l'un des foyers sur la courbe ont une longueur nulle, et par suite ces droites sont égales dans les deux ellipses. La sphère circonscrite est alors réduite à un point.

D'après ce que nous avons dit, la nature de la courbe est indépendante de l'angle des axes.

Si l'un des ellipsoïdes glisse sur son axe, la projection verticale de l'intersection se transporte en restant homothétique à elle-même, et son centre décrit une ligne droite. Nous ferons enfin remarquer que la courbe passe par les points d'intersection des méridiennes, et qu'elle a par conséquent avec ces

259. La tangente en un point quelconque (M, M′) est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces.

Si nous supposons que la tangente B′S′ du méridien principal au point B′ soit entraînée dans le mouvement de révolution autour de l'axe, la trace S décrira un arc de cercle autour du point O, et sera en S_1 sur la ligne OM quand le point (B, B′) se trouvera en (M, M′). La trace du plan tangent à la première surface de révolution est la droite S_1I, perpendiculaire à OS_1.

Nous ne pouvons pas employer cette construction pour le plan tangent à la seconde surface, vu la position inclinée de l'axe; mais on arrive presque aussi facilement au résultat en déterminant la normale et lui menant un plan perpendiculaire.

La normale à la méridienne en *b*′ rencontre l'axe au point *k*′, que nous ramenons horizontalement en *k*. Le point (*k*, *k*′) est le sommet du cône formé par les normales à la surface, le long du parallèle dont le centre est en β′ (art. **186**). La droite (*k*M, *k*′M′) est donc normale au point (M, M′).

Nous faisons maintenant passer par ce point une droite parallèle à la trace verticale du plan tangent cherché (art. **41**); ses projections sont les droites M*i* et M′*i*′, l'une parallèle à la ligne de terre, et l'autre perpendiculaire à M′*k*′ : elle perce le plan horizontal en *i*. La trace du plan tangent passe par ce point et est perpendiculaire à M*k*. Le point I, où se rencontrent les traces des plans tangents, appartient à la tangente, qui est ainsi (MI, M′I′).

260. La courbe E′G′ ayant été déterminée par des constructions faites uniquement sur le plan vertical, la tangente M′I′ doit pouvoir être obtenue sans l'intervention des projections horizontales.

La tangente de l'intersection au point quelconque (M, M′) est perpendiculaire à la normale de chacune des surfaces, et par suite au plan de ces deux droites : la projection de la tangente est donc perpendiculaire à la trace de ce plan. Les sommets des cônes formés par les normales le long des parallèles B′B″ et *b*′β sont aux points K′ et *k*′, et par conséquent la droite K′*k*′ est la trace du plan des normales sur le plan méridien SH commun aux deux surfaces. On obtient la projection verticale de la tangente en menant du point M′ une perpendiculaire M′I′ à K′*k*′.

Cette construction peut être appliquée aux points extrêmes E′ et G′, et même à ceux qui sont situés sur les arcs parasites G′P′ et E′Q′. Ainsi, les normales des

---

lignes les relations qui existent entre les sections coniques qui ont quatre points communs (M. Lamé, *Examen des différentes méthodes, etc.*, p. 34; M. Poncelet, *Prop. project.*, p. 216). Si l'on veut déterminer ses axes, on pourra employer les méthodes générales données par M. Poncelet (*Prop. project.*, art. 344 et suiv., 394 et suiv.).

Ces diverses considérations ont peu d'importance pour les tracés, mais nous avons cru devoir donner quelques indications sur une question intéressante à plusieurs points de vue.

méridiennes aux points D′ et d' rencontrant les axes en V′ et v', la tangente de la courbe en N′ est perpendiculaire à $V'v'$.

La tangente MI peut être déterminée par la condition d'être perpendiculaire à la trace horizontale du plan des normales. Comme cette droite serait éloignée, nous allons opérer sur un plan horizontal convenablement élevé, celui dont la trace verticale est xy. Ce plan est rencontré au point (u, u') par la normale $(Mk, M'k')$, et en (k_1, k'_1) par la droite $(Ok, K'k')$, qui passe par les points où les normales coupent les axes. La trace du plan des normales est donc uk_1 ; la tangente MI est perpendiculaire à cette droite.

Pour déterminer la droite uk_1, nous ne nous sommes pas servi de la trace horizontale de la normale à la première surface, parce que ce point ne serait pas obtenu avec précision.

261. Si l'on veut avoir l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes ne se rencontrent pas, on prendra l'un des plans coordonnés parallèle aux axes, et l'autre perpendiculaire à l'un d'eux, puis on fera des sections par une série de plans parallèles à celui-ci. On obtiendra dans l'une des surfaces des cercles, et dans l'autre des courbes que l'on construira par points (art. **192**). L'opération est minutieuse, mais elle ne présente aucune difficulté.

LIVRE TROISIÈME.

PROJECTIONS COTÉES.

CHAPITRE PREMIER.

QUESTIONS RELATIVES A LA LIGNE DROITE ET AU PLAN.

Définitions. — Problèmes élémentaires.

262. Dans les Arts graphiques qui se rattachent à la Topographie, on emploie un seul plan de projection, toujours horizontal, et l'on indique par des nombres, que l'on appelle *cotes*, la longueur des projetantes ou ordonnées des différents points représentés.

Le plan de comparaison à partir duquel on mesure les ordonnées est pris quelquefois au-dessus des objets et quelquefois au-dessous d'eux. Lorsque des points sont au delà du plan de comparaison, on regarde leurs ordonnées comme négatives.

Les ordonnées sont appelées *altitudes,* lorsqu'elles indiquent la hauteur des différents points au-dessus d'un plan situé au niveau de la surface d'équilibre des eaux de la mer, supposée prolongée dans l'intérieur des terres.

Quand les objets sont représentés par leurs projections sur deux plans coordonnés, il n'est nécessaire de recourir à l'échelle du dessin que pour établir les données et relever les résultats; mais, dans les projections cotées, il faut combiner à chaque instant des abscisses linéaires avec des ordonnées numériques, et par suite l'échelle est d'un usage continuel. Toute épure, même d'exercice, doit donc être accompagnée d'une échelle.

Une droite est déterminée quand on connaît sa projection et les cotes de deux de ses points. Si elle existe réellement, on est dans l'usage de la graduer, c'est-à-dire d'indiquer ceux de ces points dont les cotes sont entières.

On appelle *intervalle* la distance horizontale qui sépare deux points dont les cotes diffèrent de 1^m.

263. *Graduer une droite qui passe par deux points donnés, et placer sur elle un point d'une cote donnée.*

Des points sont donnés quand on connaît leurs projections a et b (*fig.* 139) et leurs cotes $17^m,62$ et $21^m,45$. Le point a est plus ou moins élevé que le point b, suivant que le plan de comparaison est supérieur ou inférieur. On opère de la même manière dans les deux cas.

Nous mesurons à l'échelle la distance horizontale ab, et nous trouvons qu'elle est de $6^m,56$. D'après cela, en appelant i l'intervalle, nous avons

$$i = \frac{6^m,56}{21,45 - 17,62} = 1^m,713, \qquad 0,45\,i = 0^m,77.$$

Nous obtenons le point 21 en prenant une longueur $0^m,77$ à partir de b; nous pourrions porter ensuite plusieurs fois l'intervalle $1^m,71$; mais les erreurs s'accumuleraient, et il est préférable de déterminer un point de division vers l'extrémité de la partie utile de la droite, par exemple celui qui est à la cote 16^m; sa distance au point 21 est de 5 intervalles ou $8^m,56$. On porte cette longueur à partir du point 21, et, la divisant en cinq parties égales, on obtient les projections des points qui sont aux cotes 17, 18, 19 et 20.

Supposons maintenant que la cote donnée pour le point qu'on veut placer soit $19^m,72$; nous trouverons sa position c en portant au delà du point 19 une longueur égale à $1^m,71 \times 0,72$ ou $1^m,23$.

Si l'on avait demandé la cote du point de la droite qui se projette en c, on eût mesuré sa distance $1^m,23$ au point 19, et l'intervalle $1^m,71$; le nombre cherché aurait été $19^m + \frac{1^m,23}{1,71}$ ou $19^m,72$.

264. On peut opérer d'une autre manière. Si nous faisons tourner le plan projetant de la droite autour de sa trace sur le plan horizontal qui est à la cote 17, 62 du point donné a, le point projeté en b se placera en B sur une perpendiculaire à ab, et à une distance égale à $21^m,45 - 17^m,62$ ou $3^m,83$. En portant sur la droite bB, à partir de b, une longueur égale à $18^m - 17^m,62$ ou $0^m,38$, puis des longueurs successives d'un mètre, on pourra obtenir sur aB les rabattements des points de division, et ensuite leurs projections sur ab.

Pour avoir le point dont la cote est $19^m,72$, on prendra sur bB une longueur égale à $19^m,72 - 17^m,62$. S'il faut au contraire trouver la cote du point qui se projette en c, on élèvera la perpendiculaire cC, et l'on ajoutera sa longueur à $17^m,62$.

265. Il y a ainsi deux procédés pour combiner des cotes avec des grandeurs linéaires : on peut réduire les longueurs horizontales en nombres et opérer arithmétiquement, ou bien rétablir dans des rabattements les ordonnées représentées par des cotes, et faire des constructions. Le procédé arithmétique est plus dans l'esprit de la méthode, et on l'emploie souvent; l'autre cependant est quelquefois préféré : ainsi il serait plus simple, pour avoir la distance des points a et b,

de construire le triangle abB et de mesurer l'hypoténuse, que de faire les carrés de la différence des cotes et du nombre qui exprime la longueur de la projection, et de prendre la racine carrée de leur somme.

266. La *pente* d'une droite est la tangente de son inclinaison sur le plan de projection; son produit par l'intervalle est égal à l'unité, ce qu'on exprime en disant que la pente et l'intervalle sont *réciproques*.

Graduer une droite dont on connaît la projection ab (fig. 140), *la pente* 0,70 *et un point a dont la cote est* $15^{m},67$.

Désignant toujours l'intervalle par la lettre i, nous avons

$$i = \frac{1}{0,70} = 1^{m},43, \qquad 0,67i = 0^{m},96.$$

Nous mettons la cote 15 à un point situé à 0,96 du point a et nous graduons la droite sans difficulté. Il y aura deux solutions, si la nature du problème n'indique pas de quel côté les cotes doivent aller en augmentant.

267. *Par un point donné* A, *faire passer une droite parallèle à une droite donnée* BC (*fig.* 141).

La projection AD de la droite cherchée doit être parallèle à BC. La grandeur de l'intervalle est la même sur les deux droites. La cote du point donné A étant $15^{m},34$, le point dont la cote est 15 se trouve à une distance horizontale de A égale aux 34 centièmes de l'intervalle.

268. *Reconnaître si deux droites* A *et* B (*fig.* 142) *se coupent, et dans ce cas déterminer la cote de leur point commun.*

Les horizontales qui rencontrent A et B seront parallèles si ces droites sont dans un même plan, et non parallèles dans le cas contraire; la même différence se produira en projection. Nous traçons les sécantes qui correspondent aux cotes 16, 17 et 18; nous trouvons qu'elles sont parallèles, et nous en concluons que les droites se coupent.

Aux cotes 18 et 16, les longueurs des sécantes sont respectivement de $8^{m},40$ et $6^{m},04$. La diminution de longueur de la sécante horizontale, qui est de $2^{m},36$, correspond à une différence de hauteur de 2 mètres; pour réduire la sécante de $8^{m},40$, il faudra une hauteur égale à $\frac{8^{m},40 \times 2^{m}}{2^{m},36}$ ou $7^{m},12$. La cote du point commun est donc $18^{m} - 7^{m},12$ ou $10^{m},88$.

Si le point de rencontre des projections A et B avait été dans le cadre de l'épure, on eût pu calculer la cote du point correspondant de chaque droite (art. **265**) et voir si on obtenait le même nombre; mais ce procédé est moins exact.

Nous examinerons plus loin (art. **275***a*) le cas où les deux droites sont dans un même plan vertical.

269. Quand un plan existe réellement, on le représente par ses horizontales à cotes entières limitées à son périmètre. Pour un plan de construction, on se contente généralement de son *échelle de pente;* c'est une de ses lignes de plus grande pente graduée.

Toute droite située dans un plan, et perpendiculaire à ses horizontales, peut être prise pour son échelle de pente. On l'indique alors par un double trait P (*fig.* 143).

On pourrait, dans les épures où l'on emploie deux plans de projection, définir un plan par sa ligne de plus grande pente; il serait toujours facile d'avoir ses traces. La ligne de plus grande pente d'un plan joue d'ailleurs souvent un rôle fort important dans les épures, comme on peut le remarquer sur les *fig.* 95, 112, 114 et 116.

270. *Trouver la cote d'un point dont on connaît la projection* A, *et qui est sur un plan donné* P (*fig.* 143).

Nous menons par le point A une horizontale du plan : cette droite AB est perpendiculaire à l'échelle de pente P. Nous déterminons ensuite la cote $52^{m},33$ du point B de la droite P.

271. *Faire passer un plan par trois points* A, B, C (*fig.* 144).

Nous joignons par une droite BC deux des points donnés, nous graduons cette droite, et nous déterminons sur elle le point D, qui a la cote $14^{m},78$ du point A. Nous traçons l'horizontale AD du plan et ensuite l'échelle de pente qui lui est perpendiculaire. Il n'y a plus qu'à ramener sur cette droite les points de division de BC par des parallèles à AD.

272. *Construire un plan passant par deux points donnés* A *et* B (*fig.* 146), *et ayant une pente donnée* 1,25.

Concevons un cône de révolution dont le sommet soit au point A, dont les génératrices aient la pente donnée, et dont la base repose sur le plan horizontal du point B. Il est facile de tracer cette base : son rayon est $\frac{15^{m},43 - 12^{m},27}{1,25}$ ou $2^{m},53$. Le plan cherché doit être tangent au cône (art. **125**). Sa trace sur le plan horizontal du point B sera donc la tangente BT à la base du cône; en lui menant une perpendiculaire P, nous obtenons l'échelle de pente. Enfin nous graduons la droite AB, et nous rapportons ses points de division sur P.

En menant du point B une autre tangente à la base du cône, on obtiendra un second plan qui satisfera également à la question, si le sens dans lequel l'angle doit être mesuré n'est pas déterminé.

Le sommet du cône est au-dessus ou au-dessous de sa base, suivant que le plan de comparaison est supérieur ou inférieur.

273. *Par un point* A *donné sur un plan* P (*fig.* 143), *tracer dans ce plan une droite d'une pente donnée* 0,44.

La distance horizontale du point A à celui des points de la droite cherchée qui se trouve à la cote 55 est $\frac{55^m - 52^m,33}{0,44}$ ou $6^m,07$. La projection de ce point est donc sur un arc de cercle décrit du point A comme centre, avec un rayon de $6^m,07$; comme d'ailleurs il doit être sur l'horizontale 55 du plan, nous obtenons sa position par recoupement. Nous pouvons ensuite tracer la droite. On trouve deux solutions; il pourrait ne pas y en avoir.

274. *Construire l'intersection de deux plans* P *et* Q.

Les horizontales de même cote se rencontrent dans l'espace, et donnent des points de la droite d'intersection A (*fig.* 147).

Sur la *fig.* 148, les points de rencontre des horizontales des plans P et Q étant éloignés, nous avons employé deux plans auxiliaires dont les intersections avec les plans donnés ont fait connaître deux points *m* et *n* de la droite cherchée A. Chaque plan auxiliaire n'est représenté sur la figure que par deux horizontales aux cotes 20 et 23 : ces droites suffisent pour la construction.

La droite A est presque horizontale, et, par suite, il n'est pas possible de la graduer en cotes entières; on déterminera sans difficulté la cote de l'un quelconque de ses points, en le ramenant sur l'une des échelles P ou Q par une perpendiculaire.

275. *Déterminer l'intersection d'une droite* A *et d'un plan* P (*fig.* 149).

Par deux points 30 et 33 de la droite, nous menons des parallèles dans une direction quelconque, et nous les considérons comme les horizontales d'un plan dont nous déterminons l'intersection BC avec P. Cette droite fait trouver sur A le point cherché, dont on détermine ensuite la cote. Nous avons ponctué la droite dans la supposition que le plan de comparaison est inférieur, et que le plan P existe réellement.

On peut prendre pour plan auxiliaire le plan projetant de la droite; il faut alors le rabattre en le faisant tourner autour d'une de ses horizontales. Nous donnerons plus loin un exemple de cette construction (art. **287**).

275 *a. Déterminer le point d'intersection de deux droites situées dans un même plan vertical.*

On fait passer un plan par chaque droite, et l'on construit l'intersection des deux plans ainsi obtenus. Cette droite rencontre au point cherché la commune projection des deux droites.

On peut encore rabattre le plan vertical qui contient les droites données, en le faisant tourner autour d'une de ses horizontales (*fig.* 145).

276. *Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.*

Pour avoir l'échelle de pente du plan cherché, il suffit de mener par le point donné une droite parallèle à la ligne représentée par l'échelle de pente du premier plan (art. **267**).

277. *Quand un plan est perpendiculaire à une droite, son échelle de pente est parallèle à la projection de la droite*, car ces deux droites sont perpendiculaires aux horizontales du plan (art. **46**).

Les angles que la droite et une ligne de plus grande pente du plan font avec l'horizon sont complémentaires; par conséquent, les intervalles i et i', mesurés sur la projection de la droite et sur l'échelle de pente du plan, sont réciproques :

$$ii' = 1.$$

Il est d'ailleurs évident que les cotes doivent croître en sens opposé, sur l'échelle de pente du plan et sur la projection de la droite.

278. *D'un point donné* A (*fig.* 152), *mener une perpendiculaire à un plan donné* P.

La projection AB de la perpendiculaire est parallèle à P. L'intervalle i' sur l'échelle de pente donnée est $0^m,80$; par suite, l'intervalle i doit être $1^m,25$. La graduation de la droite ne présente ainsi aucune difficulté. Si l'on veut avoir la distance du point A au plan P, on déterminera le pied de la perpendiculaire, et l'on construira la vraie grandeur de la droite qui va de ce point au point donné (art. **265**).

On résout de la même manière le problème de mener par un point un plan perpendiculaire à une droite.

279. *Déterminer l'angle de deux droites* A *et* B (*fig.* 150).

Par un point m de A ayant une cote entière 9, nous menons une droite B′ parallèle à B; puis nous faisons tourner le plan des droites A et B′ autour d'une de ses horizontales, celle qui est à la cote 12, jusqu'à ce qu'il soit horizontal. La perpendiculaire abaissée du point m de l'espace sur l'axe du mouvement se projette sur la droite mg perpendiculaire à cet axe, et nous trouvons facilement sa grandeur gM_1 (art. **265**); nous pouvons, par suite, placer le rabattement M du point de l'espace et des côtés de l'angle cherché.

Si les droites A et B′ étaient dans un même plan vertical, le rabattement serait disposé comme il est indiqué sur la *fig.* 145.

280. *Déterminer l'angle de deux plans* P *et* Q (*fig.* 153).

La droite mn, perpendiculaire à la projection ab de l'intersection des deux plans, peut être considérée comme la trace sur le plan horizontal qui est à la cote 13 d'un plan perpendiculaire aux plans P et Q. Nous rabattons ce plan auxiliaire en le faisant tourner autour de mn : le point où il rencontre l'intersection se place en G, à une distance de r que l'on obtient en rabattant le plan projetant de la droite ab autour de celle de ses horizontales qui est à la cote 13. L'angle cherché est mGn.

Cette construction est analogue à celle que nous avons exposée à l'article **56** pour le cas où l'on opère sur deux plans coordonnés.

281. *Par un point donné* A *mener une droite qui fasse un angle donné avec une droite donnée* D (*fig.* 151).

Nous déterminons sur la droite le point B qui a la même cote que A, et nous concevons que le plan passant par la droite et par le point donné tourne autour de la droite AB jusqu'à devenir horizontal. Un point n est porté en N, et la droite D devient BN; on trace alors la droite AI sous l'inclinaison voulue, et l'on remet le plan en position : le point I est ramené en i sur une perpendiculaire à AB, et la droite cherchée est Ai. On la gradue en menant, par les points de division de D, des parallèles à AB.

Le problème admet deux solutions quand le sens dans lequel on doit mesurer l'angle n'est pas déterminé par la nature de la question.

Si l'on voulait avoir la distance du point A à la droite D, on abaisserait de ce point une perpendiculaire sur BI, et l'on mesurerait sa longueur.

Exercices.

282. Dans les problèmes qui suivent, les cotes représentent les hauteurs *au-dessus* d'un plan de comparaison.

Premier exercice. — *On donne trois points* A, B, C (*fig.* 154); *on demande :*

1° *De faire passer par chacune des droites* AB *et* BC *un plan dont la pente vers l'extérieur de l'angle* ABC *soit* $\frac{1}{6}$, *et de limiter ces deux plans* X *et* Y *aux droites* AB *et* BC *d'une part, et de l'autre à des plans verticaux parallèles à ces droites et éloignés d'elles de* 6^m;

2° *De faire passer par les droites* G *et* H, *suivant lesquelles les plans* X *et* Y *coupent les plans verticaux, des plans* x *et* y *inclinés de* 1 *de base pour* 1 *de hauteur, et de les limiter à un plan horizontal situé à* $3^m,50$ *au-dessous du point* B;

3° *De prendre sur les droites* G *et* H *deux points de même cote* D *et* E, *peu éloignés l'un de l'autre, et de faire passer un plan par ces points et le point* B, *et un autre plan par ces points et le point où se rencontrent les traces des plans* x *et* y *sur le plan horizontal situé à* $3^m,50$ *au-dessous du point* B.

On résout la première partie du problème par la construction donnée à l'article **272**. Ainsi la différence de niveau des points A et B étant $0^m,90$, et le plan X devant avoir une pente de $\frac{1}{6}$, la distance du point B à l'horizontale du point A est, sur la figure, $0^m,90 \times 6$ ou $5^m,40$. Nous obtenons donc l'horizontale de la cote $24^m,90$ en menant du point A une tangente à un cercle décrit du point B comme centre, et avec un rayon de $5^m,40$. Nous avons tracé les lignes de niveau du plan X qui ont des cotes entières, et celles qui correspondent à des cotes fractionnaires de 25 centimètres en 25 centimètres.

On détermine le plan Y par une construction analogue.

Le plan x doit être limité à son intersection avec un plan horizontal situé à $3^m,50$ au-dessous du point B, et par conséquent à la cote $22^m,30$. Comme d'ailleurs ce plan est incliné à 1 de base pour 1 de hauteur, son horizontale de la cote $22^m,30$ passe à $1^m,70$ et $2^m,45$ des points p et q, qui sont respectivement aux cotes 24^m et $24^m,75$. Cette horizontale est donc facile à tracer comme tangente commune de deux arcs de cercle. En menant par les points p, r, s, q des parallèles à cette droite, on obtient des horizontales du plan.

On opère de la même manière pour le plan y.

Les points D et E doivent avoir la même cote, et comme les plans X et Y ont des pentes égales, il s'ensuit que, sur la figure, ces points doivent être à la même distance des horizontales correspondantes, par exemple de celles qui sont à la cote 25. On prend le point D arbitrairement; le point E est ensuite facile à déterminer. Traçant les droites BD, BE, FD, FE et DE, on a deux surfaces planes triangulaires BED, FED, sur lesquelles on obtient aisément des lignes de niveau.

Pour limiter la figure, nous avons supposé que les plans X et x étaient arrêtés à un plan vertical ii' perpendiculaire à ceux qui projettent les droites AB et G; l'intersection des plans X et x par ce plan a été rabattue. Une disposition analogue a été adoptée pour les plans Y et y.

283. Deuxième exercice. — *Une plate-forme horizontale et rectangulaire* ABCD (*fig.* 158) *est élevée jusqu'à une cote donnée* $8^m,35$, *au-dessus d'un terrain uni dont on connaît l'échelle de pente* P. *Elle se relie à ce terrain par des talus plans; ceux qui correspondent aux côtés* AB *et* CD *sont inclinés à* 1 *de hauteur pour* 2 *de base, et les autres à* 2 *de hauteur pour* 3 *de base. On demande de représenter les intersections des talus entre eux et avec les surfaces du sol, et de tracer sur eux les lignes brisées qui prolongent les horizontales cotées du plan.*

Les droites AB et CD sont des horizontales des plans des talus correspondants. La pente de ces talus étant $\frac{1}{2}$, l'intervalle est 2^m, et l'*intervalle réduit* pour des horizontales échelonnées de $0^m,25$ en $0^m,25$ est $0^m,50$. Il est donc facile de tracer les échelles de pente pour ces deux talus; on opère de la même manière pour les autres, en observant que l'intervalle est seulement $1^m,50$.

Les points de rencontre des horizontales de même cote, des talus et de la surface du sol, et de deux talus contigus font connaître les droites d'intersection cherchées.

284. Troisième exercice. — *Une plate-forme horizontale et rectangulaire* ABCD (*fig.* 156) *est placée à une cote donnée* $17^m,50$, *partie en remblai et partie en déblai,*

sur un terrain uni dont l'échelle de pente est donnée. Les talus de déblai sont réglés à 1 de base pour 1 de hauteur, et ceux de remblai à 3 de base pour 2 de hauteur.

Une rampe de 3^m de largeur, inclinée à 5 de base pour 1 de hauteur, s'étend du milieu du côté qui est en remblai, jusqu'au terrain naturel.

On demande de représenter les talus de la plate-forme et la rampe.

Les remblais et les déblais prennent leur origine aux points M et N où l'horizontale du sol, qui est à la cote $17^m,50$, rencontre le rectangle de la plate-forme. On peut établir les échelles de pente des talus de déblai sur les droites Mm_1 et Nn_1, tracées perpendiculairement aux grands côtés AD et BC; la pente des talus étant 1, l'intervalle est aussi 1 : prenant les longueurs Mm et Nn égales à 1^m, nous pouvons tracer les droites mm' et nn', qui sont les horizontales, à la cote $18^m,50$, des plans des talus, et dont les rencontres m' et n' avec l'horizontale de même cote du terrain font connaître les droites d'intersection Mm' et Nn'.

Les trois talus de déblai ayant la même pente, leurs intersections Aa et Bb font des angles égaux avec les côtés contigus de la plate-forme. Nous les traçons par cette seule considération; leurs points de rencontre a et b avec Mm' et Nn' déterminent l'intersection ab du troisième talus avec le terrain naturel.

Les horizontales de la surface du sol sont prolongées sur les talus de déblai, en ligne brisée, par des droites parallèles aux côtés du rectangle.

Les talus de remblai, abstraction faite de la rampe, s'établissent de la même manière avec la différence qui résulte du changement de la pente.

Pour la rampe, nous traçons d'abord les côtés parallèles EG et FH à la distance de 3^m l'un de l'autre. La pente devant être $\frac{1}{5}$, l'intervalle est 5. Après avoir tracé les horizontales pour des cotes de $0^m,50$ en $0^m,50$, nous prolongeons deux d'entre elles, celles qui sont aux cotes $12^m,50$ et $15^m,50$, jusqu'à la rencontre des horizontales du terrain qui sont aux mêmes cotes (art. **274**), et nous obtenons l'intersection hg du plan de la rampe avec celui de la surface du sol. La partie HG est seule utile.

On détermine les plans des talus de la rampe par la construction indiquée à l'article **272**. D'après la pente assignée aux talus de remblai, l'intervalle est $1^m,50$. Le point I étant à 2^m au-dessous du point E, son horizontale, sur la figure, passe à 3^m de la projection de ce point; elle est donc tangente au cercle décrit du point E comme centre avec un rayon égal à 3^m. La rencontre de cette horizontale et de celle de même cote du terrain donne un point i de l'intersection. Nous savons d'ailleurs que cette droite passe par le point G. On opère de la même manière pour l'autre talus. Les horizontales du plan sont prolongées en ligne brisée sur la rampe et les talus.

285. Quand on veut placer sur un terrain incliné un polyèdre dont la représentation sur un sol horizontal n'offrirait aucune difficulté, on peut supposer le

plan qui forme la surface du terrain ramené à l'horizontalité, y dessiner le corps et voir le déplacement qu'il éprouve quand on rétablit le plan dans sa position.

Nous allons donner un exemple de cette manière d'opérer.

Quatrième exercice. — *On demande de représenter un polyèdre compris entre six faces : une base rectangulaire placée sur un terrain incliné, une base supérieure, parallèle à la première et rectangulaire comme elle, et quatre trapèzes également inclinés sur les plans des bases. On donne les dimensions des bases, la distance qui les sépare et la pente du terrain.*

Si l'on suppose que la surface plane du sol soit devenue horizontale en tournant autour de l'une de ses horizontales, celle qui est à la cote $21^m,20$ (*fig.* 155), on pourra tracer la projection ABCDEFGH du polyèdre; puis, rabattant sur le plan horizontal de la même cote le plan vertical qui projette l'échelle de pente, on y placera la projection G′E′ de la base supérieure du polyèdre.

Nous déterminons la trace verticale PQ du terrain, quand il est remis dans sa position, en portant sur le prolongement de l'horizontale du plan qui est à la cote $22^m,20$, une longueur qQ égale à la différence des cotes des points q et R, c'est-à-dire à un mètre. On place ensuite sans difficulté la trace verticale $e'g'$ du plan de la base supérieure du polyèdre, on cherche les points (a, a'), (b, b'), ..., où les sommets (A, A′), (B, B′), ... sont transportés dans le relèvement.

Si une arête telle que ad avait été donnée, on l'eût ramenée en AD sur le plan horizontal, et l'on eût appuyé sur cette droite la première projection du polyèdre.

Pour tracer les lignes de niveau sur les divers plans, nous déterminons le point (m, m') qui sur l'arête $(cg, c'g')$ est à la cote $21^m,60$, et nous le joignons au point r. Les autres horizontales du même talus sont ensuite faciles à tracer. Nous avons obtenu celles du talus opposé en déterminant le point (n, n'), qui est à la cote $21^m,80$.

CHAPITRE II.

CONES ET CYLINDRES.

Notions générales.

286. Après les explications que nous venons de donner, il serait très facile de résoudre par la méthode des projections cotées tous les problèmes que nous avons traités dans le Livre II. Nous allons examiner celui du plan tangent à un cône par un point extérieur.

Le cône que nous considérons est donné par son sommet *s* (*fig.* 159), et sa trace sur le plan horizontal dont la cote est $13^m,60$. Le point donné est *a*. La ponctuation montre que le sommet du cône est plus élevé que la base, et par suite, eu égard aux grandeurs relatives des cotes, que le plan de comparaison est inférieur.

Nous déterminons sur la droite *as* le point *g* qui est à la cote $13^m,60$ du plan de la base du cône. Chacune des tangentes *gv* et *gu* est la trace d'un plan tangent sur le plan horizontal $13^m,60$. Nous plaçons les échelles de pente P et Q perpendiculaires à ces droites, et nous y rapportons par des horizontales la graduation de la droite *as*.

287. Les tracés ne sont pas beaucoup plus difficiles quand la base du cône est sur un plan incliné R (*fig.* 160).

La droite qui passe par le sommet *s* et le point donné *a* rencontre le plan R en un point *g* que nous déterminons en rabattant le plan vertical *sa* sur le plan horizontal qui est à la cote 8 : la droite et la trace du plan prennent les positions AS et *mb*; leur point de rencontre G se projette en *g*. Il n'y a plus qu'à mener de ce point des tangentes *gu* et *gv* à la trace du cône, et à faire passer des plans par ces droites et par *as*.

Exercice.

288. *Un cône de révolution tronqué dont l'axe est vertical s'élève au-dessus d'un terrain plan et incliné, et y porte ombre. On demande de construire son intersection par le plan, les lignes de l'ombre propre et celles de l'ombre portée.*

Le cône est donné par son sommet S (*fig.* 157) et le cercle CD qui forme sa base supérieure. On peut par conséquent tracer une génératrice, la graduer, et décrire les divers parallèles qui sont aux cotes des horizontales du plan représentées sur la figure. La courbe d'intersection du tronc de cône avec le terrain est donnée par le lieu des points, tels que M, où les cercles rencontrent les horizontales de même cote du plan.

La tangente de la courbe en un point M passe par le point T_1 où se rencontrent les traces du plan tangent au cône et du plan du sol, sur le plan horizontal qui est à la cote 25^m.

La courbe est une ellipse dont le grand axe est perpendiculaire aux horizontales du terrain, et dont le point S est un des foyers (art. **166**).

289. Les rayons de lumière sont parallèles : la droite graduée SK donne leur direction.

Du point G, situé sur cette droite à la cote 25^m, nous menons des tangentes au cercle de même cote; ce sont des horizontales des plans tangents au cône et

parallèles aux rayons de lumière. Les points de contact A et B appartiennent aux génératrices qui séparent la partie éclairée de la partie obscure.

La trace E*c* d'un plan tangent, sur la surface du sol, est donnée par les points *g* et *h* où se rencontrent deux horizontales de même cote de ces plans (art. **274**). La trace de l'autre plan tangent est obtenue de la même manière par les points *h'* et *i*. Les droites *gh* et *h'i* se rencontrent sur SG en un point K, ombre du sommet S du cône.

Le rayon de lumière C*c* est dans le plan d'ombre de la génératrice CE et coupe en V l'horizontale H*h* qui est à la cote 24. Si nous portons sur une génératrice quelconque N*n* du cylindre d'ombre une longueur N*v* égale à CV, nous aurons le point où elle perce le plan horizontal dont la cote est 24. Comme d'ailleurs l'intervalle est égal à GH pour tous les rayons de lumière, nous obtenons facilement le point de N*v* qui est à la cote 23. La détermination du point d'ombre *n* sur le sol se fait ensuite par la construction expliquée à l'article **275**.

Si l'on veut avoir deux diamètres conjugués de l'ellipse *cd*, on cherchera les ombres de deux diamètres rectangulaires du cercle CD.

LIVRE QUATRIÈME.

PERSPECTIVES AXONOMÉTRIQUE ET CAVALIÈRE.

CHAPITRE PREMIER.

PERSPECTIVE AXONOMÉTRIQUE.

Figures géométrales.

290. On trouve généralement dans les édifices, les machines et les autres constructions, trois dimensions principales, l'une verticale et les deux autres horizontales et rectangulaires. Trois plans parallèles à ces directions considérées deux à deux sont pris habituellement pour plans de projections, dans la représentation de l'objet.

La projection horizontale a reçu le nom de *plan*, les deux autres ceux d'*élévation longitudinale* et d'*élévation latérale*. Le plus souvent on ne dessine que les parties vues, et pour montrer celles qui sont naturellement cachées, on fait de nouvelles figures en supposant que la partie antérieure de l'objet a été enlevée jusqu'au plan de projection transporté parallèlement à lui-même, à une position convenable. Ces dessins ont reçu le nom de *coupes*. Les coupes faites par des plans parallèles, placées les unes sur les autres, et réunies à l'élévation correspondante, formeraient une projection complète de l'objet.

291. Les tracés que nous avons expliqués dans les Livres I et II s'appliquent immédiatement aux plans, coupes et élévations, et permettent de résoudre toutes les questions géométriques qui se rapportent à l'objet représenté; mais ce genre de dessin, qu'aucun autre ne remplace complètement quand on veut exécuter, a l'inconvénient de ne pas faire toujours ressortir d'une manière suffisamment claire les formes des objets, et il y faut renoncer quand on désire faire promptement comprendre des dispositions compliquées. Le mieux alors serait peut-être d'employer la perspective conique, mais elle exige beaucoup de soin dans les tracés et tous les dessinateurs ne la connaissent pas. On y supplée par des *perspectives rapides*, modes de représentation qui n'exigent que des tracés faciles; ils

ne reproduisent pas exactement l'apparence des objets, mais ils font comprendre l'agencement de leurs diverses parties, et ils permettent, dans bien des cas, de restituer les *figures géométrales* : c'est ainsi qu'on appelle le plan, les élévations et les coupes.

Notions générales sur la perspective axonométrique.

292. La perspective axonométrique est une projection orthogonale faite sur un plan oblique aux directions principales dont nous avons parlé. On la dispose de manière que les droites verticales dans l'espace soient représentées par des droites verticales sur la figure.

Pour faire une perspective axonométrique d'un objet dont on a les figures géométrales, on choisit trois axes respectivement parallèles aux trois directions principales, on se donne leurs projections Sx, Sy et Sz (*fig.* 175), et on détermine les angles a, b et c qu'ils forment avec le plan de la figure (art. **82**).

Les coordonnées de chacun des points que l'on veut représenter peuvent être aisément déterminées sur les figures géométrales; la direction des projections des droites principales est connue, et il est facile d'obtenir leur grandeur réduite d'après leur inclinaison. La construction d'une perspective axonométrique se réduit ainsi à des opérations très simples.

293. Pour opérer d'après des données numériques, il faut avoir des échelles. On établit d'abord et arbitrairement l'échelle des vraies grandeurs : elle sert à déterminer le rayon d'un cercle qui représente une sphère, l'écartement de deux droites qui forment le contour apparent d'un cylindre de révolution, le grand axe d'une ellipse perspective d'un cercle, et en un mot toutes les longueurs qui ne sont pas réduites par la projection.

On prend ensuite sur les droites A'_1S', B'_1S' et $C'S'$ (*fig.* 175) des segments A'_1M', B'_1N' et $C'P'$ égaux à l'unité, et, les projetant sur XY, on a la grandeur réduite de l'unité sur les projections des trois axes, ce qui permet d'établir des échelles pour les longueurs qui leur sont respectivement parallèles.

Quand les directions des axes sont données sur la figure, l'une quelconque des échelles détermine les trois autres. On peut ainsi choisir arbitrairement la longueur qui doit représenter l'unité dans la direction de l'un des axes; on en déduit la longueur de l'unité d'abord dans l'espace, car il faut supposer qu'on a modifié la grandeur des objets avant de les projeter, et ensuite sur le plan de projection, dans la direction de chacun des deux autres axes.

Ainsi, si l'on veut qu'un mètre sur l'axe dont la projection est Sy soit représenté par une longueur B'_1N, on tracera la droite NN' perpendiculaire à XY, et l'on déterminera ainsi la grandeur B'_1N' que doit avoir une longueur égale à 1^m

sur l'objet dans l'espace. Prenant ensuite des segments A'_1M' et $C'P'$ égaux à B'_1N', on trouvera que les longueurs qui doivent correspondre à 1^m sur les axes Ax et Az sont A'_1M et $C'P$.

294. Quelquefois on se donne, non la direction des axes sur la figure, mais les grandeurs qui doivent représenter l'unité dans la direction de chacun d'eux.

Appelons m, n et p ces longueurs, a, b et c les angles des axes avec le plan de projection, et k la grandeur de l'unité dans l'espace, c'est-à-dire la longueur qui, portée sur l'un ou l'autre des trois axes, est réduite par la projection à m, n ou p. Nous avons

$$k\cos a = m, \qquad k\cos b = n, \qquad k\cos c = p.$$

Les trois axes étant rectangulaires, la somme des carrés des cosinus des angles qu'ils font avec une droite quelconque telle que (S, sS') (*fig.* 175) est égale à 1, et par suite la somme des carrés des cosinus des angles complémentaires a, b et c qu'ils font avec le plan de projection est égale à 2 :

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 2;$$

donc

$$2k^2 = m^2 + n^2 + p^2.$$

m, n et p étant connus, on obtient k par une construction très simple (*fig.* 174), et l'on a l'échelle des vraies grandeurs; on détermine ensuite les angles a, b et c par des triangles rectangles, tels que $MM'A'_1$, $NN'B'_1$, $PP'C'$.

Les inclinaisons des trois axes étant déterminées, il est facile d'obtenir les angles que comprennent leurs projections en établissant la *fig.* 175 par une construction en ordre inverse de celle que nous avons donnée à l'article **82**. On trace une droite XY dans la direction que l'on veut donner aux verticales, on élève une perpendiculaire sS' d'une grandeur arbitraire, on trace par le point S' les droites $S'A'_1$, $S'B'_1$ et $S'C'$ qui rencontrent XY sous les angles a, b et c, puis la droite $S'd'$, perpendiculaire à $S'C'$. On place le point S sur le prolongement de la droite $S's$. Le reste de la construction n'a pas besoin d'explication.

295. En faisant disparaître k de la valeur de $\cos a$, on obtient

$$\cos^2 a = \frac{2m^2}{m^2 + n^2 + p^2}.$$

Pour que l'angle a soit réel, il faut que m^2 soit plus petit que $n^2 + p^2$. Si cette condition n'était pas satisfaite, le triangle rectangle qui fait connaître l'angle a ne pourrait pas être construit, car l'hypoténuse k serait plus petite que le côté m. On ne trouve un système de trois inclinaisons réelles que quand chacune des quantités m^2, n^2 et p^2 est plus petite que la somme des deux autres.

La construction conduit à la même conséquence. Pour que les axes horizontaux aient des projections réelles Sx et Sy, il faut que les arcs décrits du point S comme centre avec des rayons égaux à SA_1 et SB_1 rencontrent la droite dd', et par suite que l'on ait

$$SA_1 > Sd, \quad SB_1 > Sd.$$

On obtient immédiatement

$$SA_1 = sS' \cot a, \quad SB_1 = sS' \cot b, \quad Sd = sS' \operatorname{tang} c.$$

A l'aide de ces valeurs, et en éliminant a, b et c par les équations de l'article **294**, on reconnaît que les inégalités conduisent à la condition que nous avons déjà trouvée.

Nous allons maintenant présenter quelques exercices.

Assemblages de charpente.

296. Les figures géométrales 164 et 165 représentent une pièce de bois horizontale B assemblée à *tenon* et *mortaise* dans une pièce verticale A. Les *fig.* 166 et 167 sont des perspectives axonométriques de ces pièces séparées.

Par un point $1'$ (*fig.* 166), nous menons deux droites $1'.2'$ et $1'.7'$ respectivement parallèles à Sx et Sy (*fig.* 175), et nous portons sur ces droites les longueurs 1.2 et 1.7 (*fig.* 164), après les avoir réduites par la projection sous les angles a et b (*fig.* 175). En achevant le parallélogramme $1'.2'.8'.7'$, nous avons une section droite de la pièce A, et par les sommets $1'$, $2'$, $8'$ et $7'$ nous traçons les arêtes dans une direction parallèle à Sz (*fig.* 175).

La longueur $1'.1''$ de la *fig.* 165 est réduite par la projection sous l'angle c, et portée sur la *fig.* 166.

On continue les opérations de la même manière; il n'y a aucune difficulté, parce que chacune des droites est dans l'une des directions principales.

297. On propose d'établir la perspective axonométrique de la pièce entaillée pour un assemblage à *mi-bois avec embrèvement*, qui est représentée sur les figures géométrales 170 et 171.

Sur une droite $1'.7'$ (*fig.* 172) parallèle à l'axe Sy (*fig.* 175), nous portons les longueurs 1.9, 1.8 et 1.7 prises sur la *fig.* 170 et réduites convenablement, c'est-à-dire par une projection sous l'inclinaison b. Nous traçons parallèlement à Sx (*fig.* 175) les grandes arêtes qui passent par les points $1'$ et $7'$, et les coordonnées qui aboutissent aux points $9'$ et $8'$. Nous plaçons sur ces droites les longueurs des droites 1.3, 9.2, 8.5, 7.6 et 7.4, réduites par une projection sous l'inclinaison a, et nous établissons les lignes brisées $1'.5'.6'$ et $3'.2'.4'$. Il n'y a

plus qu'à tracer des verticales, et à les prendre égales, les unes à l'épaisseur totale de la pièce convenablement réduite, les autres à sa moitié.

Suivant un usage généralement adopté, nous avons tracé des hachures sur toutes les sections qui, dans une pièce, ne sont pas parallèles à ses grandes arêtes.

297 *a*. Les *fig.* 166 et 168 d'une part, 172 de l'autre, indiquent beaucoup mieux la forme des pièces que les figures géométrales correspondantes.

Lorsque l'on a l'habitude de ce genre de perspective, on détermine promptement, dans chaque cas, des directions convenables pour les axes, de manière que la forme de l'objet soit nettement accusée.

Niche sphérique. (*Pl. XLIX.*)

298. Nous allons nous proposer d'établir directement la perspective axonométrique d'une niche sphérique.

Nous nous donnons les directions Sx, Sy et Sz des projections des axes (*fig.* 161); nous déterminons leurs inclinaisons $S'A'_1X$, $S'B'_1X$ et $S'C'X$ sur le plan de la figure; puis nous projetons, sous chacun de ces angles, la longueur qui doit représenter 1^m dans l'espace. Enfin, divisant cette longueur et ses projections A'_1M, B'_1N et $C'P$, nous avons l'échelle des vraies grandeurs et les trois échelles réduites qui correspondent aux trois axes.

Le plan zSx est parallèle au plan de tête [1] de la niche.

299. La droite ab (*fig.* 162) parallèle à Sx est un diamètre de l'ellipse dont la moitié supérieure représente le demi-cercle de tête. Sa longueur est égale à la largeur de la niche que nous supposons de 1^m, mesurée à l'échelle Sx. Le centre de la sphère est au point milieu C.

Le plan de tête étant parallèle aux deux axes Sx et Sz, les droites de ce plan qui, telles que CA, sont parallèles au plan de projection, se trouvent perpendiculaires à Sy (art. **82**). Nous pouvons par cette condition tracer la droite CV, sur laquelle est le diamètre dont la projection ne réduit pas la longueur, c'est-à-dire le grand axe de l'ellipse. Nous obtenons le sommet v en prenant sur cette droite un segment Cv égal à une longueur de $0^m,50$, mesurée à l'échelle des vraies grandeurs.

Si l'on voulait apporter beaucoup d'exactitude au dessin pour déterminer le demi-grand axe, on porterait la droite Cb (*fig.* 162) sur XY (*fig.* 161), à partir

---

(1) Le *plan de tête* est le plan vertical de la surface du mur dans lequel est établie la niche. Les *assises* sont les zones horizontales de pierres qui s'élèvent jusqu'à la partie sphérique. On appelle *voussoirs* les pierres qui forment cette partie, et *trompillon* le voussoir central $b_1e_1a_1$ (*fig.* 163).

du point A'_1, et l'on verrait à quelle longueur cette projection correspond sur $A'_1 S'$.

Le petit axe est dirigé sur la droite Cy parallèle à Sy; nous déterminons sa grandeur par la condition que l'ellipse passe au point b. Pour cela, de ce point comme centre, avec un rayon égal à Cv, nous décrivons un arc de cercle qui coupe en m le petit axe prolongé, nous traçons la droite mb, et le segment bn est la longueur de la moitié du petit axe. On voit, en effet, que si la droite mn se meut de manière que ses extrémités m et n glissent sur les droites CM et CN, le point b décrira une ellipse dont les axes auront la position et la grandeur que nous avons indiquées (art. **152**).

300. Les demi-ellipses décrites sur les diamètres ab et AB sont les projections de deux demi-cercles situés dans un même plan, et concentriques. Il résulte de là qu'elles sont homothétiques et que leurs axes sont dirigés sur les deux mêmes droites CN et Cy. En menant par le point B la droite NM, parallèle à nm, on obtient les segments MB et NB, qui sont les demi-axes de l'ellipse AB.

Pour représenter les droites de division des voussoirs sur le plan de tête, nous rendons ce plan parallèle à celui de la figure en le faisant tourner autour de la droite CN. Les points A et B décrivent des arcs de cercle dont les centres sont sur la droite indéfinie CN, et qui se projettent sur des perpendiculaires à cette droite; le demi-cercle qui a son centre en C, et dont la perspective est AVB, vient se projeter en vraie grandeur suivant A_1VB_1. Nous le partageons en cinq parties égales; quand nous remettons le plan de tête en position, les points de division D_1, E_1, ... sont transportés en D, E, ... par des perpendiculaires à CN.

Les droites de division des voussoirs convergent vers le centre C.

301. Par les points a, b, A et B nous traçons des droites parallèles à Sz, et nous portons sur elles une longueur égale à la hauteur du cylindre de la niche mesurée à l'échelle Sz; cette hauteur est supposée de $1^m,45$. Nous partageons ensuite les droites ap et bq en 5 parties égales, et par les points de division nous traçons les lignes d'assise sur le plan de tête.

Tous les demi-cercles horizontaux ont des projections identiques; nous allons indiquer le tracé de celui dont les extrémités sont aux points p et q.

Le demi grand axe kg est parallèle à AB (*fig.* 161), et égal au demi grand axe Cv de l'ellipse que nous venons de tracer, parce que les cercles représentés ont des rayons égaux. Le demi petit axe kt peut être obtenu, soit par le même moyen que précédemment, soit en portant la longueur du rayon sur la droite $d'S'$ (*fig.* 161), et la projetant sur XY. Il faut, en effet, remarquer que le petit axe de l'ellipse est la projection du diamètre du cercle qui fait le plus grand angle aigu avec le plan de la figure.

Nous aurions pu déterminer de la même manière le petit axe de la demi-ellipse avb, en projetant le grand axe sous l'angle que fait la face xSz (*fig.* 161) avec le plan de la figure. Cet angle est le complément de $S'B'_1X$.

Pour diviser le demi-cercle pgq, nous rendons son plan parallèle au plan de projection, en le faisant tourner autour du diamètre kg. Le demi-cercle devient $p_1 g q_1$; son point milieu j se ramène en j_1 et fait trouver les droites de division $j_2 i_2$, $j_4 i_4$ sur les assises de rang pair. Nous avons indiqué les points l et f qui déterminent les droites de division sur les assises de rang impair. Le point l correspond au point l_1 sur l'ellipse de base, et donne les droites $l_1 r_1$, $l_3 r_3$, $l_5 r_5$. Les droites qui correspondent au point f sont sur une partie cachée du cylindre de la niche. Nous ne les avons pas tracées.

302. Il ne nous reste à tracer que les cercles de la sphère; nous ferons l'explication sur la *fig.* 163, mieux disposée pour cela. Elle représente la même niche que la *fig.* 162, et avec les mêmes échelles, mais les longueurs parallèles à Sy sont mesurées dans un sens opposé. Il faut supposer que le sommet S est au delà du plan de projection qui passe par les points A, B et C, au second point de rencontre de la verticale sS′ avec le cercle C′d'.

Nous avons tracé cette figure pour montrer comment, sans changer les échelles, on peut disposer une perspective axonométrique, suivant l'aspect sous lequel on veut montrer l'objet.

303. La courbe $a_1 b_1$ du trompillon et la courbe de tête ab sont homothétiques; leur centre de similitude se trouve sur la droite Cy, parallèle à Sy (*fig.* 161), parce qu'il est la projection du sommet du cône auquel les deux cercles appartiennent dans l'espace ([1]). Nous déterminons le point a_1 en relevant le point a'_1, placé dans la position convenable sur le cercle rabattu $p_1 q_1$. La droite aa_1 fait trouver le point O centre de similitude. Nous déterminons ensuite facilement les axes de l'ellipse $a_1 b_1$.

Nous obtenons les lignes de division des voussoirs en faisant tourner l'arc aa_1 autour de Cy. Pour voir où se place un point a_2 quand le point a arrive en e, nous traçons la droite a_2C$_2$, parallèle à aC, et la droite aa_2S; elles deviennent l'une la droite C$_2 e_2$, parallèle à Ce, l'autre la droite eS. Le point a_2 a été transporté à leur intersection e_2.

On peut encore remarquer que les droites ae et $a_2 e_2$, cordes des arcs décrits, sont parallèles dans l'espace, et par suite en projection.

Au point e, la tangente à l'ellipse $ee_2 e_1$ est parallèle à CO, parce qu'elle est perpendiculaire au plan de tête. Les droites Ce et Cj_6 sont donc deux demi-diamètres conjugués : on peut se servir de cette propriété pour tracer l'ellipse.

Un cercle décrit du point C comme centre, avec Cv pour rayon, serait le contour apparent de la sphère, si elle était en relief; cette courbe se raccorde tangentiellement en h' avec la verticale hh', qui serait le contour apparent du

([1]) Il existe deux cônes différents sur lesquels les deux cercles se trouvent : leurs sommets correspondent aux deux centres de similitude qui existent entre les ellipses.

cylindre. Les parties cachées des lignes d'assise touchent la droite *hh'* ou l'arc *h'v*.

304. Nous aurions pu employer des échelles pour construire les figures axonométriques 166 et 167; mais il aurait fallu mesurer d'abord, à l'échelle de la *Pl. L*, les longueurs relevées parallèlement aux directions principales sur les figures géométrales 164 et 165. Toute longueur portée sur une figure axonométrique aurait ainsi exigé l'emploi successif de deux échelles. Cette manière d'opérer ne peut pas donner une grande précision. En général, il est convenable de ne se servir des échelles que quand on construit une perspective d'après des données numériques.

Restitution des figures géométrales des objets représentés par une perspective axonométrique.

305. Une perspective axonométrique, étant une projection sur un plan, ne suffit pas pour définir complètement les objets; mais on peut souvent faire disparaître l'indétermination par les données que l'on a sur leur forme.

Si nous savons que les pièces de bois représentées sur les *fig.* 166 et 167 ont leurs faces rectangulaires, et qu'elles se rencontrent elles-mêmes à angle droit, les droites 1'2', 3'5' et 1'1'' nous donneront immédiatement la direction des axes principaux, et nous en conclurons leur obliquité sur le plan de projection (art. **82**). Faisant ensuite les constructions que nous avons expliquées, mais en ordre inverse, nous établirons les figures géométrales, et nous déterminerons leur échelle si nous connaissons l'une des échelles de la perspective.

Sur la *fig.* 172, rien n'indique la direction de l'axe S*y*; par conséquent, si cette direction n'est pas donnée, la restitution sera impossible.

Quant à la niche, comme on a tout lieu de la regarder comme formée d'un demi-cylindre et d'un quart de sphère, sa perspective axonométrique la détermine complètement.

Perspective monodimétrique.

306. La perspective axonométrique est *anisométrique* quand les trois axes ont des inclinaisons inégales sur le plan de projection. On la dit *monodimétrique* quand deux des axes ont des inclinaisons égales; le troisième fait alors en projection des angles égaux avec les deux autres, et deux des quatre échelles deviennent identiques. Ces circonstances apportent quelques simplifications.

Les axes également inclinés peuvent être l'un vertical et l'autre horizontal, ou tous les deux horizontaux. De là résultent deux dispositions différentes en apparence pour la perspective monodimétrique.

Les figures géométrales sont des perspectives monodimétriques, dans lesquelles les angles égaux a et b ou a et c sont nuls.

Perspective isométrique.

307. La perspective axonométrique devient *isométrique* quand les trois directions principales ont des inclinaisons égales sur le plan de projection. L'équation des cosinus donnée à l'article **294** devient alors

$$\cos c = \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad \text{d'où} \qquad \sin c = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Traçons un triangle rectangle isoscèle BAD (*fig.* 176), portons l'hypoténuse BD de A en C, et traçons CB : les trois côtés du triangle BCA sont proportionnels aux racines carrées des nombres 3, 2 et 1, et l'angle ACB est égal à l'angle que les trois axes font avec le plan de projection.

308. On appelle *droites isométriques* celles qui sont parallèles à l'un quelconque des axes, et *plans isométriques* ceux qui sont parallèles à deux axes.

Les longueurs des droites isométriques sont mesurées à une même échelle, que l'on appelle *échelle isométrique*. On la considère comme l'échelle du dessin; ainsi une perspective est dite *au centième* quand une longueur d'un mètre parallèle à l'un des trois axes est représentée par une droite d'un centimètre. Il faut concevoir qu'avant de projeter l'objet, on altère ses dimensions linéaires dans le rapport de $100 \cos c$ à 1, de manière que, la projection réduisant les droites isométriques dans le rapport de 1 à $\cos c$, elles se trouvent en définitive amenées au centième de leur grandeur.

D'après cela, une sphère de 1^{m} de rayon serait représentée, sur une perspective au centième, par un cercle dont le rayon aurait une longueur donnée par l'expression $\frac{1}{100}\sqrt{\frac{3}{2}}$. On mesurerait immédiatement ce rayon à l'échelle des vraies grandeurs dont nous donnons la construction à l'article suivant.

309. L'égalité des angles a, b, c (*fig.* 175) entraîne celle des longueurs SA, SB, SC, et par suite celle des angles $y\mathrm{S}z$, $z\mathrm{S}x$, $x\mathrm{S}y$: ces derniers angles sont donc de 120° (*fig.* 178).

Considérons une ellipse $adbc$ projection d'un cercle situé dans un plan isométrique parallèle à $\mathrm{S}x$ et $\mathrm{S}z$. Les axes cd et ab doivent être, l'un parallèle, l'autre perpendiculaire à la troisième direction isométrique $\mathrm{S}y$ (art. **299**). Il y a deux diamètres isométriques pq et mn respectivement parallèles à $\mathrm{S}x$ et à $\mathrm{S}z$; ils sont nécessairement égaux et de plus conjugués comme projections de deux diamètres rectangulaires du cercle.

Nous aurons, en appelant R le rayon du cercle,

$$ab = 2R, \qquad pq = mn = 2R\cos c, \qquad cd = 2R\sin c.$$

D'après les valeurs de $\cos c$ et de $\sin c$, nous voyons que le grand axe, les diamètres isométriques et le petit axe sont proportionnels aux racines carrées des nombres 3, 2 et 1. Cette relation permet de déterminer facilement la grandeur que l'on doit donner aux axes d'une *ellipse isométrique :* c'est ainsi qu'on appelle une ellipse projection d'un cercle situé dans un plan isométrique.

Traçons deux droites CF et CG (*fig.* 177) respectivement parallèles à CA et BC (*fig.* 176), et établissons l'échelle isométrique sur CF : si le rayon du cercle que nous mettons en perspective a une grandeur de $1^m,50$, nous mesurons cette longueur sur l'échelle CF de C en M, et élevant la perpendiculaire MN, les droites CN et NM seront les moitiés du grand axe et du petit axe de l'ellipse.

On voit par les expressions qui précèdent, ou par la considération du triangle CMN, que la distance ff' des foyers (*fig.* 178) est égale aux diamètres isométriques mn et pq.

En marquant sur la droite CG (*fig.* 177) des points de division qui se projettent exactement sur ceux de CF, nous aurons une échelle sur laquelle on pourra mesurer directement la longueur du grand axe de l'ellipse. Cette échelle est celle des vraies grandeurs, c'est-à-dire des droites parallèles au plan de projection.

310. Les ellipses isométriques sont semblables entre elles, et par suite on peut construire un rapporteur qui permette de les diviser en arcs égaux, ce qui est utile dans diverses circonstances, principalement pour dessiner des roues dentées et des colonnes cannelées.

On commence par tracer sous un angle de 120 degrés les demi-diamètres isométriques (*fig.* 179), on leur donne une longueur arbitraire qui, sur notre figure, est de 3 centimètres, et, portant cette longueur sur la droite CF (*fig.* 177), on obtient le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse dont une moitié doit former le rapporteur. On décrit sur le grand axe un demi-cercle, on le divise en parties égales, et, supposant qu'il soit relevé en tournant autour de son diamètre jusqu'à ce qu'il se projette sur la demi-ellipse, on ramène les points de division sur cette courbe.

On peut aussi diviser le rapporteur à l'aide d'un quart de cercle décrit sur le demi petit axe comme rayon : cette méthode donne plus d'exactitude pour les divisions extrêmes.

Lorsqu'on emploie le rapporteur, il faut que le petit axe de l'ellipse soit parallèle à la projection de celui des axes coordonnés qui est perpendiculaire au plan isométrique dans lequel se trouve le cercle que l'on considère. Le rapporteur,

dans la position qu'il occupe sur la *Pl. LI*, serait bien placé pour un cercle horizontal.

Si nous portons sur le grand axe des divisions égales à celles de la droite CG (*fig.* 177), en faisant passer des ellipses homothétiques et concentriques par les points déterminés, nous diviserons les droites qui divergent du centre en parties perspectives égales; chacune de ces droites sera une échelle pour les droites qui, dans l'espace, sont parallèles au rayon correspondant du cercle; on pourra ainsi mesurer directement sur la perspective la longueur de toute droite située dans un plan isométrique.

Le rapporteur qui est dessiné sur la *Pl. LI* serait un peu petit. En donnant à chaque demi-diamètre isométrique une longueur de 5 centimètres, on a un instrument d'une grandeur convenable, et sur lequel on peut facilement indiquer les divisions en demi-degrés.

CHAPITRE II.

PERSPECTIVE CAVALIÈRE.

Notions générales. — Assemblage.

311. La *perspective cavalière* est une projection oblique faite sur un plan vertical et parallèle à l'une des deux directions principales horizontales (art. **290**).

Nous avons déjà eu l'occasion de parler des projections obliques [1]. Dans ce mode de représentation, les projetantes sont parallèles à une direction fixe qui rencontre sous une inclinaison quelconque le plan de la figure.

On appelle *ligne fuyante* la projection d'une droite perpendiculaire à ce plan, et *rapport de réduction* le rapport des longueurs d'une ligne fuyante et de la perpendiculaire qui lui correspond.

Soient T le plan de la figure, ou *tableau*, et D la droite à laquelle les projetantes doivent être parallèles (*fig.* 182 *a*); d'un point M nous menons deux droites, l'une Mn perpendiculaire à T, l'autre Mm parallèle à D : nm est une ligne fuyante, et le rapport $\frac{nm}{nM}$, cotangente de l'angle que la droite D fait avec le plan P, est le rapport de réduction. On indique quelquefois la direction des lignes fuyantes par une flèche F.

---

(1) *Voir* les articles 116, 161 et 254.

Le rapport de réduction est toujours une fraction simple. On le prend souvent égal à $\frac{1}{3}$ ou à $\frac{1}{4}$.

Dans la projection oblique, comme dans la projection orthogonale, toute ligne de front, c'est-à-dire située dans un plan parallèle à celui de la figure, est superposable à sa projection.

Nous avons établi à l'article **116** que la projection d'une tangente à une courbe est tangente à la projection de la courbe, même dans le cas où les projetantes sont obliques sur le plan de la figure.

311 *a*. Proposons-nous de représenter un cube ayant quatre arêtes verticales.

Nous prenons pour plan de la figure celui de la face antérieure ABCD (*fig.* 181 *a* ou 181 *b*). Nous dirigeons les lignes fuyantes vers la droite (*fig.* 181 *a*) ou vers la gauche (*fig.* 181 *b*), suivant que nous voulons montrer l'une ou l'autre des deux faces latérales. Pour faire voir la face inférieure, on dirigerait les lignes fuyantes vers le bas de la figure.

Le rapport de réduction est fixé à $\frac{1}{3}$.

Nous traçons les droites A*a*, B*b*, ... parallèles à la droite F et dans le sens indiqué par la flèche. Nous prenons ensuite les longueurs A*a*, B*b*, ... égales au tiers du côté AB du cube. La face postérieure est *abcd*.

Si l'on veut connaître l'angle sous lequel les projetantes rencontrent le plan de la figure, on tracera B*b'* perpendiculaire à B*b* et égal à la longueur de cette droite dans l'espace, c'est-à-dire à trois fois B*b*; l'angle cherché est *b'b*B.

312. Nous allons nous proposer de mettre en perspective cavalière la pièce de bois A, représentée sur les figures géométrales 164 et 165. Nous prenons le plan vertical 1.7 (*fig.* 164) pour plan de projection; nous plaçons (*fig.* 168) les lignes qui sont sur ce plan telles qu'elles se trouvent sur l'élévation (*fig.* 165), puis par le point 1' nous traçons une droite 1'.2' dans une direction arbitraire qui sera celle des lignes fuyantes, et, supposant que le rapport de réduction soit égal à $\frac{1}{2}$, nous donnons à cette droite une longueur 1'.2' égale à la moitié de la droite 1.2 (*fig.* 164), et nous la considérons comme la projection de la droite (1.2, 1') (*fig.* 164 et 165). Toute autre droite perpendiculaire au plan de la figure sera projetée sur une parallèle à 1'.2' (*fig.* 168), et réduite à la moitié de la grandeur qu'elle a dans l'espace. Nous pourrons donc tracer la droite 1''.2'' projection de (1.2, 1''), et achever facilement la perspective.

La direction des lignes fuyantes doit être choisie de manière que l'objet se présente sous l'aspect où il est le plus important de le voir. Quand des pièces sont connexes comme celles des *fig.* 168 et 169, on dirige quelquefois les lignes fuyantes de côtés différents de la verticale, mais sous des angles égaux et avec le même rapport de réduction; on peut alors placer sur des horizontales les points correspondants des deux figures, de manière à établir entre elles un certain accord.

313. Pour mettre en perspective cavalière la pièce représentée sur les figures géométrales 170 et 171, nous plaçons d'abord (*fig.* 173) celles des lignes de la *fig.* 170 qui sont dans le plan de front *mn* (*fig.* 171); puis, ayant choisi pour les lignes fuyantes une direction arbitraire $5'.5''$, nous traçons les projections de toutes les droites perpendiculaires au plan de la figure, et nous portons les longueurs relevées sur la *fig.* 171, en les réduisant à moitié.

Nous avons disposé la perspective cavalière de la *fig.* 173 de manière à montrer la pièce sous un aspect différent de celui qu'elle a sur la perspective axonométrique de la *fig.* 172. On peut remarquer que ces dessins font beaucoup mieux comprendre les formes que les *fig.* 170 et 171, et cependant nous n'avons pas voulu représenter un assemblage compliqué, et qui eût exigé des explications spéciales. Il y en a, tels que les entures à enfourchement, qui sont presque inintelligibles quand on les représente seulement par des figures géométrales.

Cylindre vertical. (*Planche LII, figure* 180.)

314. Nous allons nous proposer de construire la perspective d'un cercle horizontale dont on connaît le diamètre de front AB, et de représenter un cylindre vertical dont ce cercle serait la base.

Nous traçons en vraie grandeur le cercle qu'on veut projeter en le supposant ramené de front par une rotation autour de AB, nous choisissons une direction horizontale MN pour les lignes fuyantes, et nous prenons un rapport de réduction qui sera, comme précédemment, celui de 1 à 2.

Si l'on suppose que le plan du cercle soit remis dans sa position, la droite AB sera son intersection avec le plan de la figure, et par suite tous ses points seront leurs propres projections. Le rayon CG perpendiculaire à CA se projettera sur une ligne fuyante CM égale à sa moitié. On trouve de la même manière la projection d'une ordonnée quelconque *cg* parallèle à CG. Pour déterminer la longueur *cm* on peut tracer la droite *gm* parallèle à GM.

Cette construction fait facilement trouver la projection *m* d'un point quelconque *g* du cercle, et même la projection *u* d'un point *t* du plan du cercle supposé remis dans sa position.

La courbe M*m*B ... est une ellipse. Les diamètres AB et GC du cercle étant rectangulaires, leurs projections AB et MN sont des diamètres conjugués de l'ellipse. Ses tangentes verticales forment le contour apparent du cylindre. On détermine les points K et K_1 où elles coupent la droite AB, en menant au cercle les tangentes IK et I_1K_1 parallèles à QG. On voit, en effet, que la droite QG a pour projection QM, et que, par suite, la droite IK tangente au cercle et parallèle à QG doit se projeter sur une droite tangente à l'ellipse et parallèle à QM.

Dans la première partie de la construction que nous venons d'indiquer, on retrouve la méthode que nous avons exposée à l'article **154** pour tracer une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués.

Sphère. (*Planche LII, figure* 181.)

315. Une sphère a pour perspective cavalière une ellipse intersection par le plan de la figure d'un cylindre circonscrit parallèle aux projetantes.

Soient AQBP la perspective du grand cercle de front de la sphère, et MN une droite passant par le centre O et donnant la direction des lignes fuyantes. Le rapport de réduction est égal à $\frac{1}{2}$.

Nous supposons que la sphère a glissé dans le cylindre circonscrit, de manière que son centre se trouve en O. Nous la coupons alors par un plan perpendiculaire au tableau et parallèle aux projetantes : sa trace EG est une ligne fuyante. L'intersection de ce plan avec la sphère est un cercle qui a EG pour diamètre : nous pouvons le tracer sur la figure, en le rabattant autour de cette droite.

La direction des projetantes dans un rabattement autour de MN est donnée par l'hypoténuse AF du triangle rectangle AOF, dans lequel le côté OF est la moitié du rayon OA. Les projetantes ont la même direction, dans le rabattement autour de FG. Les deux tangentes I*s* et J*t* parallèles à AF sont deux génératrices du cylindre circonscrit. Leurs rencontres *s* et *t* avec EG donnent deux points de la perspective cherchée.

En opérant sur la droite MON, on trouve les points M et N. La symétrie de la figure montre que les droites rectangulaires MN et AB sont les deux axes de l'ellipse.

316. Les principes de la Géométrie descriptive conduisent à un moyen facile de construire l'ellipse par points sans tracer des cercles tels que IJ.

Nous prenons un second plan de projection perpendiculaire au premier, et ayant pour trace la droite MN. Le cercle AQBP peut être regardé comme la trace de la sphère sur chacun des deux plans coordonnés.

Le cercle de contour apparent de la sphère est projeté sur le second plan, suivant le diamètre PQ perpendiculaire à AF. Il faut chercher la trace, sur le premier plan, d'un cylindre qui aurait ce cercle pour directrice, et dont les génératrices seraient parallèles à AF.

Un point quelconque R de PQ est la projection, sur le second plan, de deux points de la directrice du cylindre circonscrit. Ils sont sur le petit cercle qui a pour projection la droite SS_1, et, par conséquent, leur distance au point R et au second plan est égale à RS_1. On pourrait établir leurs projections sur le premier plan, et chercher ensuite les traces des génératrices correspondantes du cylindre; mais il est plus simple de remarquer que la perspective du point R est

sur la ligne de terre en r, et que, par suite, celles des points considérés doivent être sur une perpendiculaire srs_1, à une distance de r égale à RS_1. On obtient ainsi les points s et s_1.

La verticale du centre O perce la sphère en un point V du cercle de front CVD. Ce serait le point de contact de la sphère avec un plan horizontal qui la porterait. On voit comment on aurait dû traiter la question, si ce point avait été une des données du problème.

316 *a*. En supposant le triangle OFA relevé, on voit que le point F est la perspective de l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire au tableau. Le point F est donc sur l'ellipse qui est la perspective du grand cercle horizontal de la sphère.

Les deux plans de front qui passent respectivement par les points F et F′ de l'espace y touchent la sphère. Les courbes d'intersection de ces plans avec le cylindre circonscrit ont pour perspective l'ellipse MN et lui sont identiques; les points F et F′ coïncident donc avec les foyers de cette conique (art. **252**, 6°).

On arrive directement à ce résultat, en remarquant que les triangles AOF et OQN sont égaux, d'où il résulte que AF est égal à la moitié ON du grand axe de l'ellipse.

Le contour apparent MANB est doublement tangent aux perspectives de tous les cercles tracés sur la sphère, et notamment aux perspectives des différents cercles de front. Ces cercles ont pour diamètres les cordes (telles que HK) qui, dans l'ellipse CFDF′, sont parallèles au diamètre CD. On en conclut que *les circonférences qui ont pour diamètres les cordes parallèles d'une ellipse* CFDF′ *sont doublement tangentes à une même ellipse* MANB, *dont les foyers* F *et* F′ *sont aux extrémités du diamètre conjugué avec les cordes considérées.*

Si l'on conçoit tous les cercles doublement tangents à l'ellipse donnée MANB, *et ayant leurs centres sur son grand axe* MN, *et dans chacun d'eux un diamètre parallèle à une direction fixe* CD, *le lieu des extrémités* H *et* K *de ce diamètre sera une ellipse* CFDF′, *doublement tangente à l'ellipse donnée* MANB *et passant par les foyers* F *et* F′.

Dans le cas où les cercles doublement tangents auraient leurs centres sur le petit axe de l'ellipse, on trouverait que le lieu des points H et K est une hyperbole.

Chaque cercle a deux de ses rayons normaux à l'ellipse MAN; on peut considérer les points H et K comme les extrémités de ces rayons, ramenés par une rotation autour du centre u, dans une direction fixe CD. Si la droite CD est perpendiculaire au grand axe de l'ellipse, on a le lieu des extrémités des normales redressées par une rotation autour du point où elles rencontrent cet axe. Les foyers de la première ellipse sont deux des sommets de la seconde [1].

---

[1] Les théorèmes établis à l'article 316 *a* peuvent servir à démontrer facilement plusieurs proposi-

Niche sphérique. (*Planche LII, fig.* 182.)

317. Nous traçons les lignes situées sur le plan de tête que nous prenons pour tableau; nous obtenons l'ellipse perspective du cercle de base par la méthode que nous avons expliquée à l'article **314**, puis nous plaçons sur le cercle rabattu, aux positions convenables, les points f, j et l, qui, projetés obliquement sur l'ellipse, donnent les points f_1, j_1, l_1 situés sur les lignes de joint verticales.

Les lignes d'assise sur la partie cylindrique sont des demi-ellipses égales à pj_1q.

La courbe a_1b_1 du trompillon est un demi-cercle de front. Pour établir sa perspective, nous plaçons sur le demi-cercle rabattu pjq le point α à la position que doit avoir l'extrémité de la courbe; nous déterminons sa projection α_1 et nous la relevons en a_1 : le diamètre du demi-cercle est la droite a_1b_1 parallèle à ab; son centre est sur la droite fuyante Cy.

Pour avoir les lignes d'assise de la voûte sphérique, nous faisons tourner l'arc aa_1 autour de l'axe Cy; un point quelconque a_2 décrit un cercle dont le centre C_2 est à l'intersection de l'axe Cy avec l'horizontale de front menée par a_2; comme, d'ailleurs, les droites aC et a_2C_2 sont toujours parallèles dans le mouvement, nous pouvons déterminer les positions d_2, e_2, ... que prend le point a_2 quand le point a arrive aux points d, e, ...

Les tangentes aux points a_2, d_2, e_2, ... se coupent en un point de la droite Cy; aux points a, d, e, ... les tangentes sont parallèles à cette droite, car dans l'espace elles sont perpendiculaires aux plans de front. Il résulte de là que, dans les différentes ellipses, le diamètre Cj_6 est conjugué des diamètres Ca, Cd, ...

318. La construction que nous avons donnée à l'article **314**, pour tracer la perspective d'un cercle, n'est pas spéciale au cas où le plan de cette courbe est horizontal : on peut l'employer toutes les fois que le diamètre de front est connu, et, par conséquent, pour les cercles auxquels appartiennent les lignes d'assise de la partie sphérique, car leurs diamètres de front sont situés sur le plan de tête et immédiatement donnés. La méthode que nous venons d'employer est plus simple, parce qu'elle permet de déterminer simultanément des points a_2, d_2, e_2, ... sur les différents arcs, mais elle exige que l'on ait d'abord construit la perspective aa_1b_1b de l'un des cercles.

La ligne d'assise ee_2e_1 touche en ε l'ellipse qui formerait le contour apparent

---

tions relatives aux surfaces d'égale pente (2e Partie, art. 548-550). Nous avons suivi dans cette addition les feuilles du Cours professé à l'École Polytechnique par M. Mannheim.

de la sphère si elle était en relief. Nous avons vu à l'article **515** comment on peut déterminer cette courbe.

Observations générales sur les perspectives rapides.

519. Les perspectives rapides sont fort utiles dans le dessin industriel; on les rencontre souvent dans les ouvrages consacrés à la Mécanique et à l'Architecture; il faut se familiariser avec elles, et savoir qu'elles ne donnent pas de simples images, mais des figures géométriques d'où l'on peut très souvent restituer le plan et l'élévation des objets.

La perspective anisométrique présente cet avantage, que l'on peut choisir la direction des axes, de manière à montrer l'objet sous l'aspect que l'on veut. La perspective isométrique est d'un usage plus facile. Dans ces modes de dessin, le plan de projection n'est pas vertical, et comme involontairement on se le figure tel, il en résulte que l'on a quelque peine à bien voir les corps représentés tels qu'ils sont dans l'espace. La perspective cavalière est préférable sous ce rapport. Si l'on conservait aux lignes fuyantes leur grandeur, les droites dirigées dans les trois directions principales pourraient être mesurées à la même échelle, comme dans la perspective isométrique, mais une certaine réduction augmente l'effet pittoresque sans nuire beaucoup à la facilité des opérations.

Quand on dessine des cristaux ou d'autres corps qui n'ont pas de position déterminée dans l'espace, et que l'on étudie pour leurs formes géométriques, il convient de choisir une projection orthogonale, et la perspective monodimétrique doit quelquefois être préférée, parce qu'on peut la disposer de manière à éviter des superpositions et des coïncidences qui se produisent dans la perspective isométrique, lorsque les corps présentent une certaine symétrie.

La perspective cavalière est très convenable pour les figures qui servent à l'explication des théorèmes de la Géométrie de l'espace. Les *fig.* 5, 6, 7, 11 et toutes les autres du même genre, ainsi que les figures des *Pl. LIII, LIV*, et les figures *h* et *g* de la *Pl. LV*, sont des perspectives cavalières. Nous les avions d'abord établies, en réduisant les lignes fuyantes dans le rapport uniforme de 2 à 1, mais certains angles droits devenaient très obtus, ce qui pouvait embarrasser des lecteurs non encore habitués à ce genre de représentation. En conséquence, nous avons adopté dans chaque cas un rapport de réduction tel que la figure prît un aspect qui nous parût satisfaisant.

Dans les perspectives rapides, les parallèles sont représentées par des parallèles, et la projection d'une figure a la même grandeur quel que soit son éloignement. On ne trouve donc pas dans ces modes de dessin la dégradation qui, dans la perspective régulière, fait apprécier la position relative des objets. Il en

résulte quelquefois une incertitude que l'on fait disparaître par l'examen des parties vues et des parties cachées. Ainsi, si l'on ne remarquait pas la ponctuation des *fig.* 162 et 163, on pourrait croire qu'elles représentent un cylindre en relief surmonté d'un quart de sphère également en relief; mais il suffit d'un moment d'attention pour reconnaître que, dans ce cas, les droites gg' (*fig.* 162) et hh' (*fig.* 163) seraient en trait plein. Quand une vue est ombrée, il ne peut y avoir de doute.

Nous traiterons dans le Livre V la question de la détermination des ombres sur les perspectives rapides. Nous verrons alors que l'on peut, dans ces modes de représentation, résoudre beaucoup de problèmes graphiques.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

17055 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

OUVRAGES DE L'AUTEUR.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. In-4°, publié en *trois Parties* avec Atlas; 1891-1880-1885 .... 30 fr.

Chaque Partie se vend séparément .... 10 fr.

La Ire Partie (3e édition) renferme tout ce qui est exigé pour l'*admission à l'École Polytechnique*. Cette 3e édition contient la *Théorie de l'intersection de deux polyèdres*, par M. Ernest Lebon.

La IIe Partie (2e édition) et la IIIe Partie (2e édition) sont le développement du *Cours de Géométrie descriptive* professé à l'*École Polytechnique*.

TRAITÉ DE PERSPECTIVE LINÉAIRE, contenant les Tracés pour les Bas-Reliefs et les Décorations théâtrales, avec une Théorie des effets de perspective. 2e édition, entièrement revue. In-4°, avec Atlas in-folio de 40 planches, dont 8 doubles; 1884 .... 25 fr.

RECHERCHES sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques. In-8°; 1867 .... 6 fr.

MÉMOIRE sur l'appareil de l'arche biaise, suivi d'une analyse des principaux Ouvrages publiés sur cette question, et d'une réponse à des critiques sur l'enseignement de la Stéréotomie à l'École Polytechnique. (Extrait des *Annales du Conservatoire des Arts et Métiers*.) .... 2 fr.

ÉTUDES ÉCONOMIQUES sur l'exploitation des chemins de fer. Grand in-8°; 1880 .... 4 fr. 50

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

PAR JULES DE LA GOURNERIE,

MEMBRE DE L'INSTITUT, OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR,
INSPECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES EN RETRAITE, PROFESSEUR HONORAIRE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ANCIEN EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ET PROFESSEUR DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Les Mathématiques ont des inventions très subtiles, et qui peuvent beaucoup servir tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et diminuer le travail des hommes.

DESCARTES (*Discours de la Méthode*).

TROISIÈME ÉDITION

REVUE ET AUGMENTÉE DE LA THÉORIE DE L'INTERSECTION DE DEUX POLYÈDRES,

PAR M. ERNEST LEBON.

PREMIÈRE PARTIE. — ATLAS DE 55 PLANCHES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

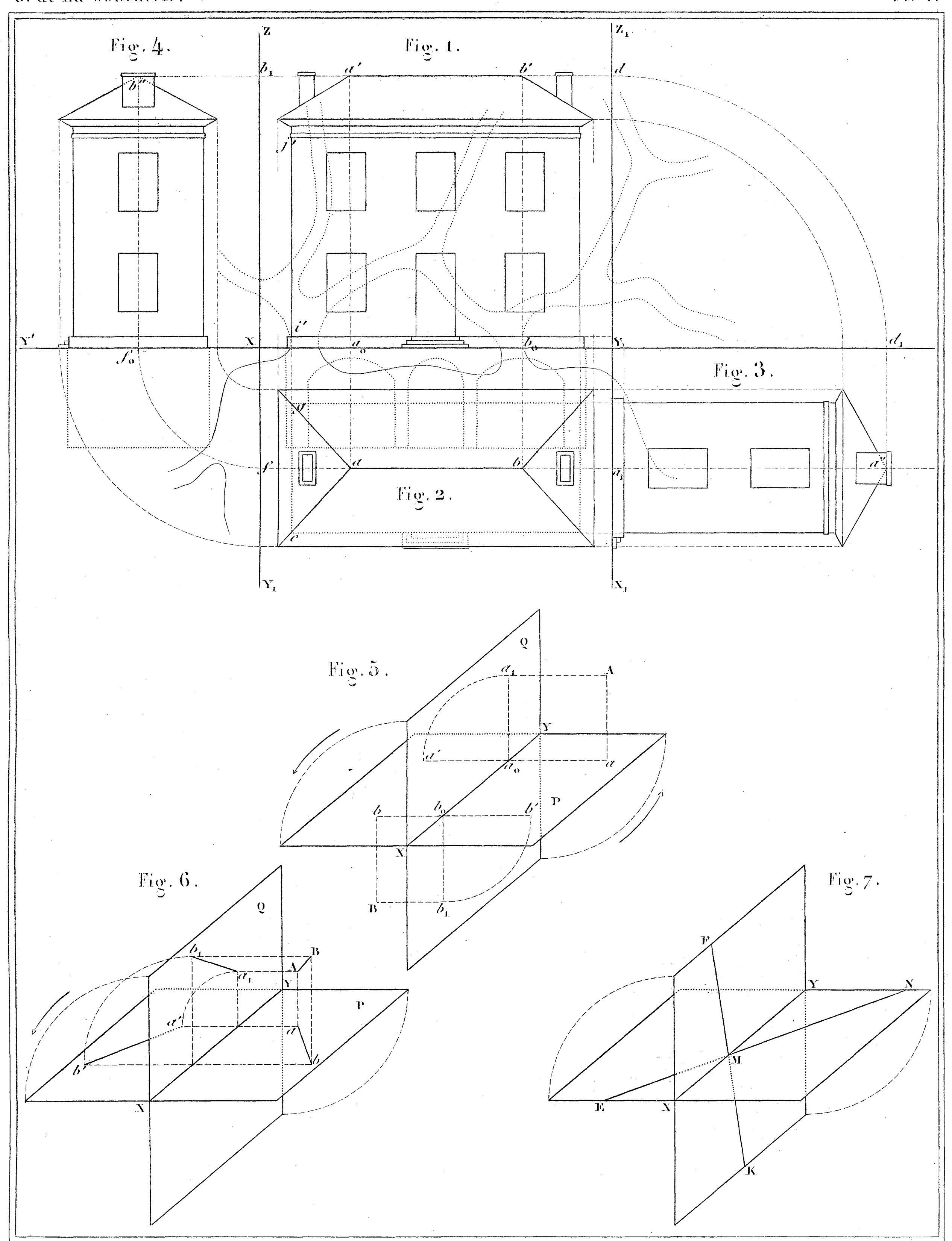
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

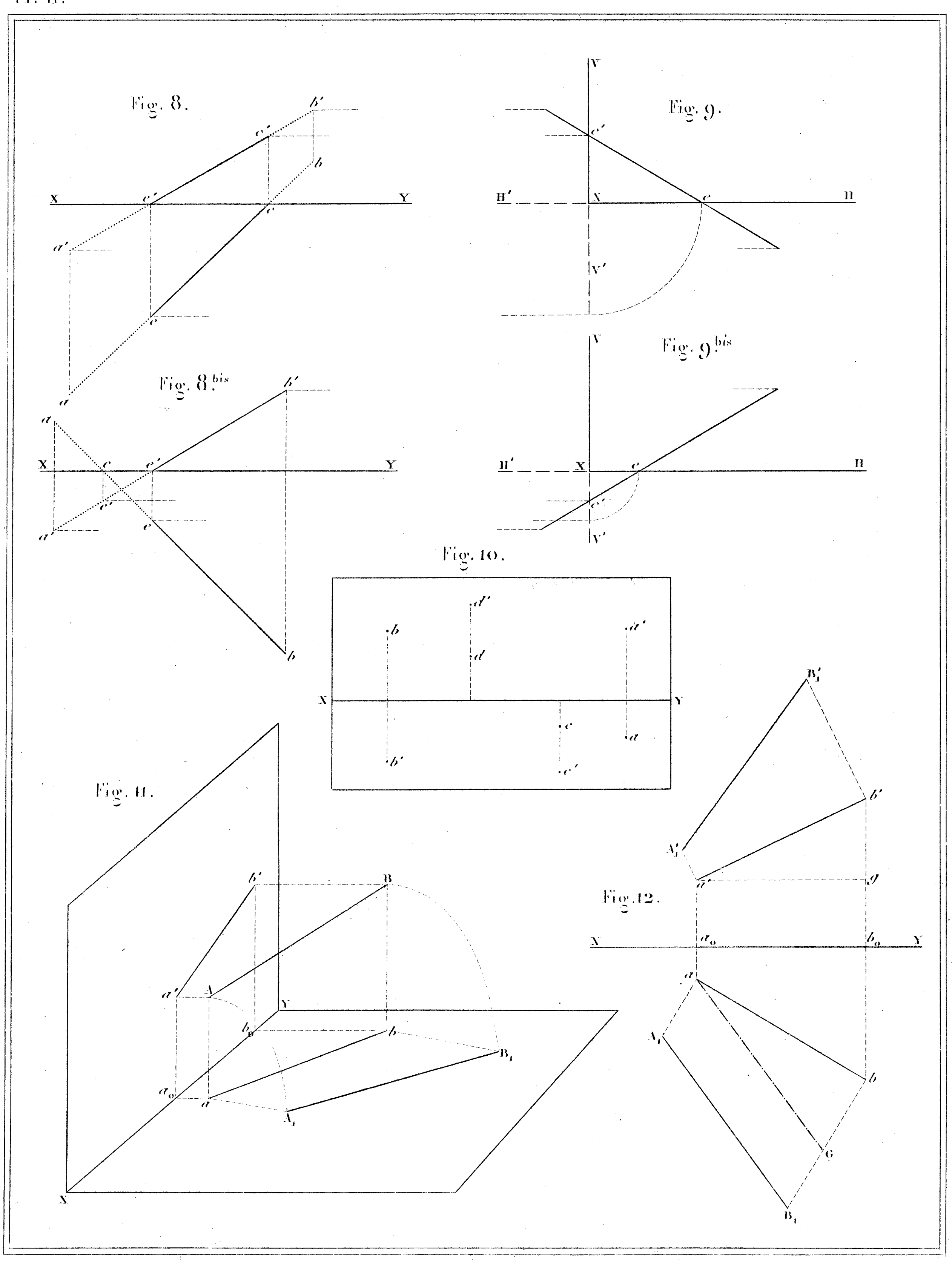
TABLE DES FIGURES.

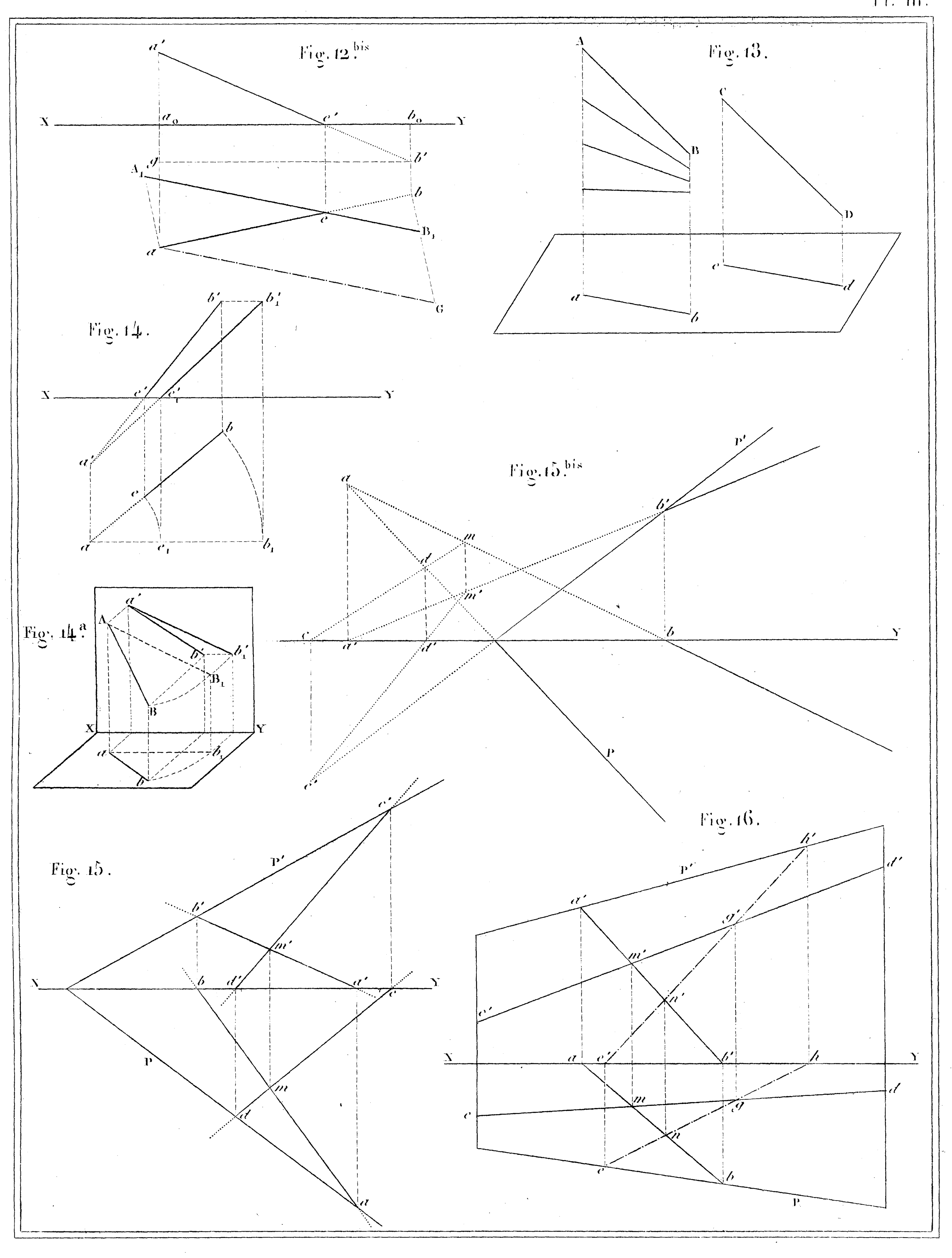
Les 8 figures relatives à l'intersection de deux polyèdres entre eux sont intercalées dans le texte, de la page 35 à la page 46.



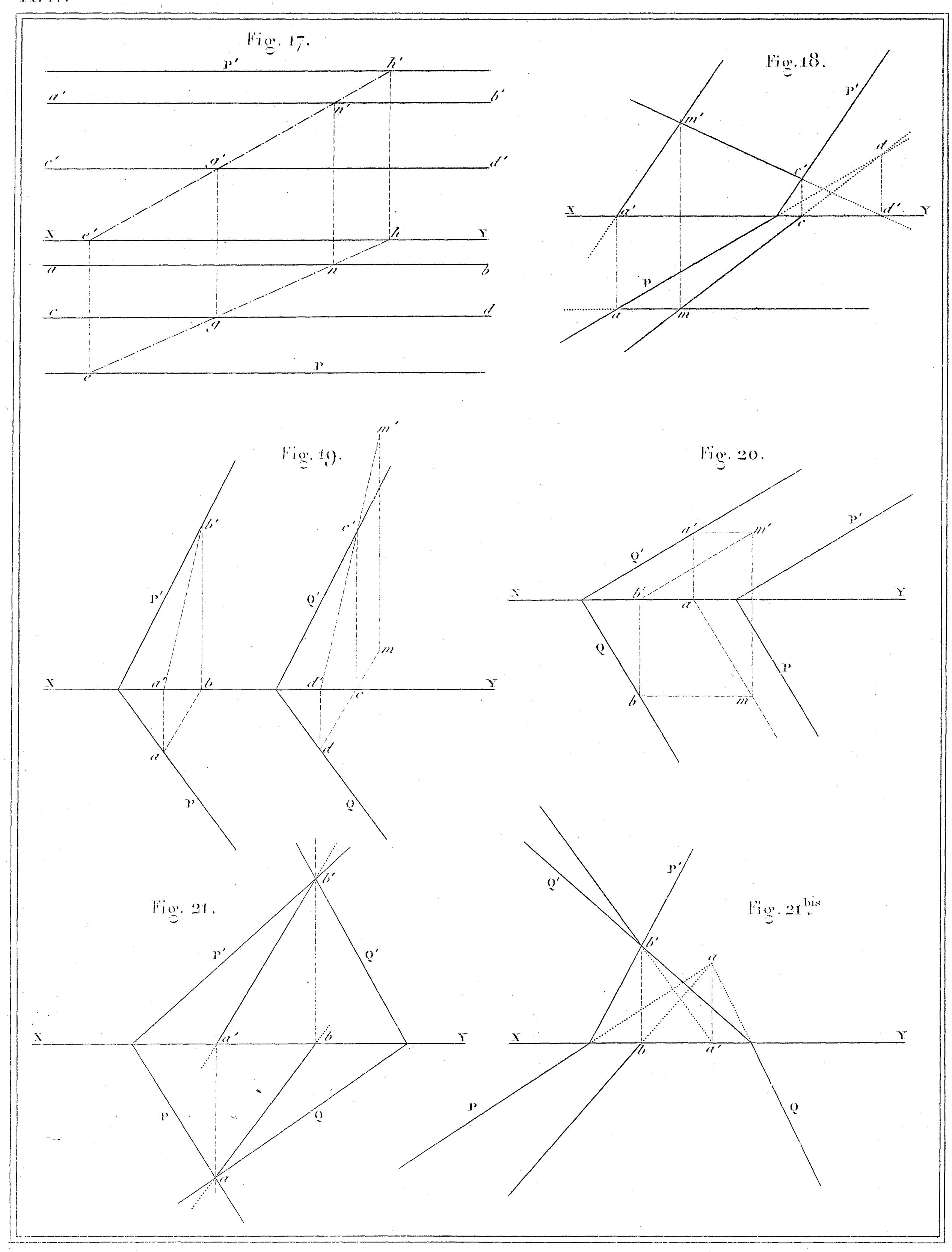
J. de La Gournerie del. Mallet-Bachelier, Libraire. Dulos sc.

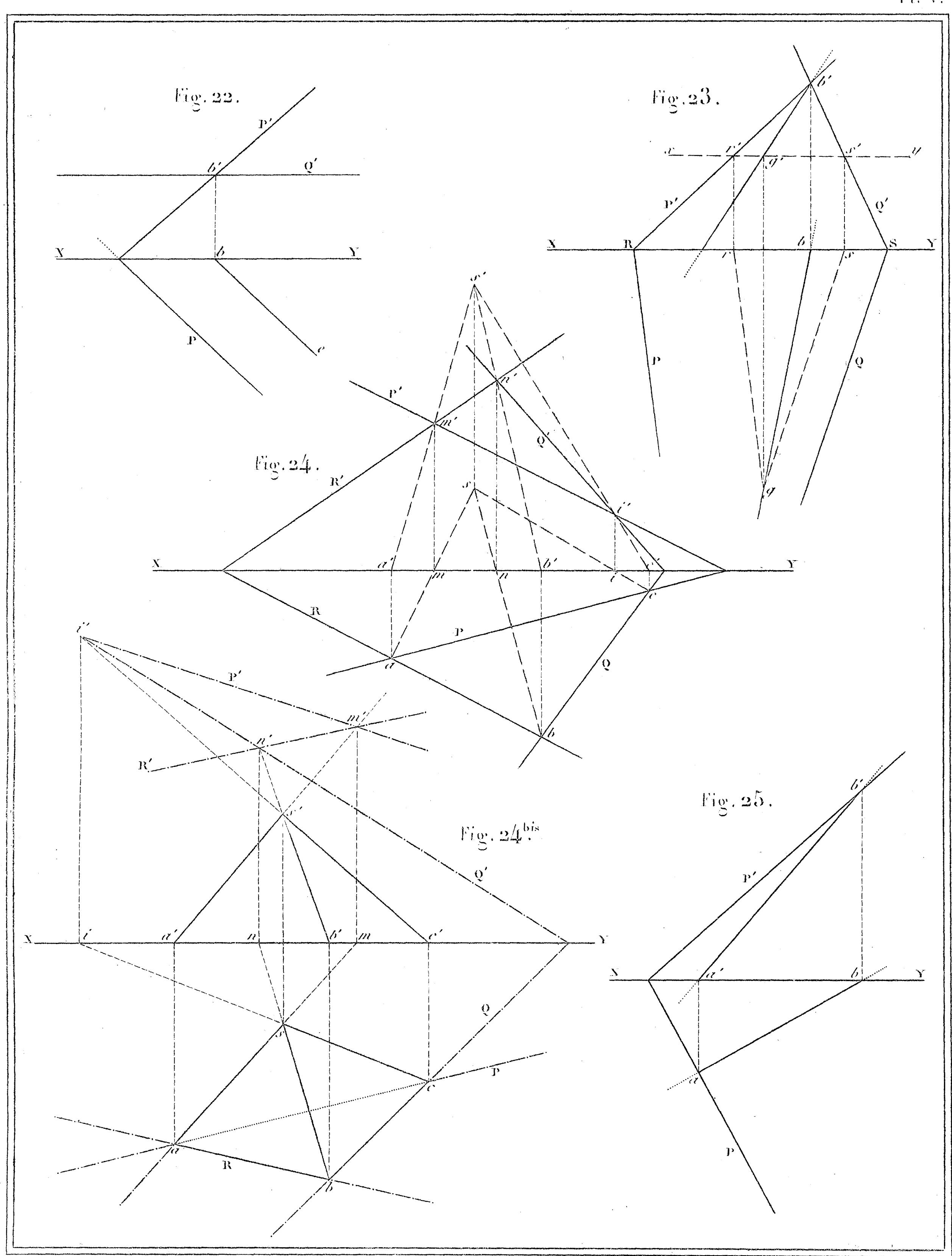
Pl. II.

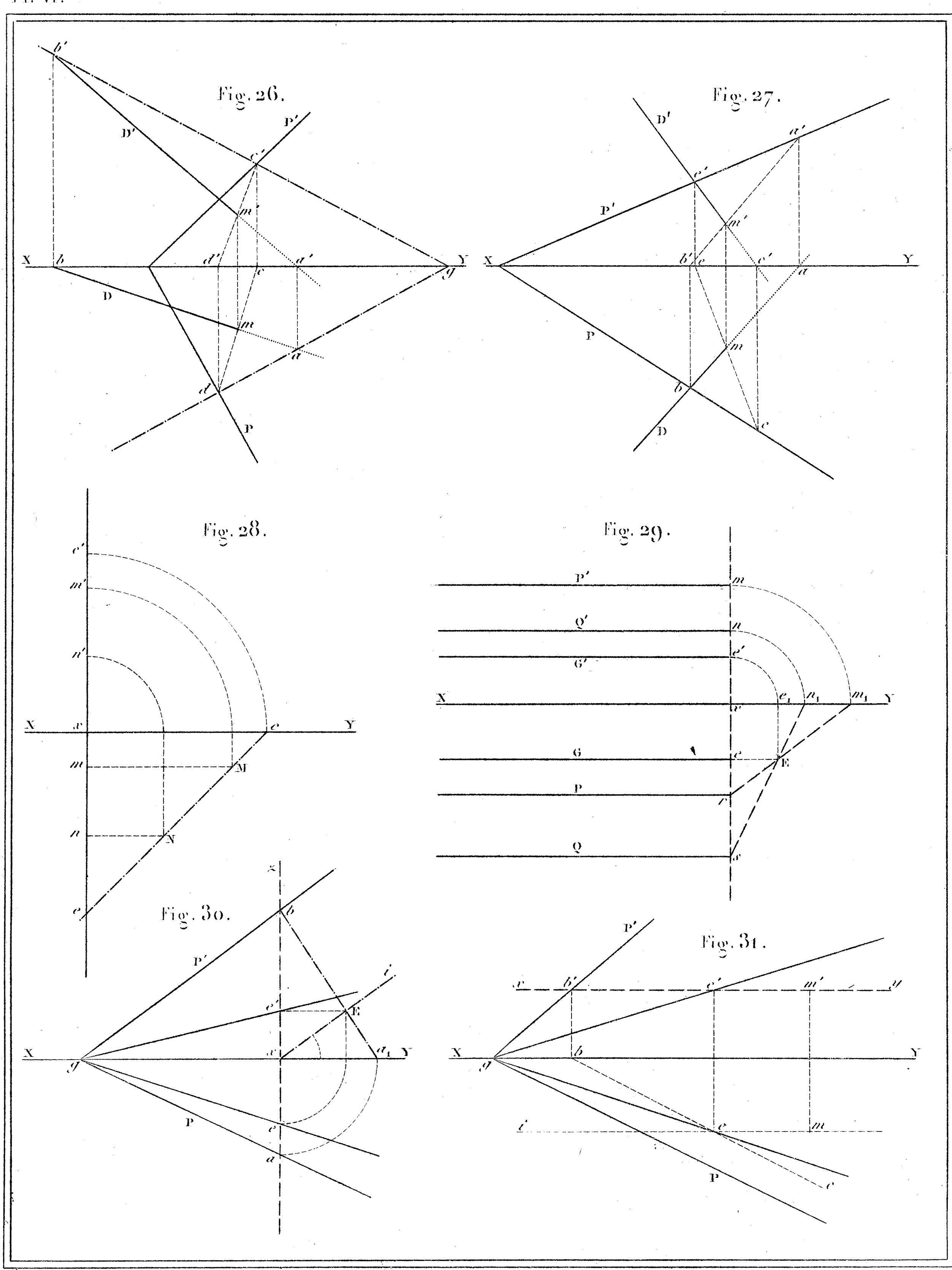


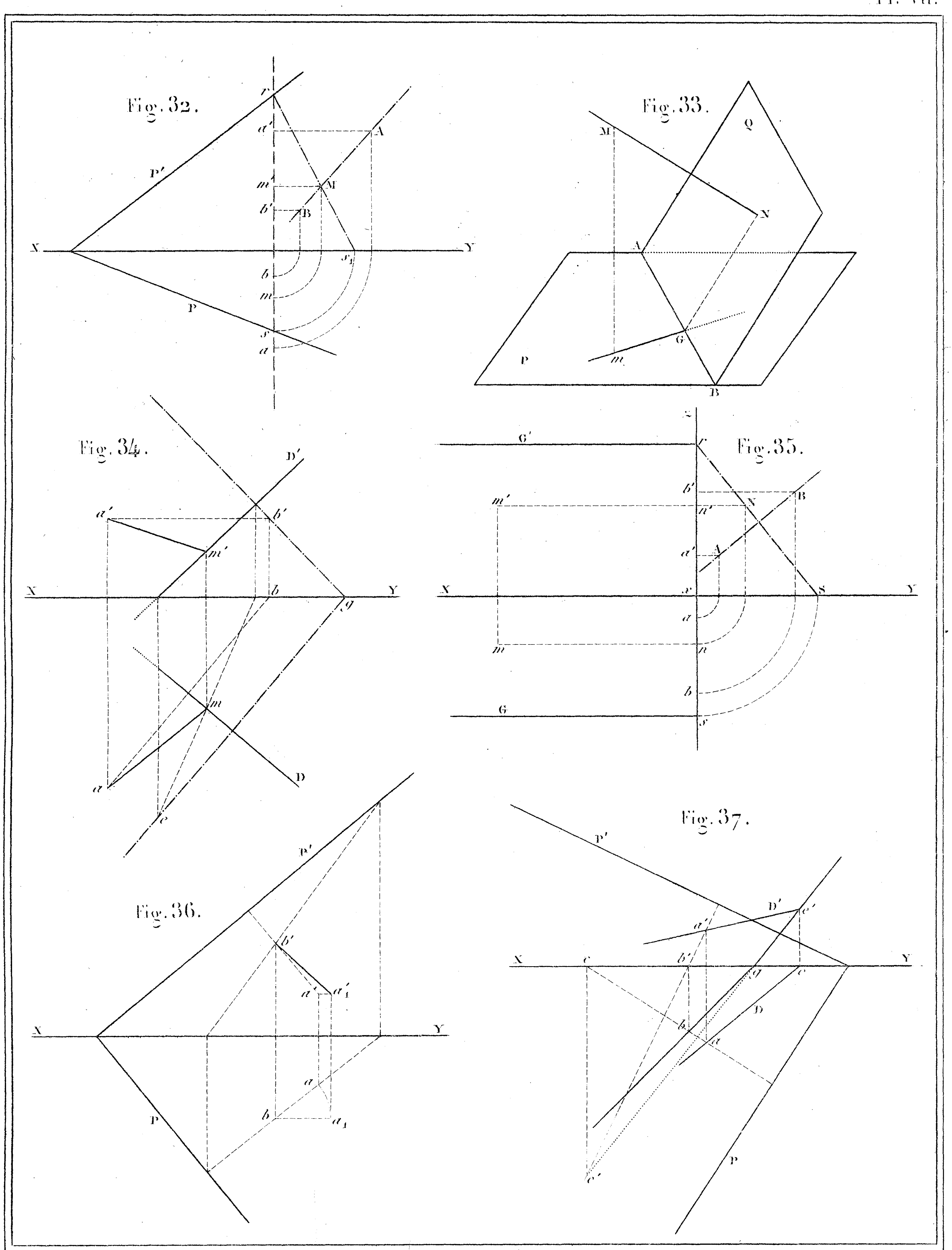

Fig. 12. bis
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 14. a
Fig. 15. bis
Fig. 15.
Fig. 16.
X
Y
P
P′

Pl. IV.




Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 24.bis
Fig. 25.


Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.


Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.

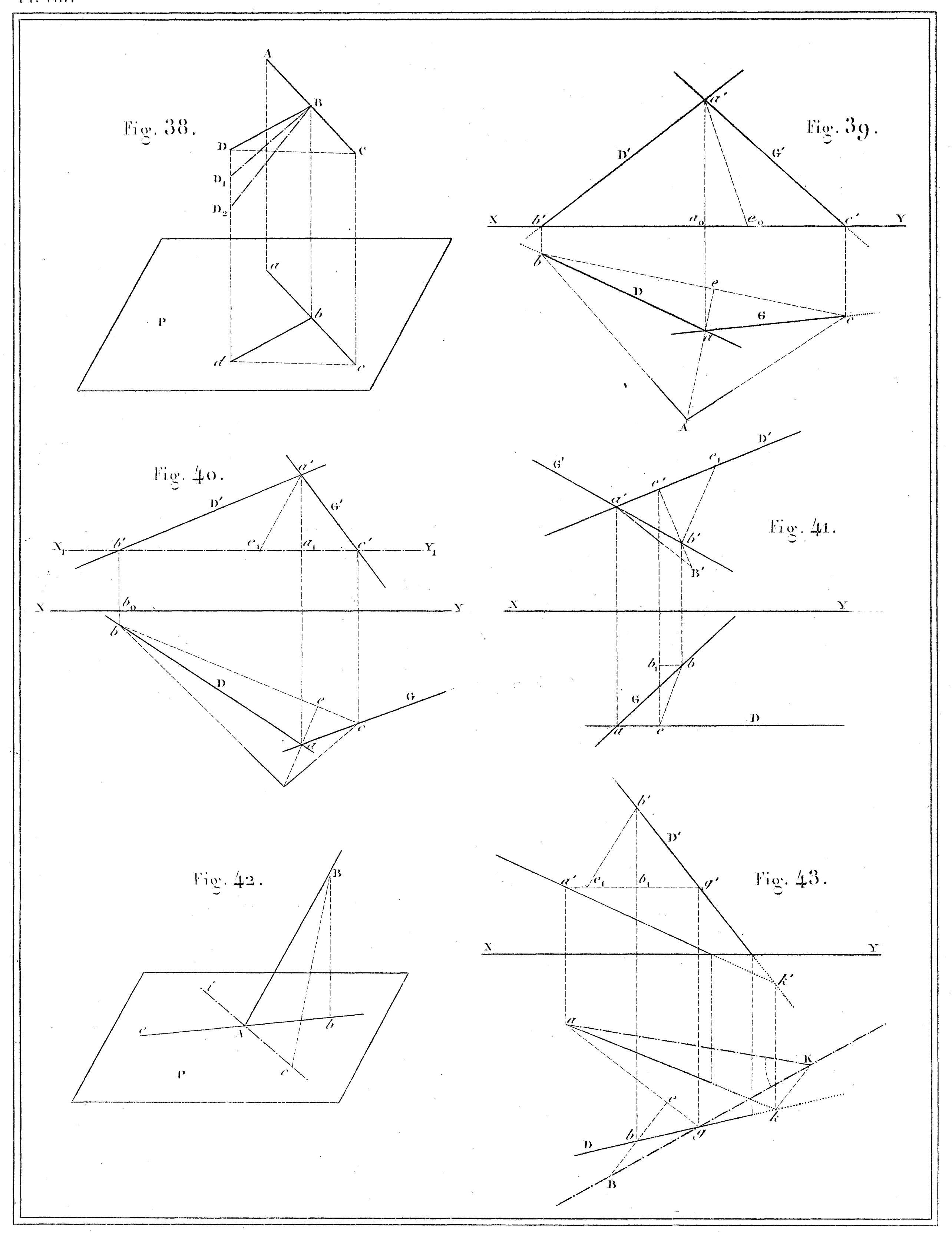
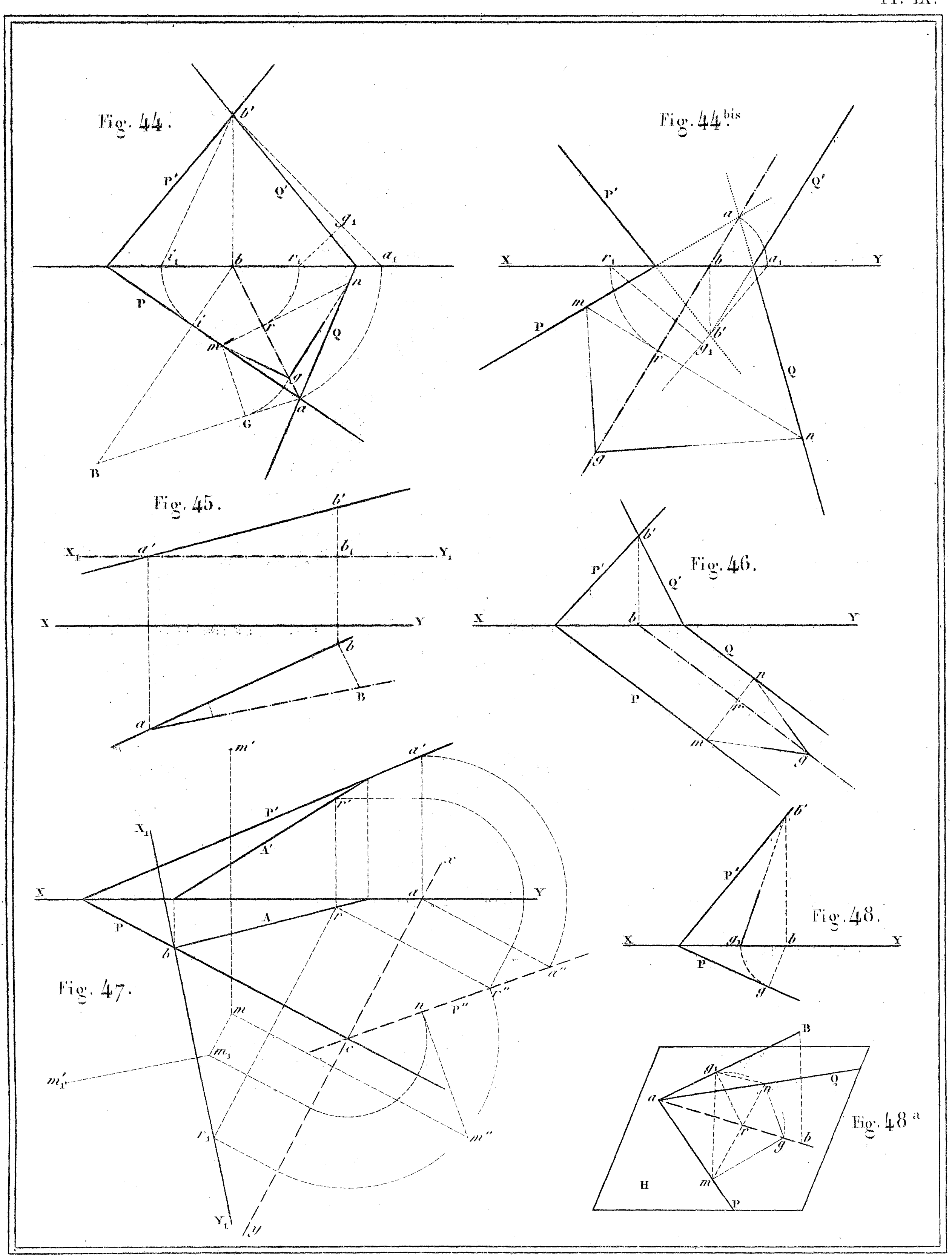
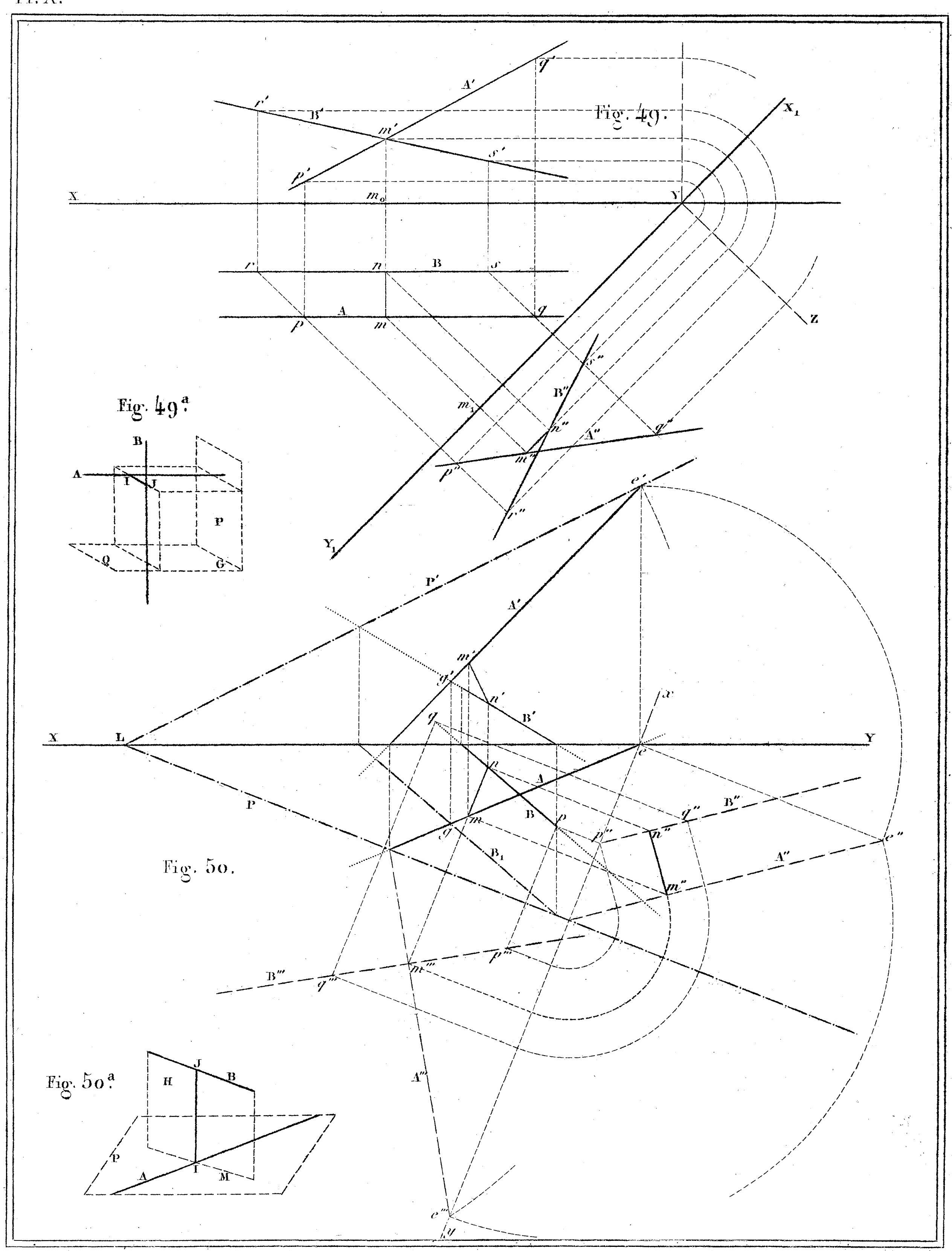
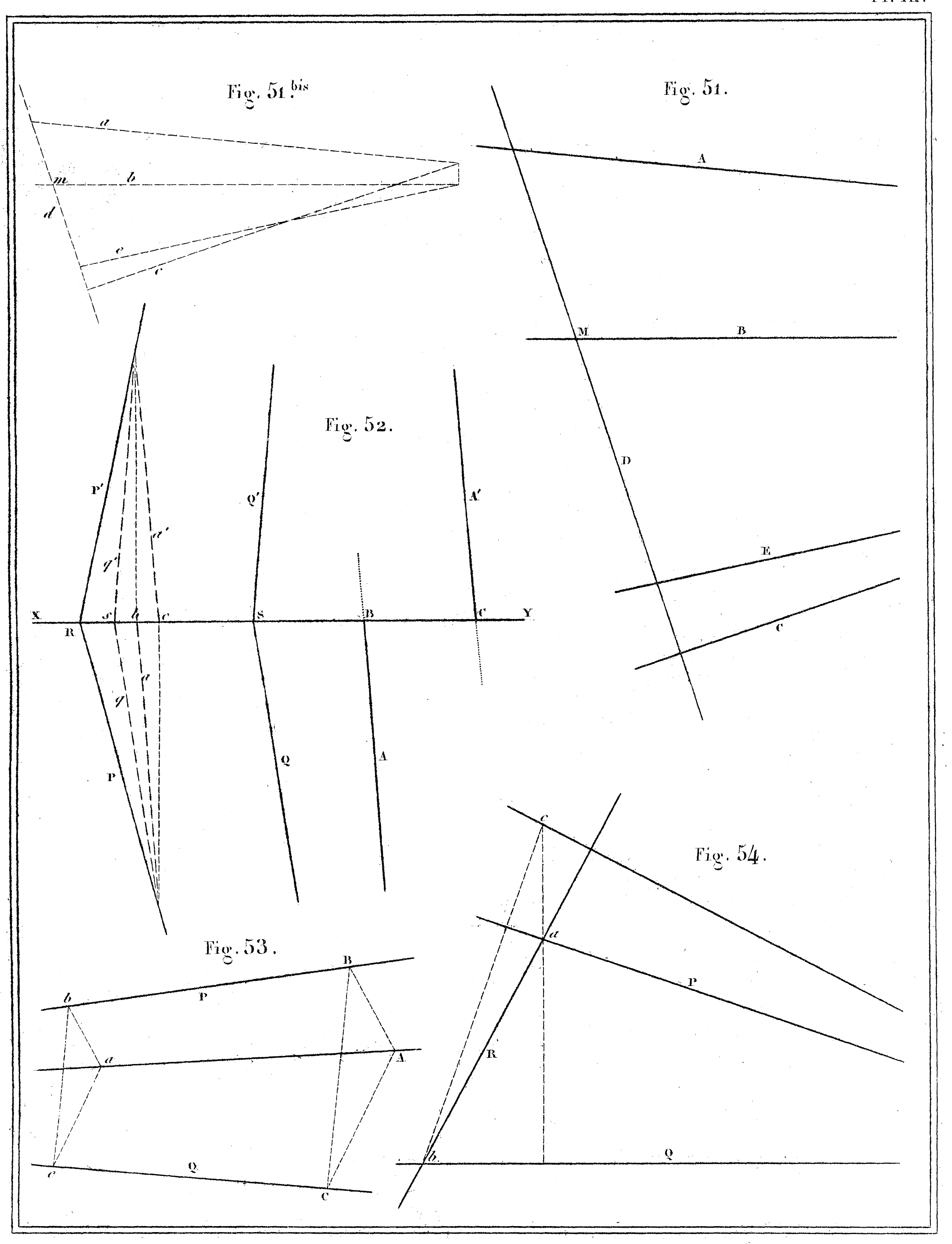


Fig. 38.
A
B
C
D
D1
D2
a
b
c
d
P
Fig. 39.
a′
D′
G′
X
b′
a0
e0
c′
Y
b
e
D
G
c
a
A
Fig. 40.
a′
D′
G′
X1
b′
e1
a1
c′
Y1
X
b0
Y
b
D
e
G
c
a
Fig. 41.
G′
c′
c1
D′
a′
b′
B′
X
Y
b1
b
G
D
a
c
Fig. 42.
B
c′
c
A
b
c
P
Fig. 43.
b′
D′
a′
e1
b1
g′
X
Y
k′
a
K
e
k
D
b
g
B


Fig. 44.
Fig. 44. bis
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 48 a

Pl. X.




Fig. 51. bis
a
m
b
d
e
c
Fig. 51.
A
M
B
D
E
C
Fig. 52.
P'
Q'
A'
a'
q'
X
s
h
c
S
B
C
Y
R
a
q
P
Q
A
Fig. 53.
B
b
P
a
A
c
Q
C
Fig. 54.
c
a
P
R
b
Q

Pl. XII.

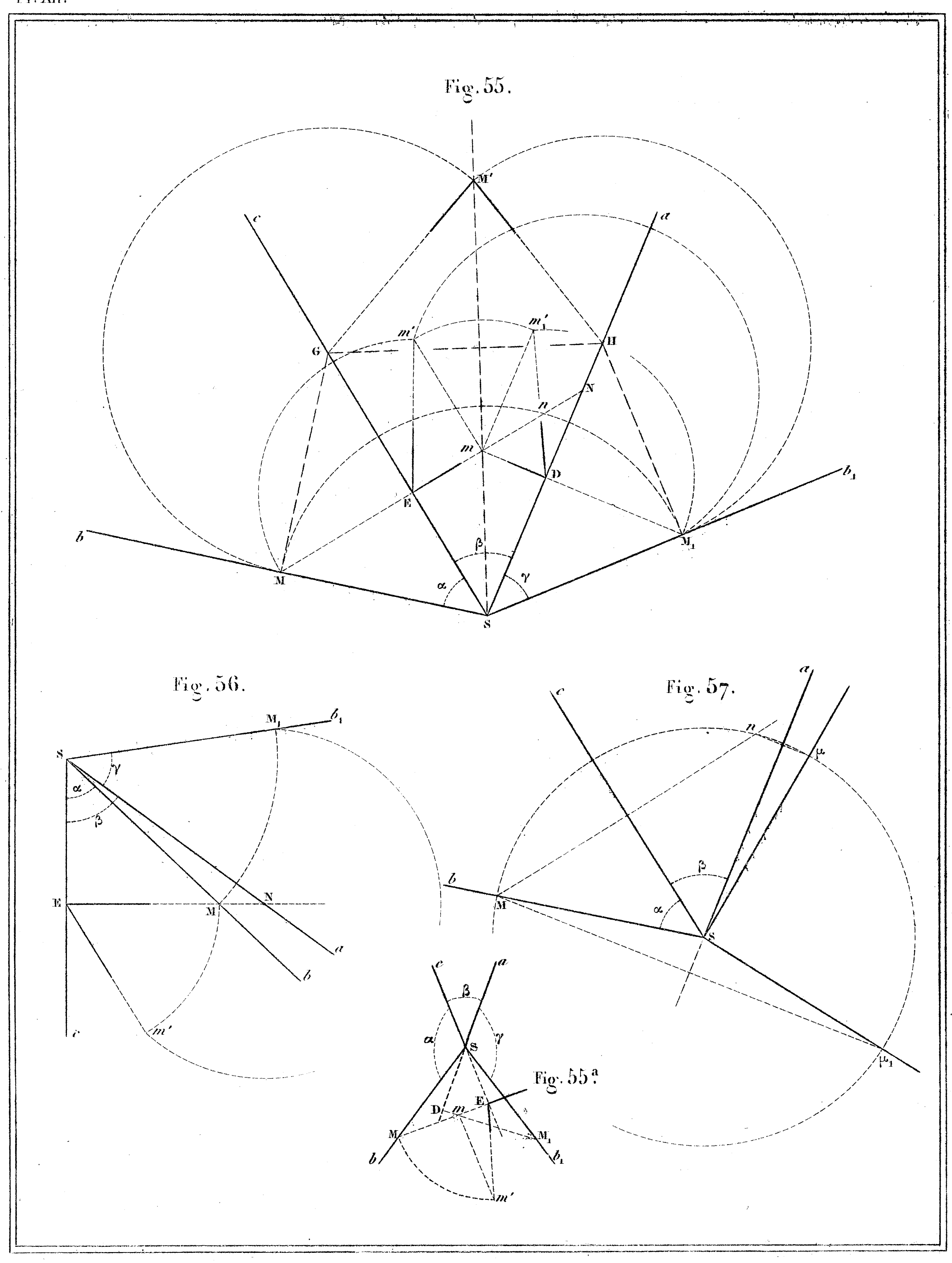
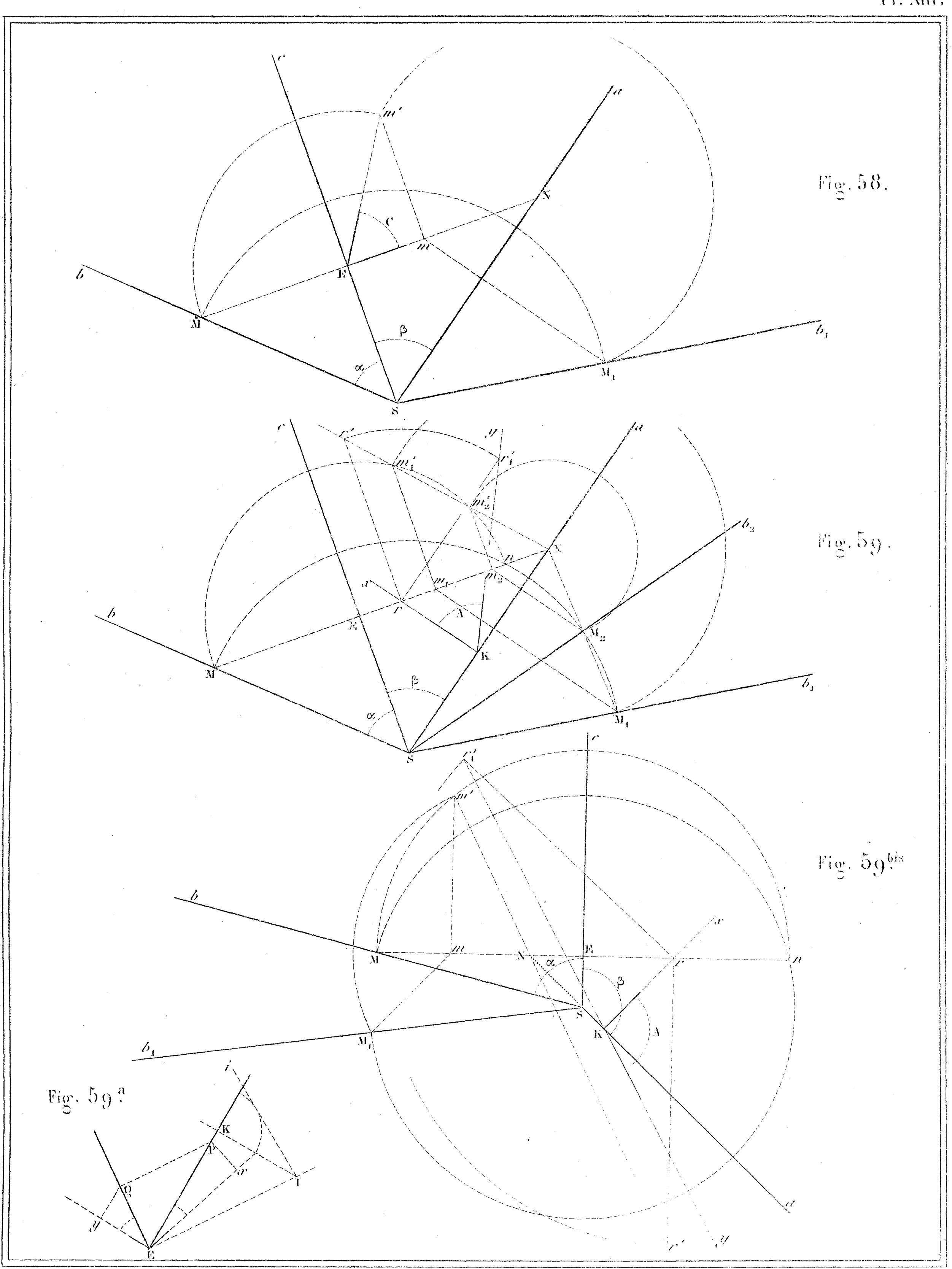
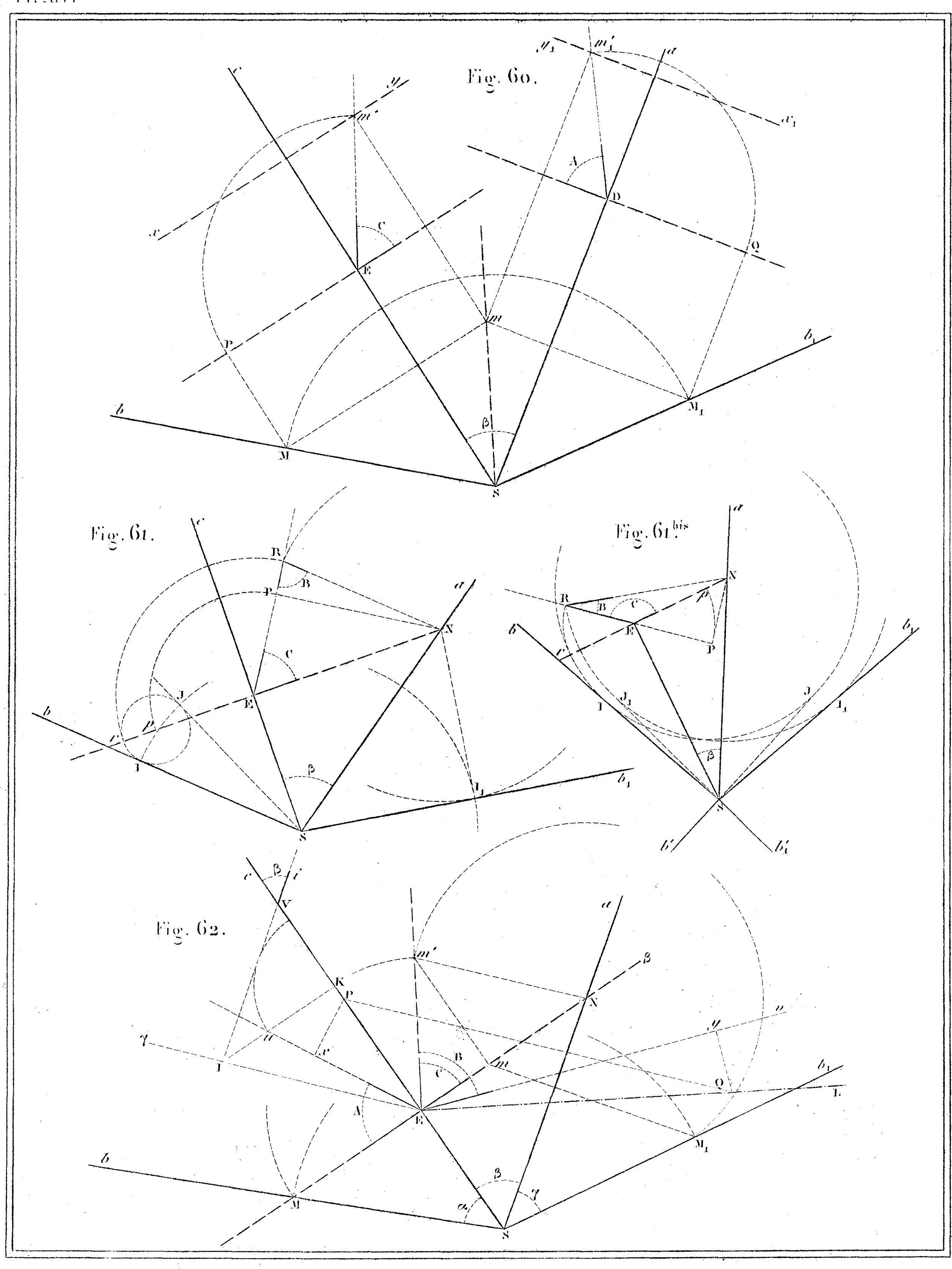


Fig. 55.
M'
c
a
m'
m'_1
G
H
N
n
m
D
E
b_1
b
M_1
M
β
α
γ
S
Fig. 56.
M_1
b_1
S
γ
α
β
E
M
N
a
b
c
m'
Fig. 57.
c
a
n
μ
b
β
α
M
S
μ_1
c
a
β
α
S
γ
Fig. 55a.
E
D
m
M
M_1
b
b_1
m'


Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 59.bis
Fig. 59.a


Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 61. bis
Fig. 62.

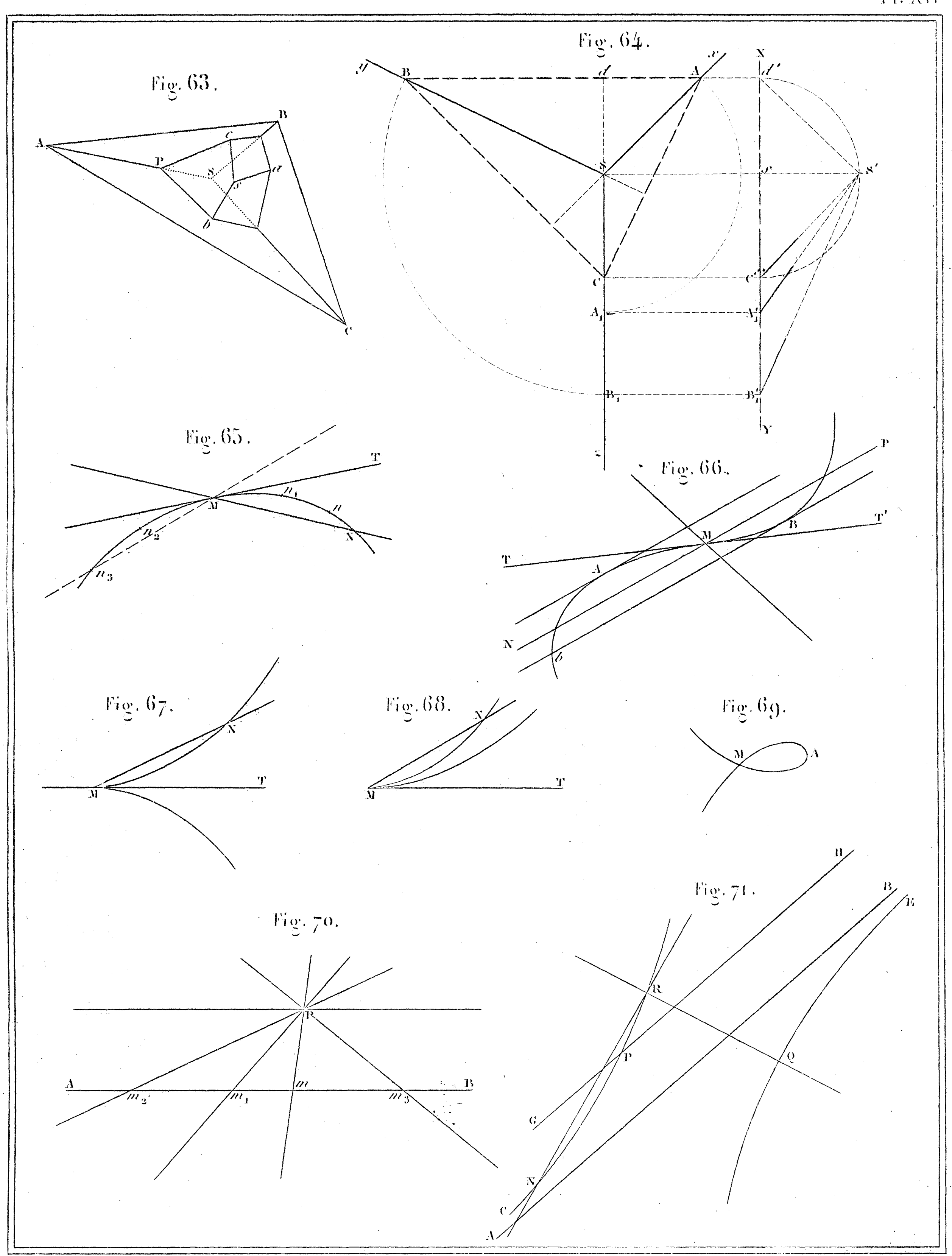
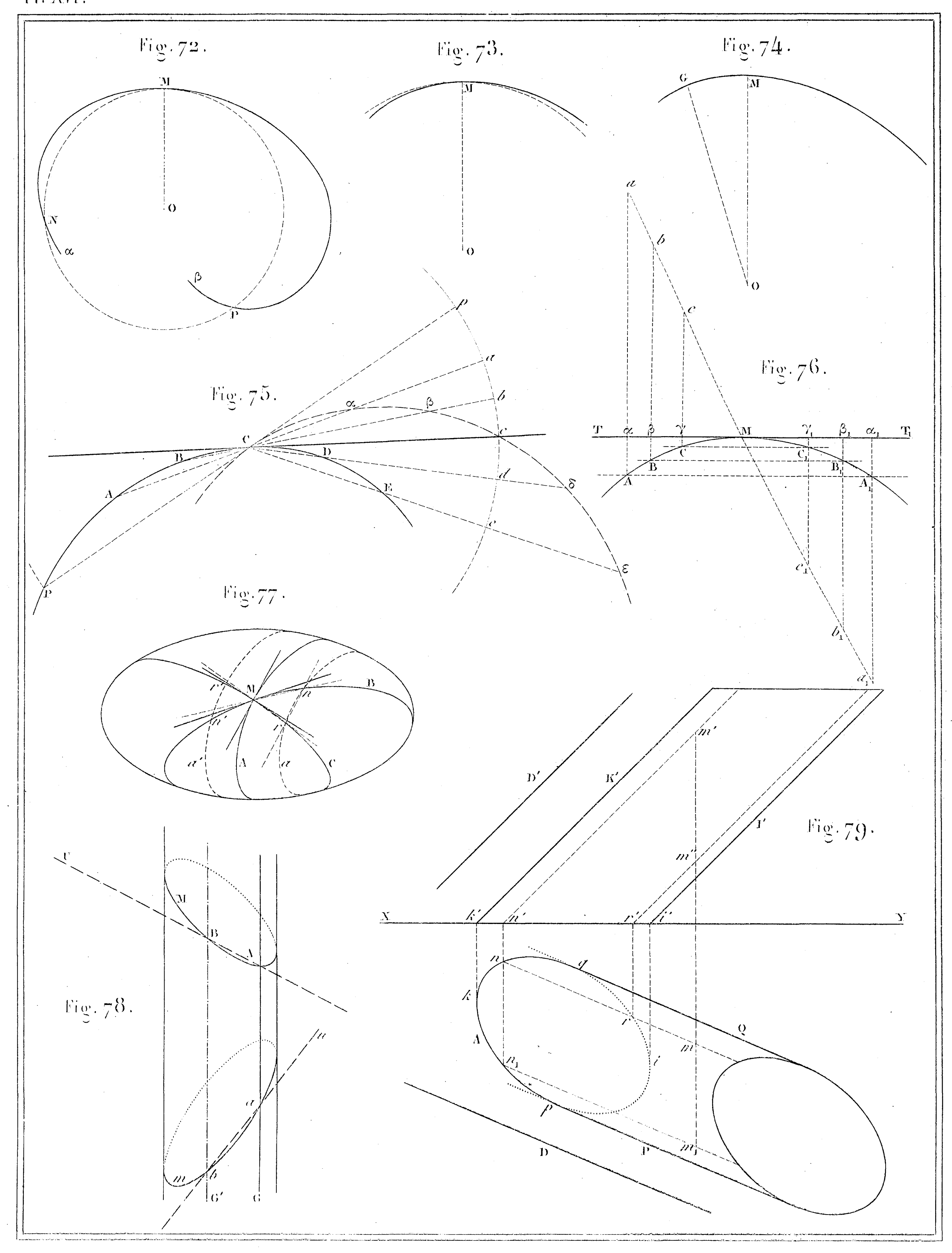
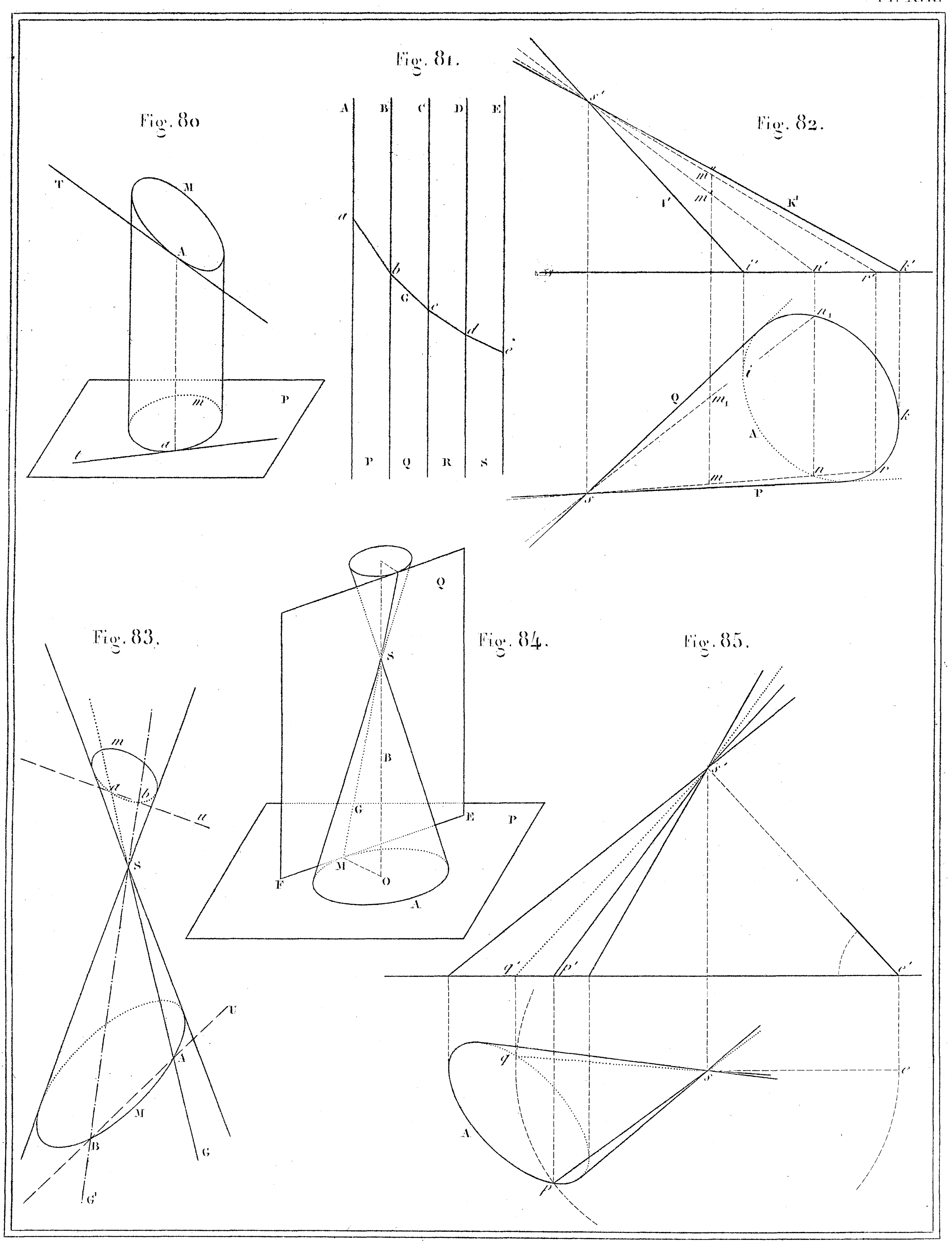
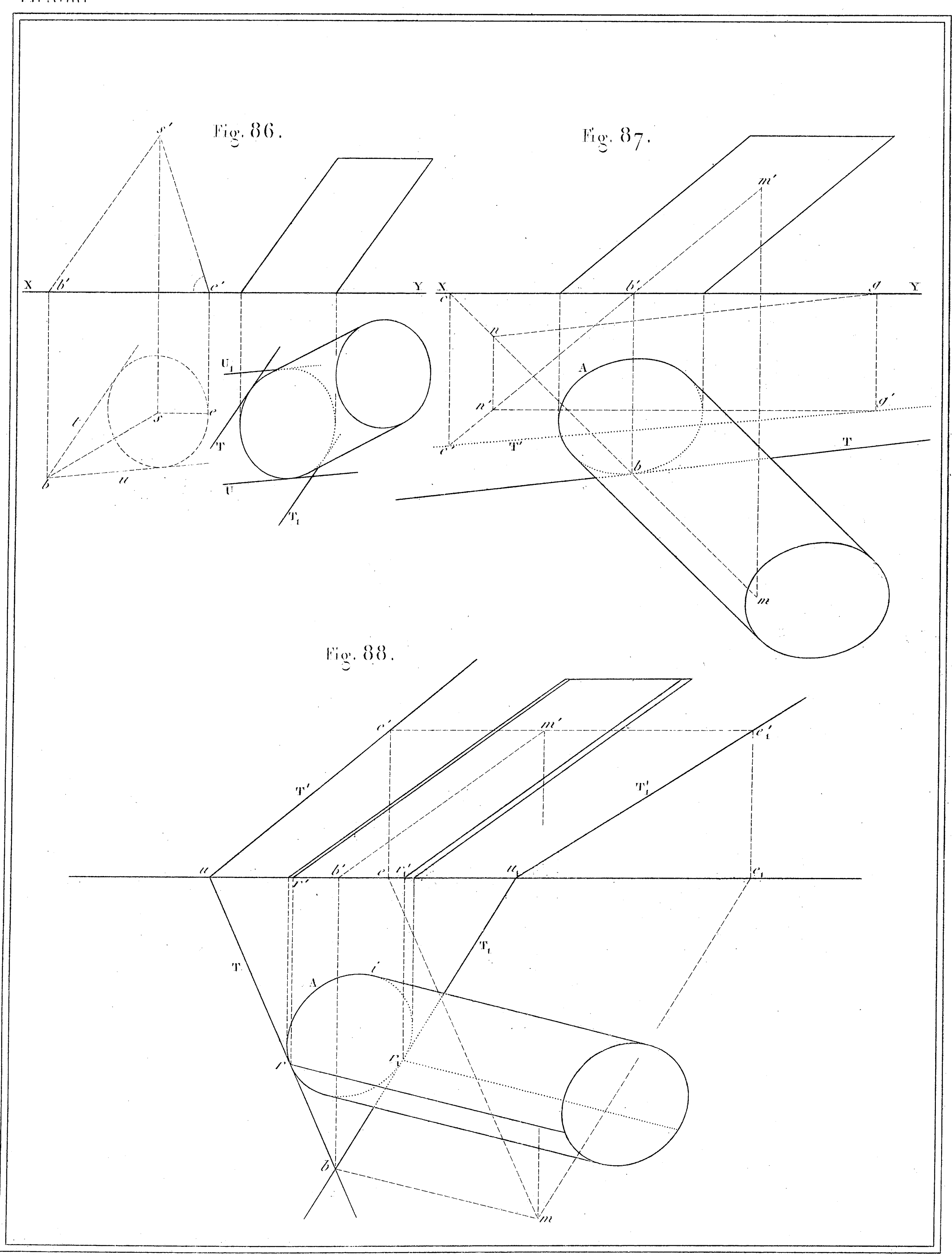
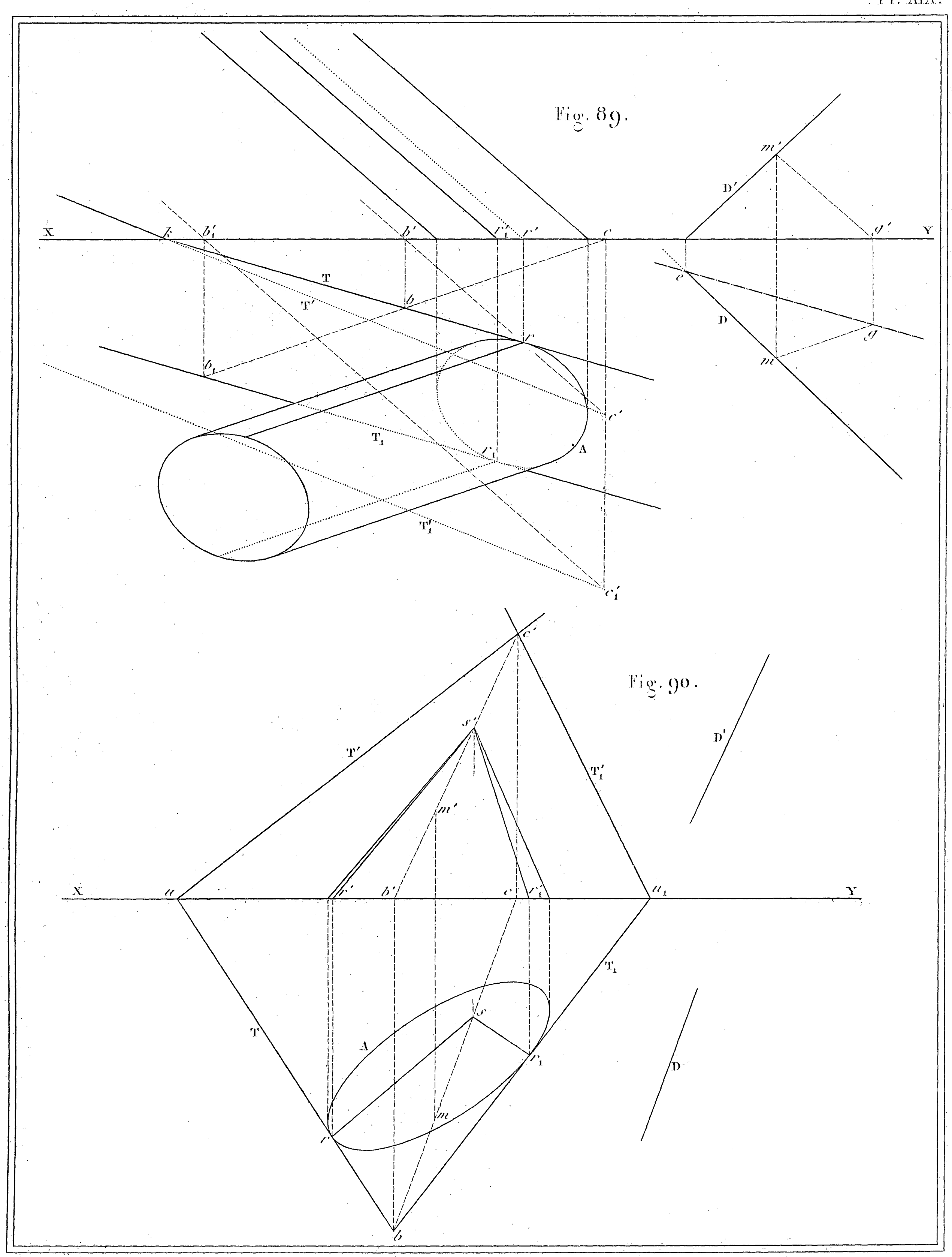


Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.

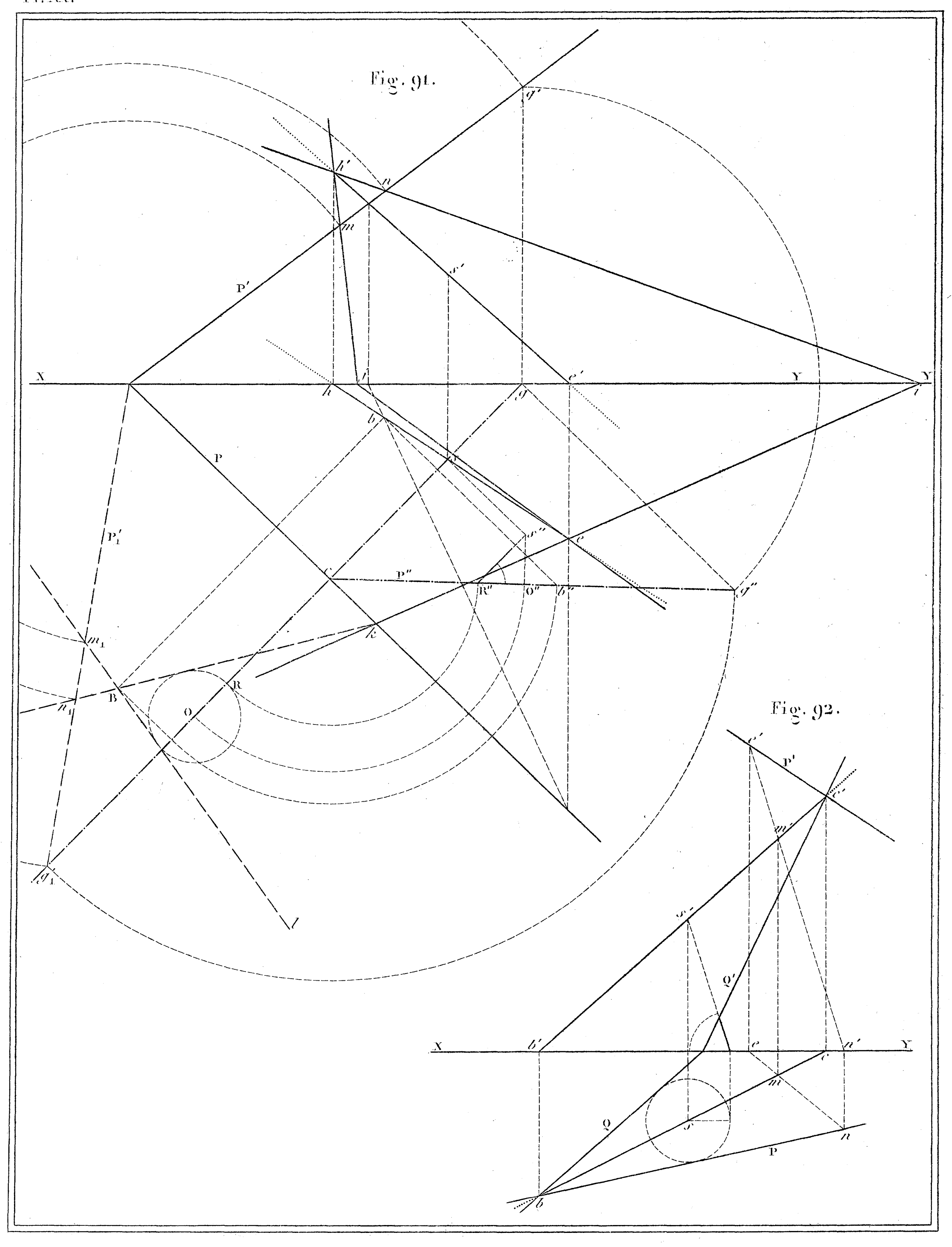

Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.


Fig. 80
T
M
A
P
m
a
t
Fig. 81.
A
B
C
D
E
a
b
G
c
d
e
P
Q
R
S
Fig. 82.
I'
K'
Q
A
k
P
Fig. 83.
m
a
b
u
S
U
A
M
B
G
G'
Fig. 84.
Q
S
B
G
E
P
M
O
F
A
Fig. 85.
A
q
p


Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
X
Y
T
U
U_1
T_1
T'
T'_1
A


Fig. 89.
Fig. 90.

Pl. XX.



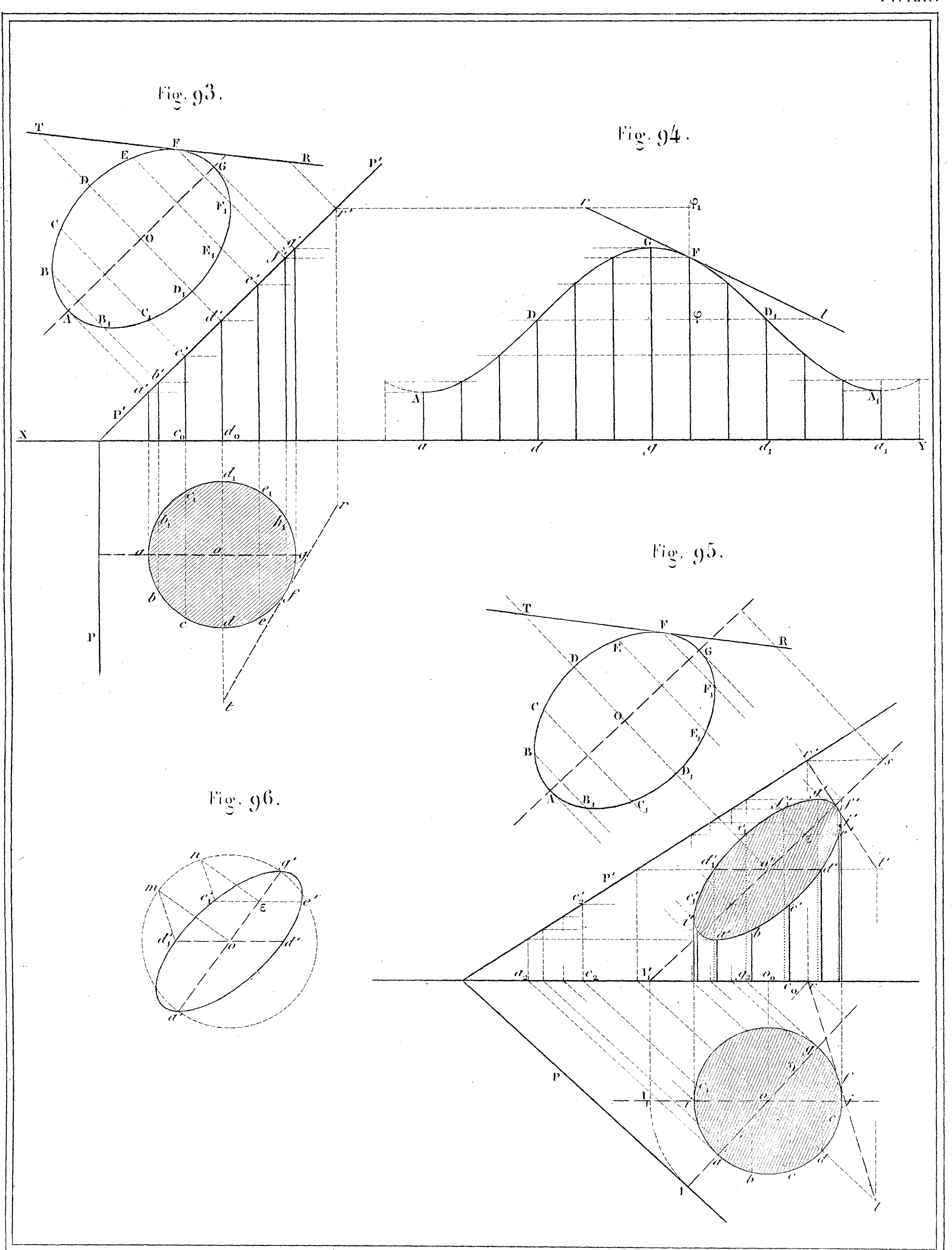


Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.

Pl. XXII.

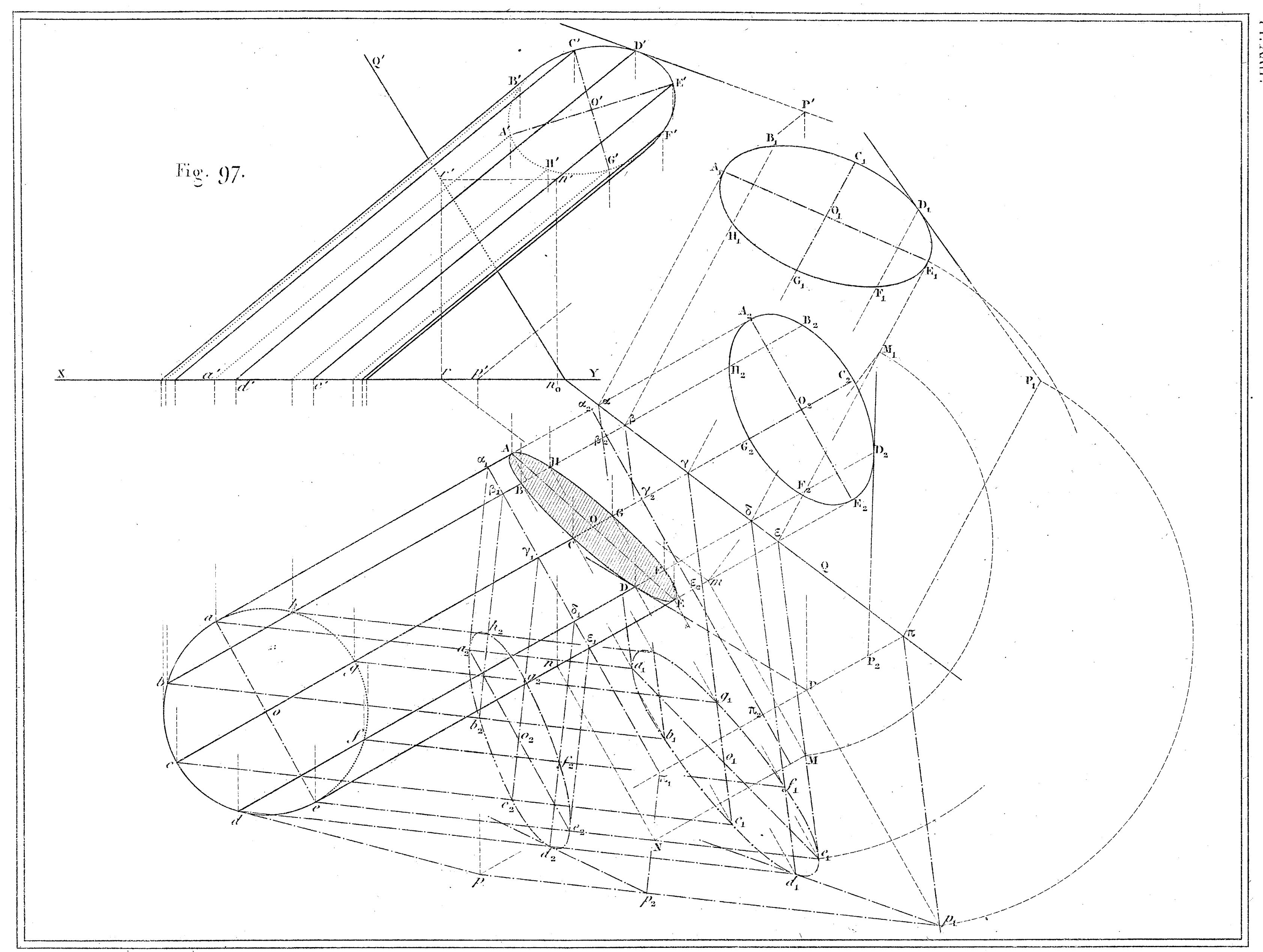
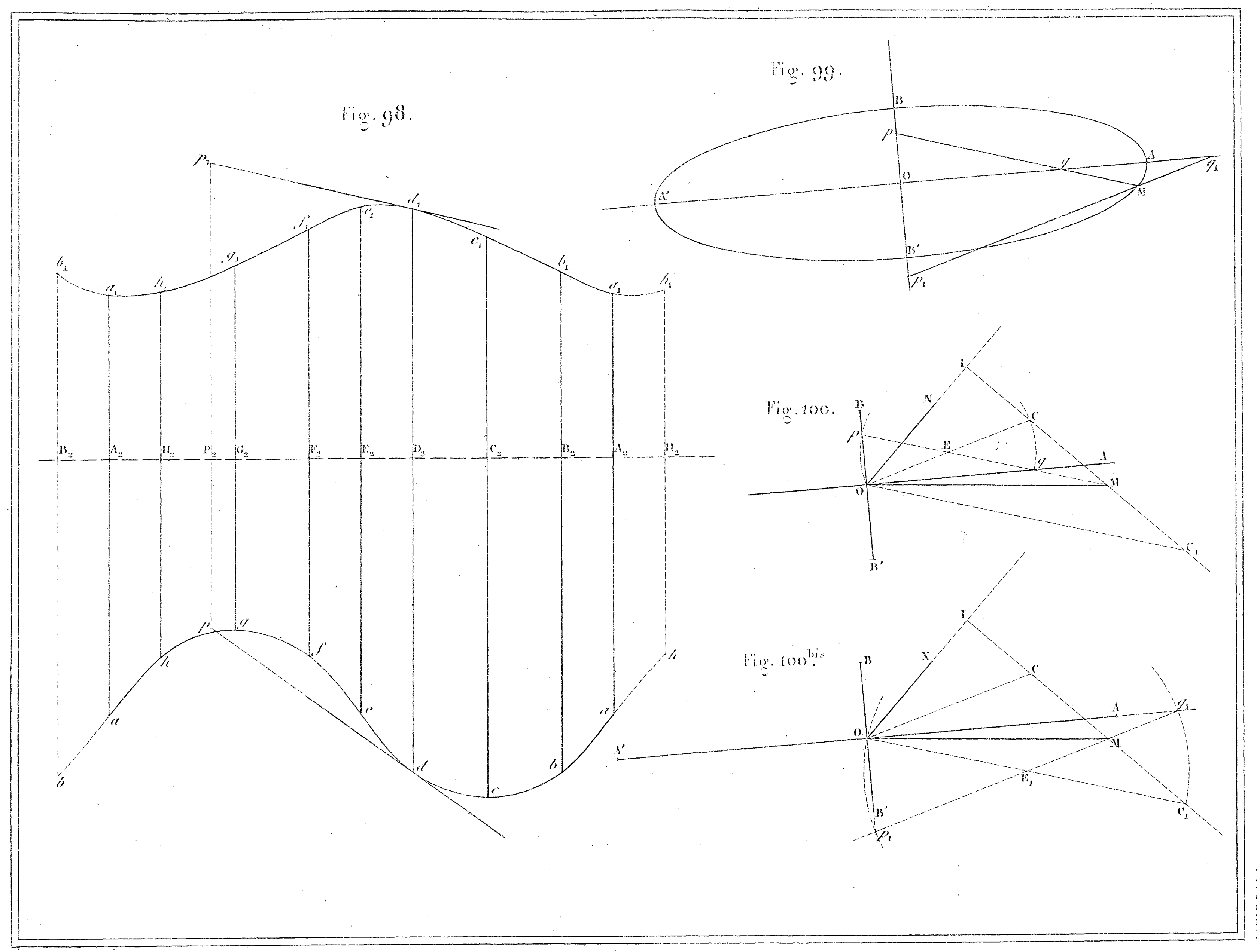
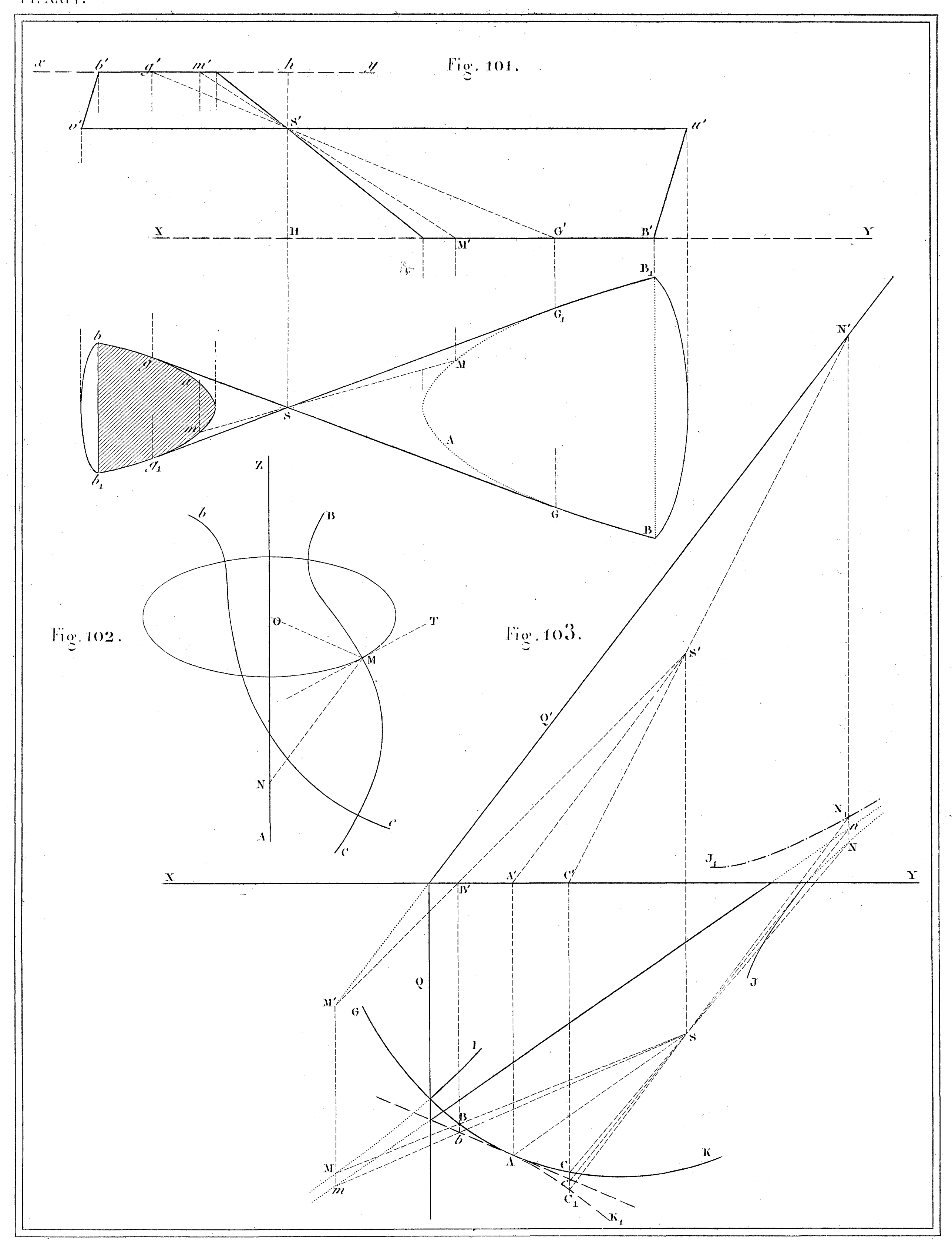
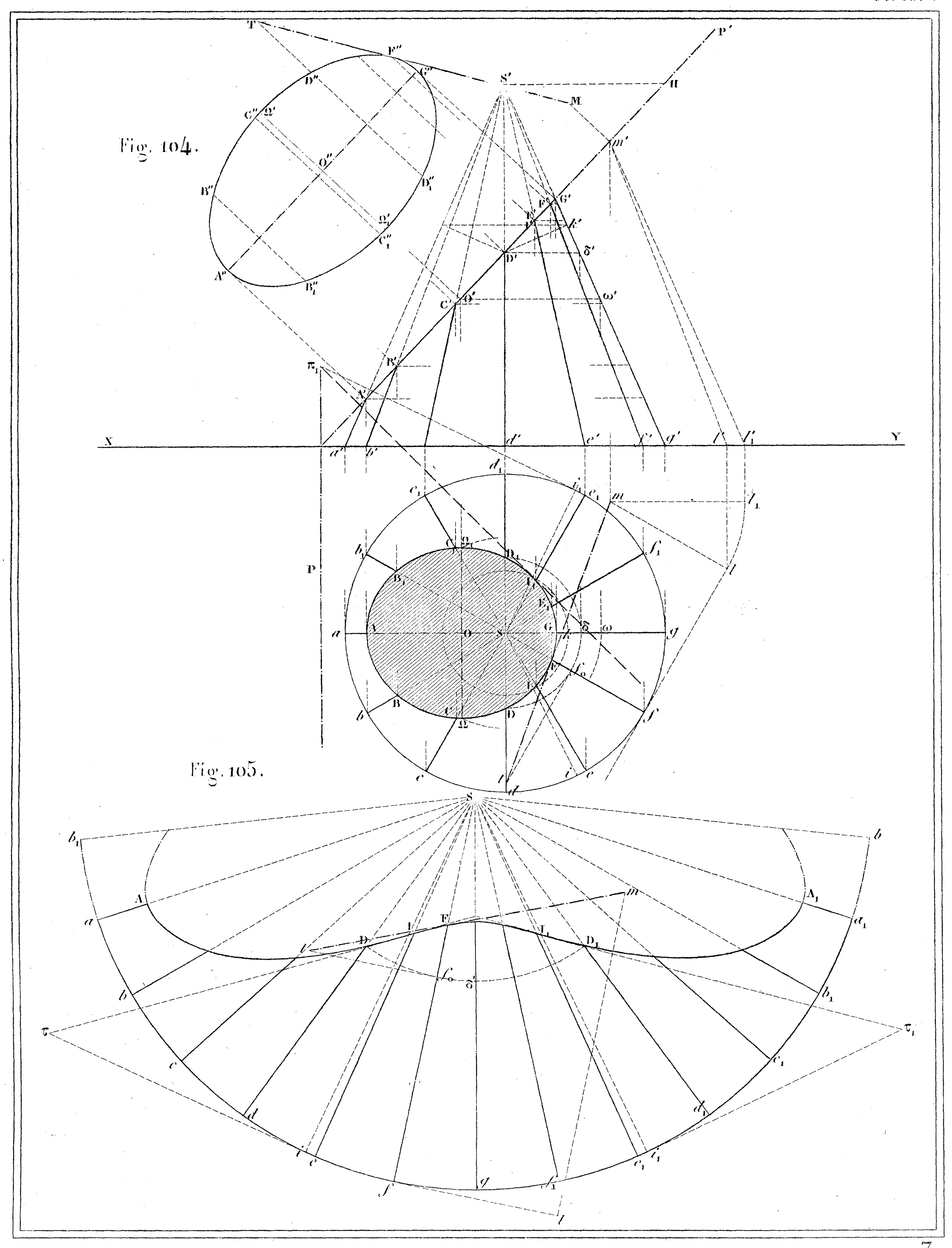


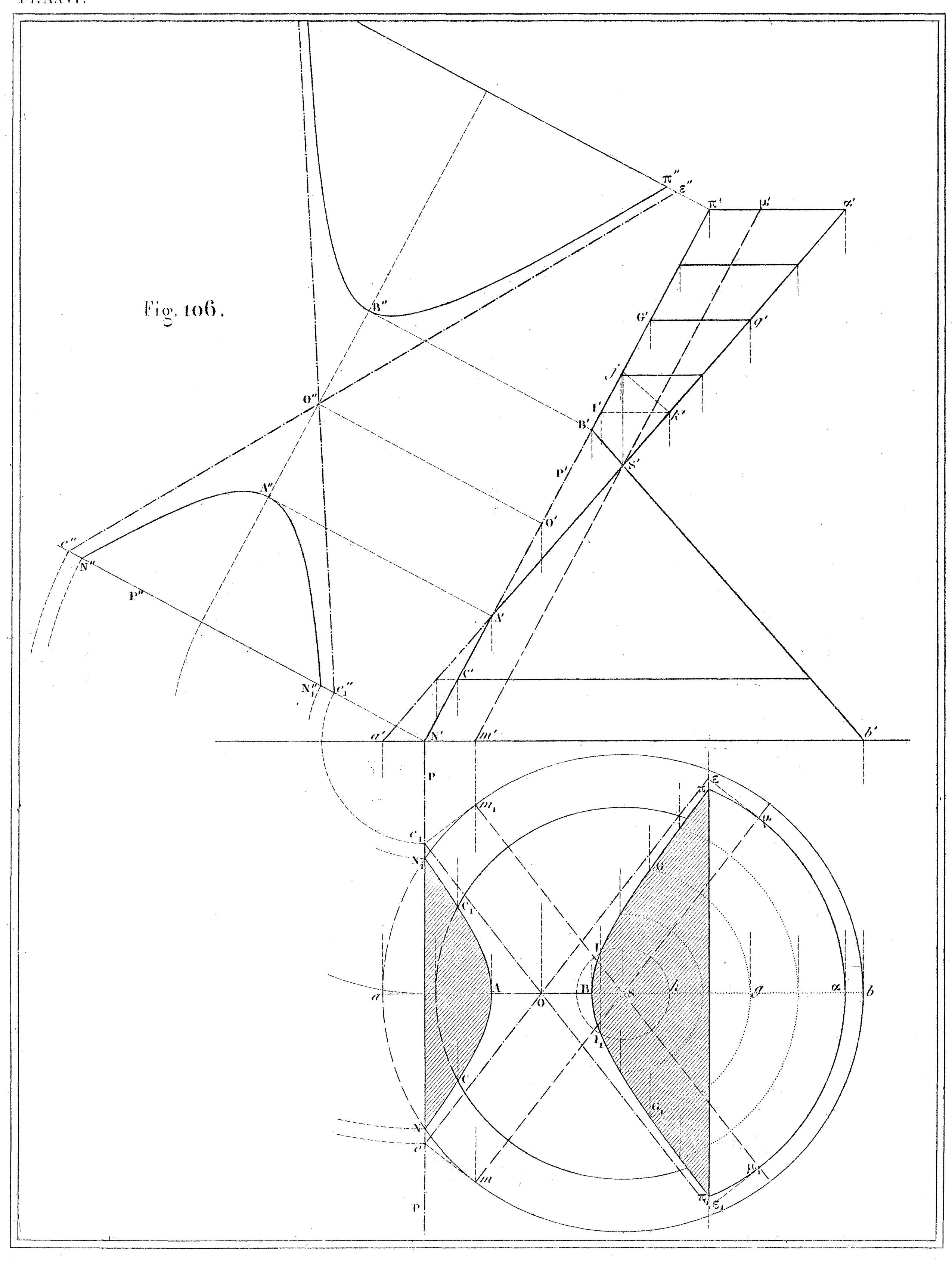
Fig. 97.

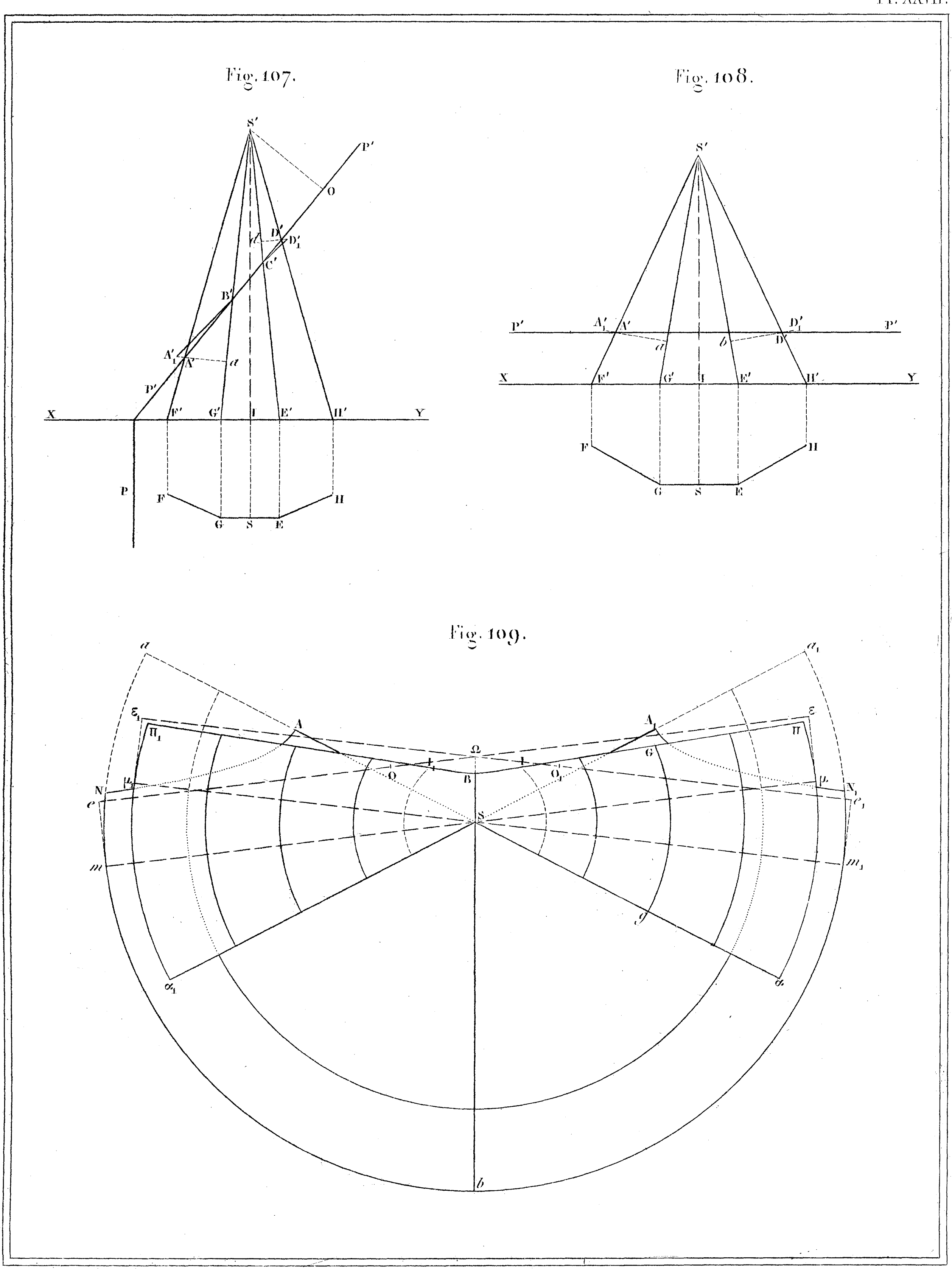

Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 100.bis

Pl. XXIV.

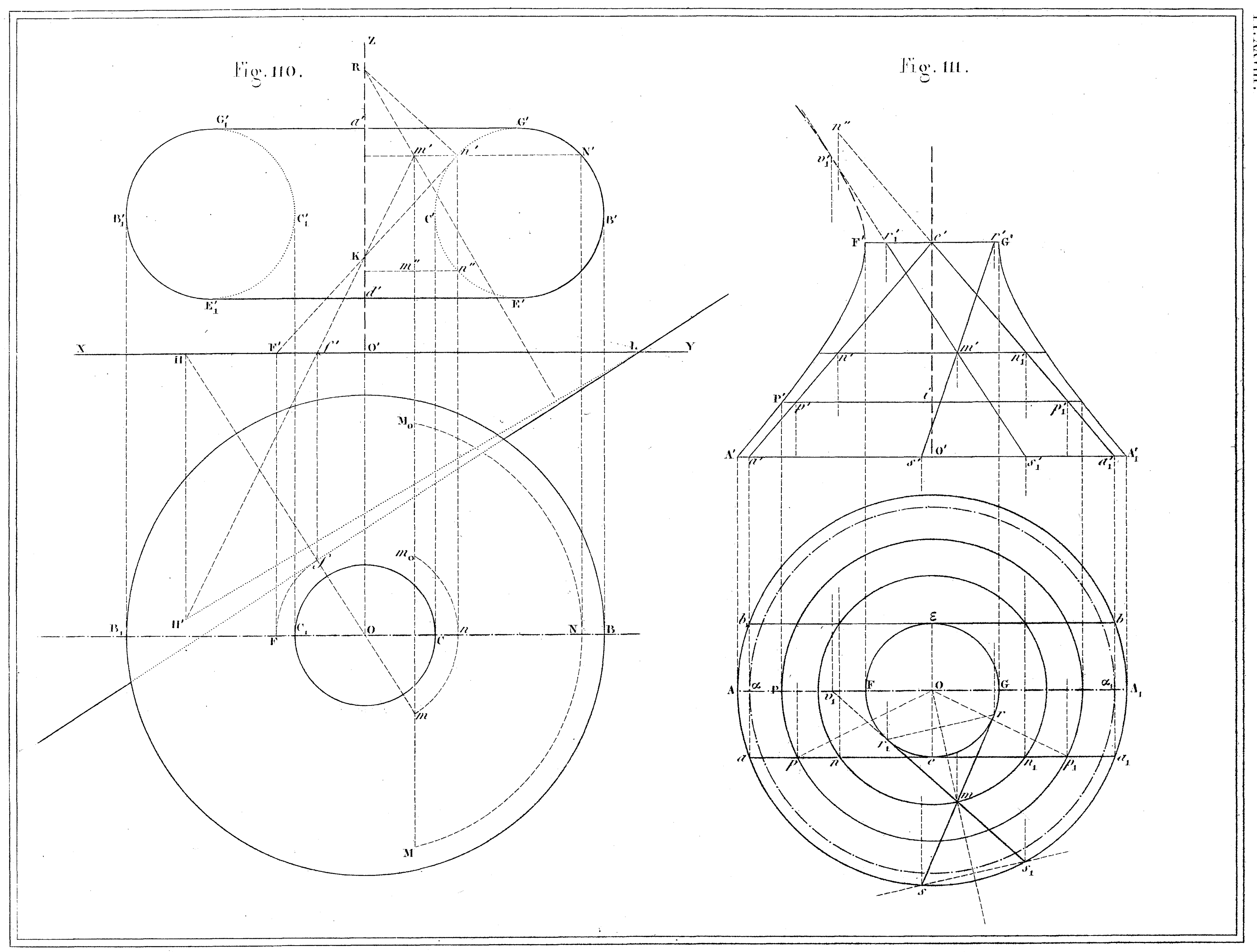

Fig. 101.
x
b′
g′
m′
h
y
v′
S′
u′
X
H
M′
G′
B′
Y
B1
G1
b
g
a
m
S
M
A
g1
b1
G
B
Fig. 102.
Z
b
B
O
T
M
N
A
c
C
Fig. 103.
N′
S′
Q′
X
B′
A′
C′
J1
N1
n
N
Y
Q
M′
G
I
S
J
B
b
A
C
K
M
m
C1
K1


Fig. 104.
Fig. 105.


Fig. 106.


Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.

Pl. XXVIII.



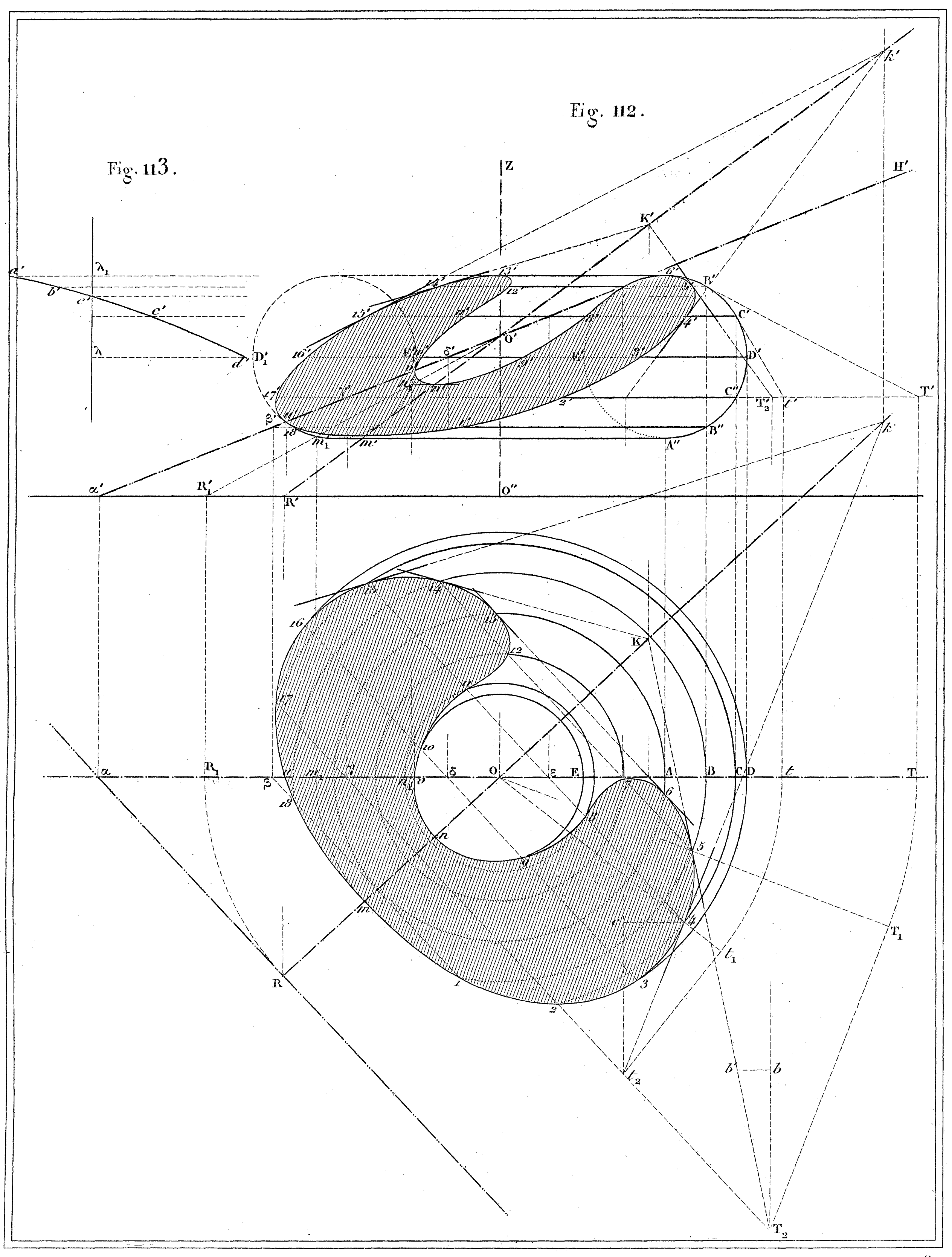
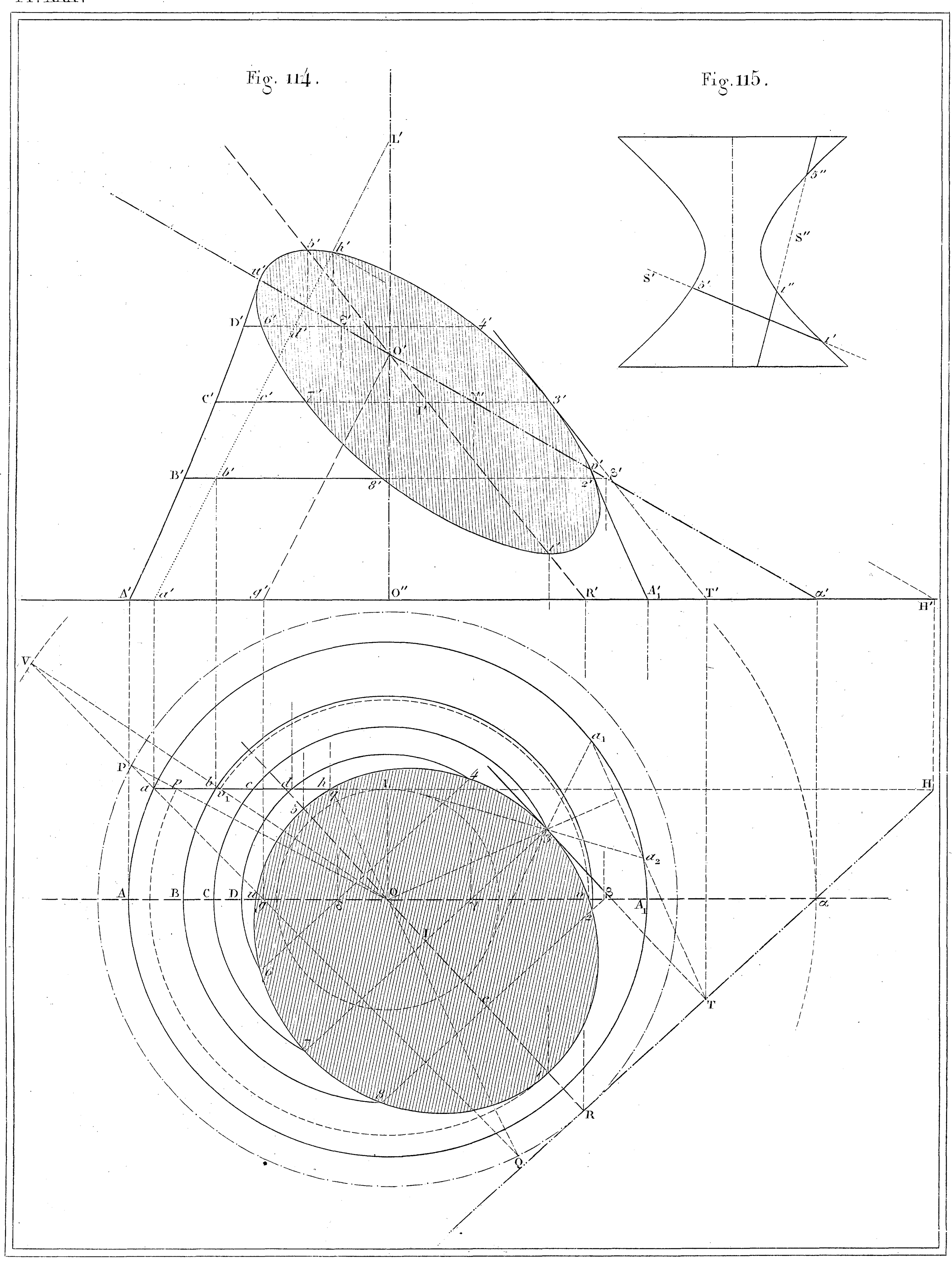
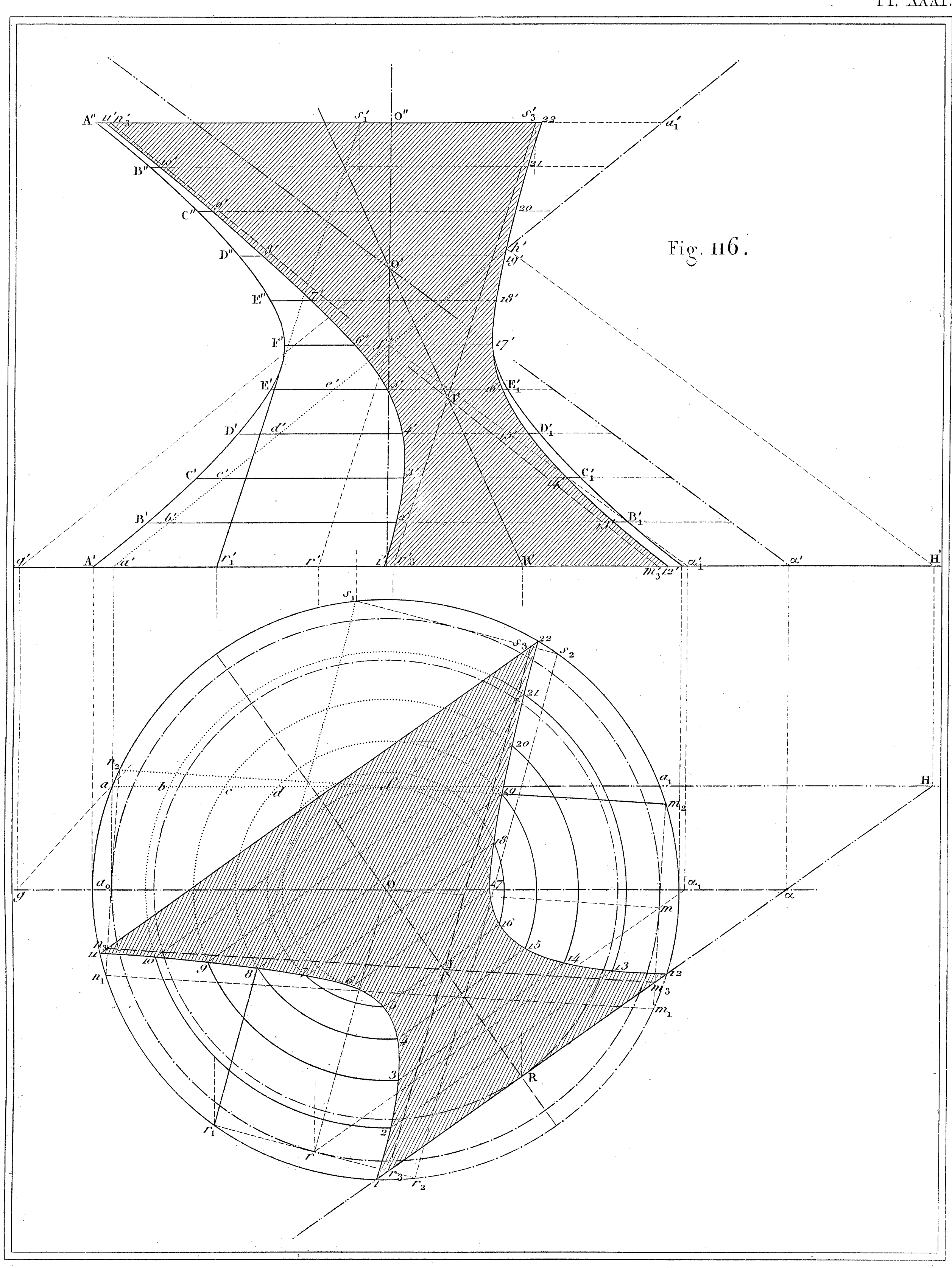
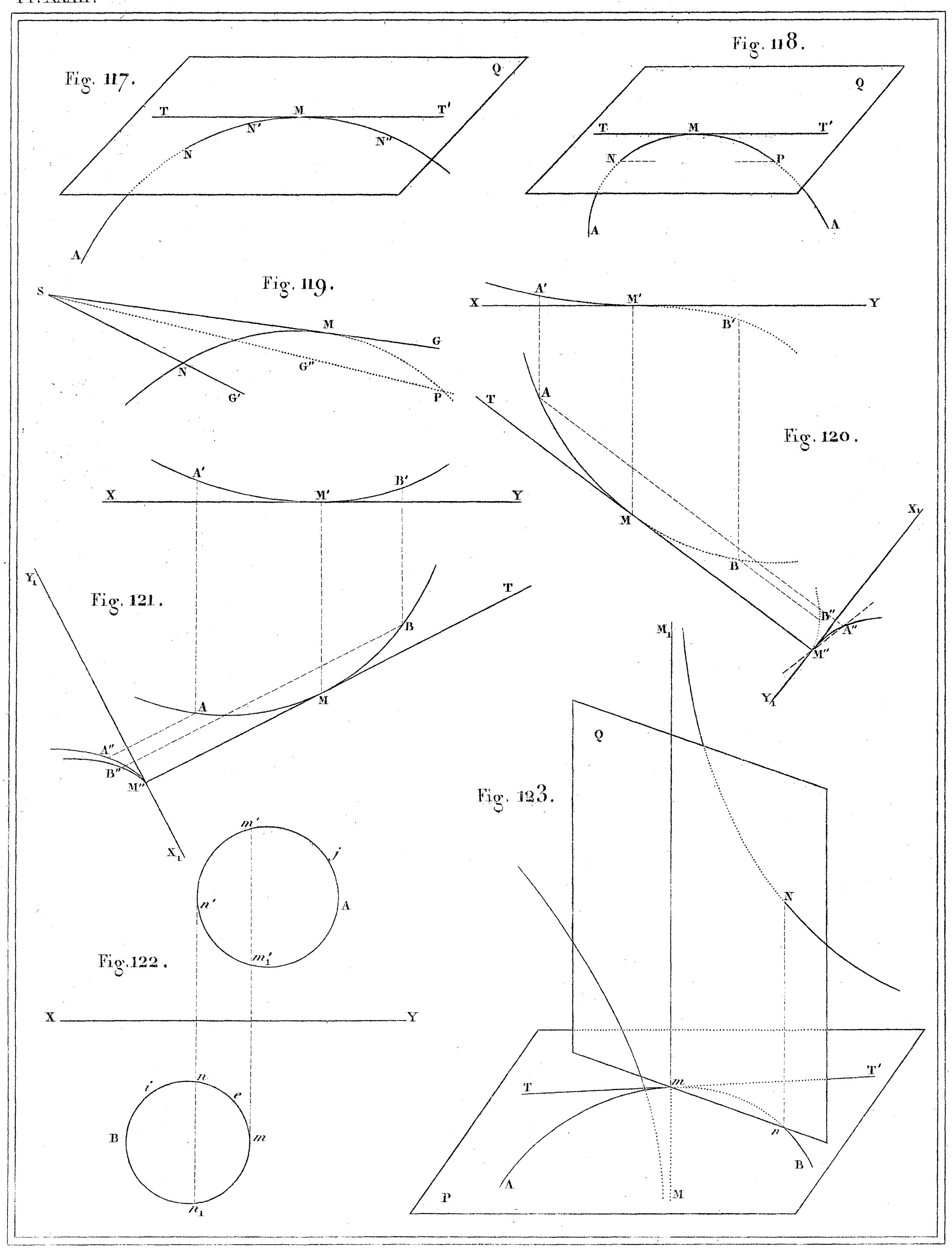
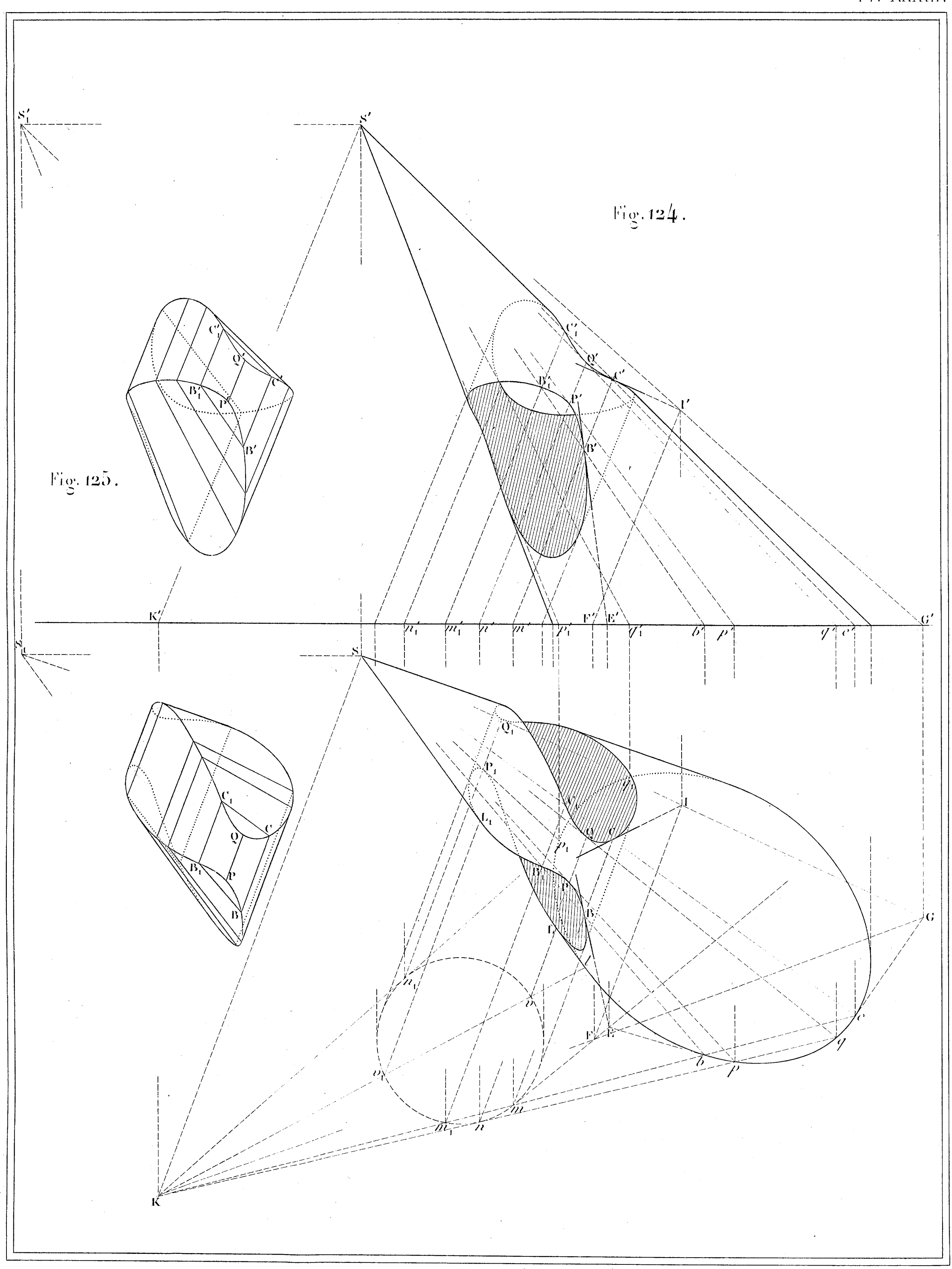


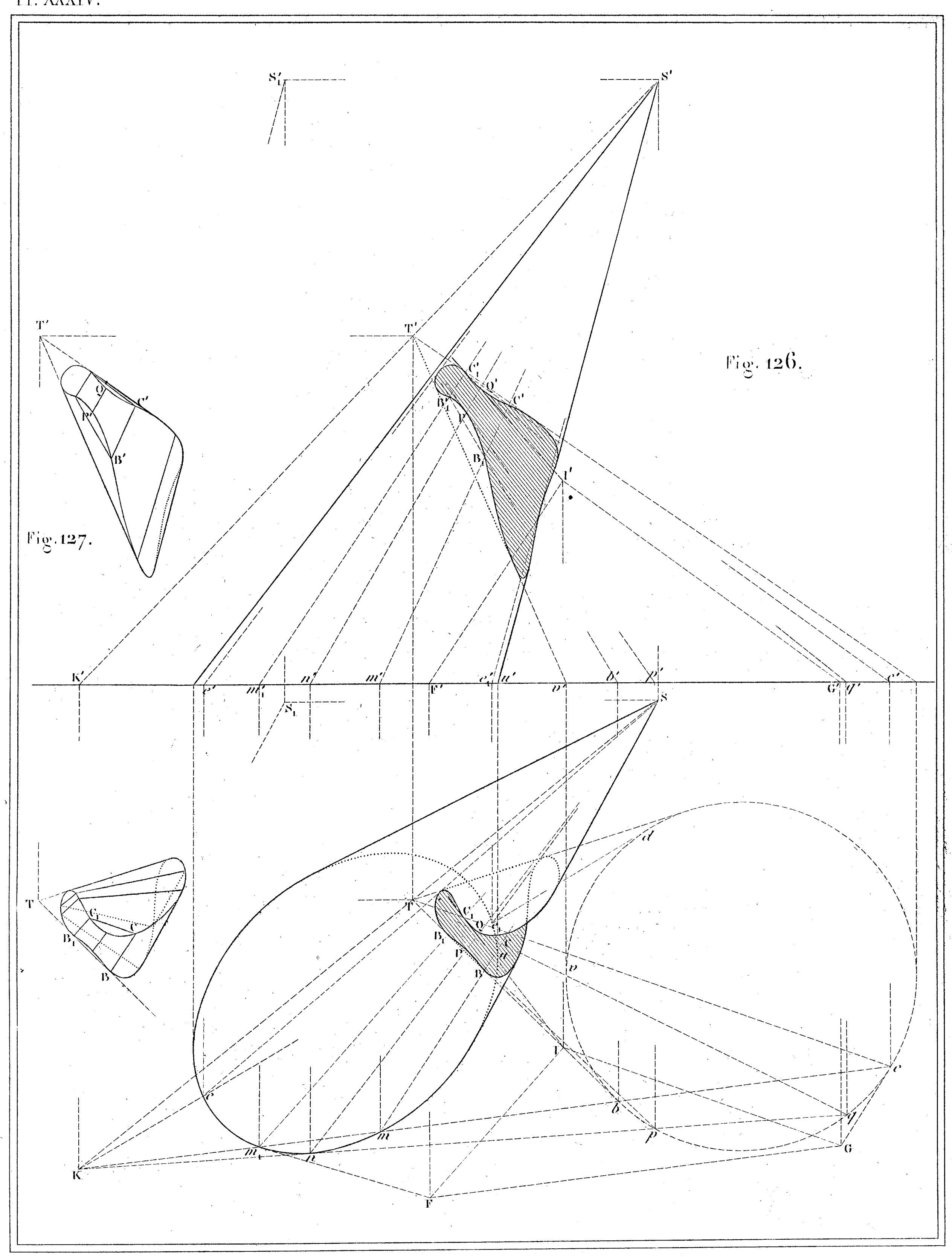
Fig. 112.
Fig. 113.
Z
H'
K'
k'
B'
C'
D'
C''
B''
A''
T'
O'
O''
α'
R'
K
O
E
A
B
C
D
t
T
R
T
k
t₁
t₂
T₁
T₂
b'
b

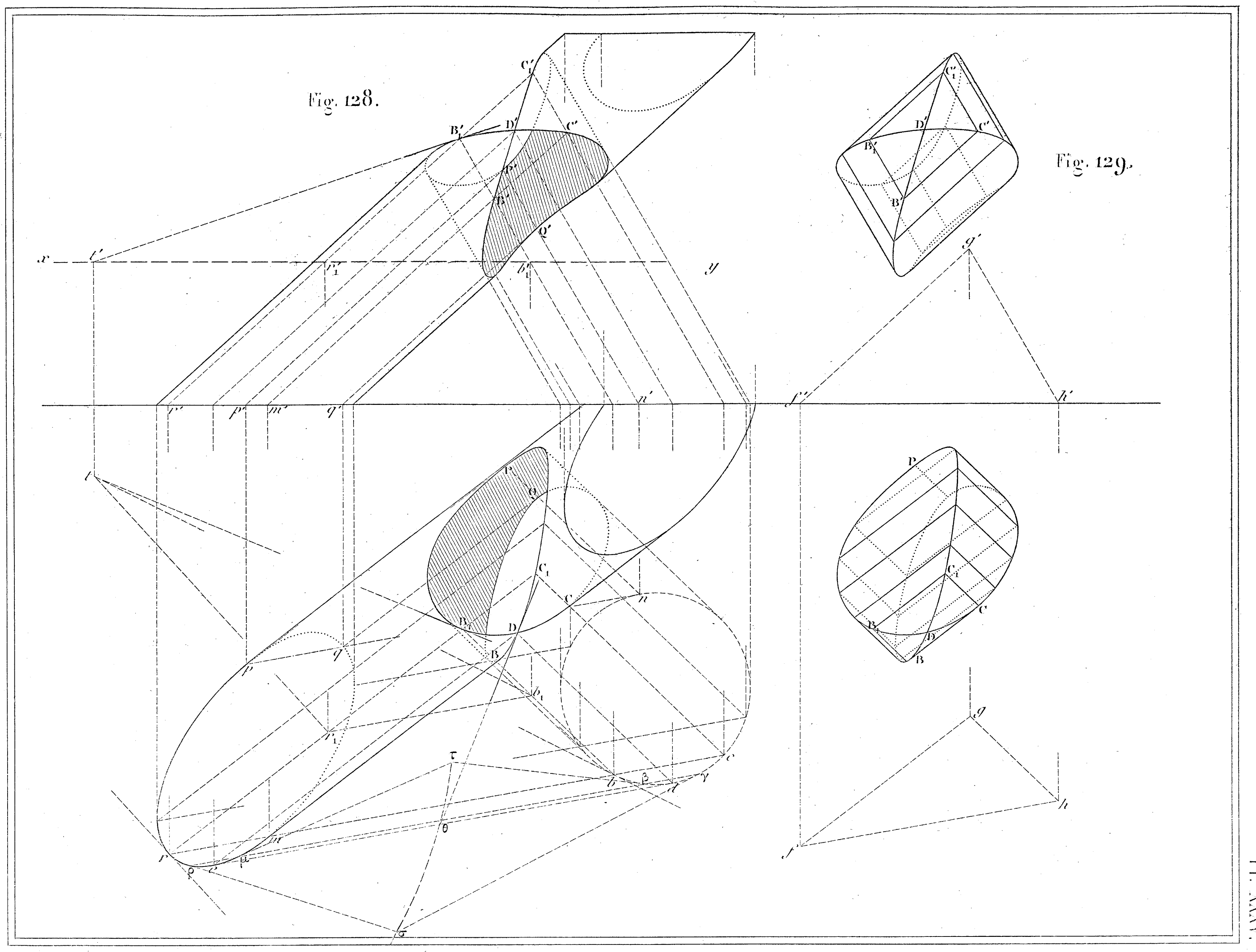

Fig. 114.
Fig. 115.

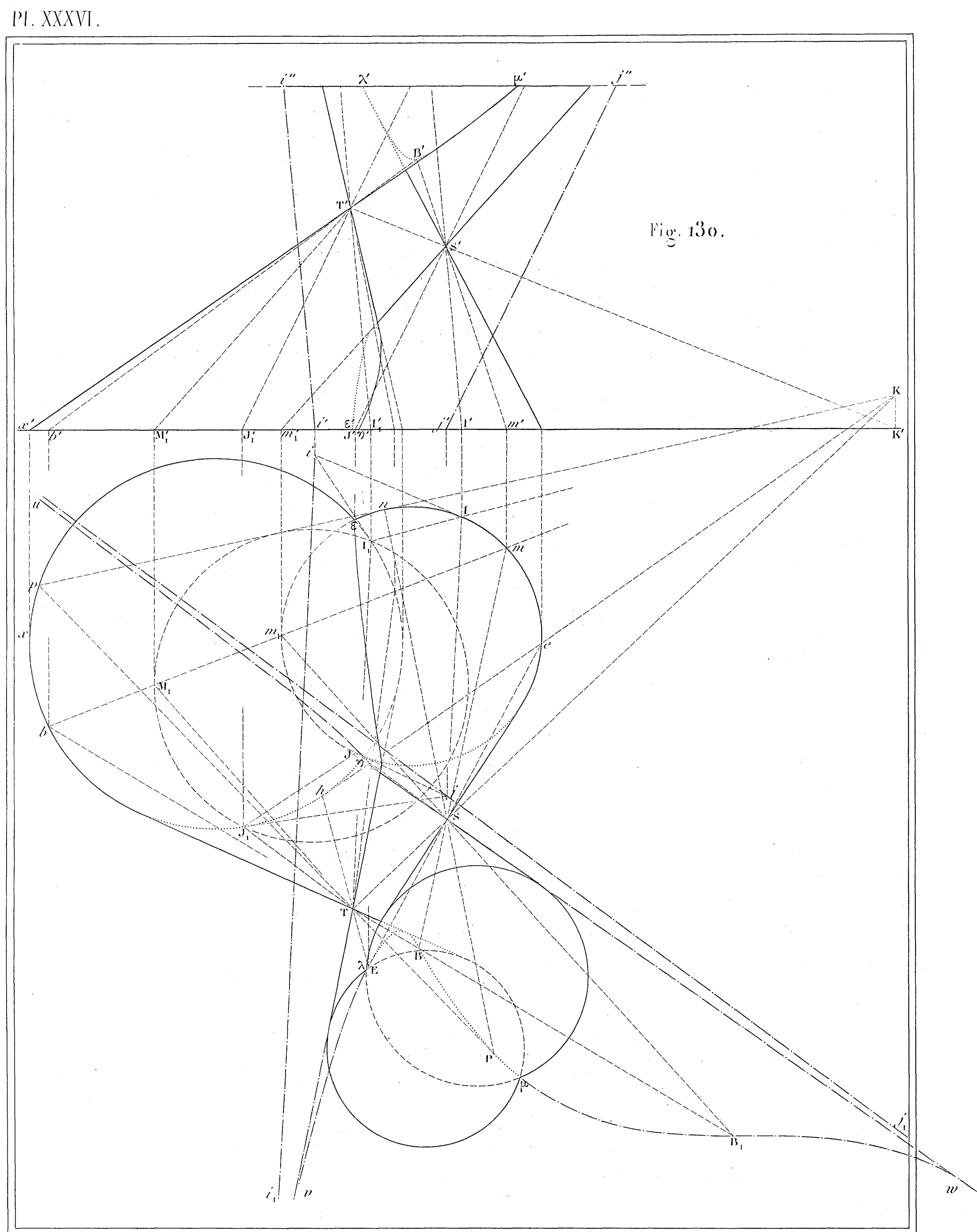

Fig. 116.

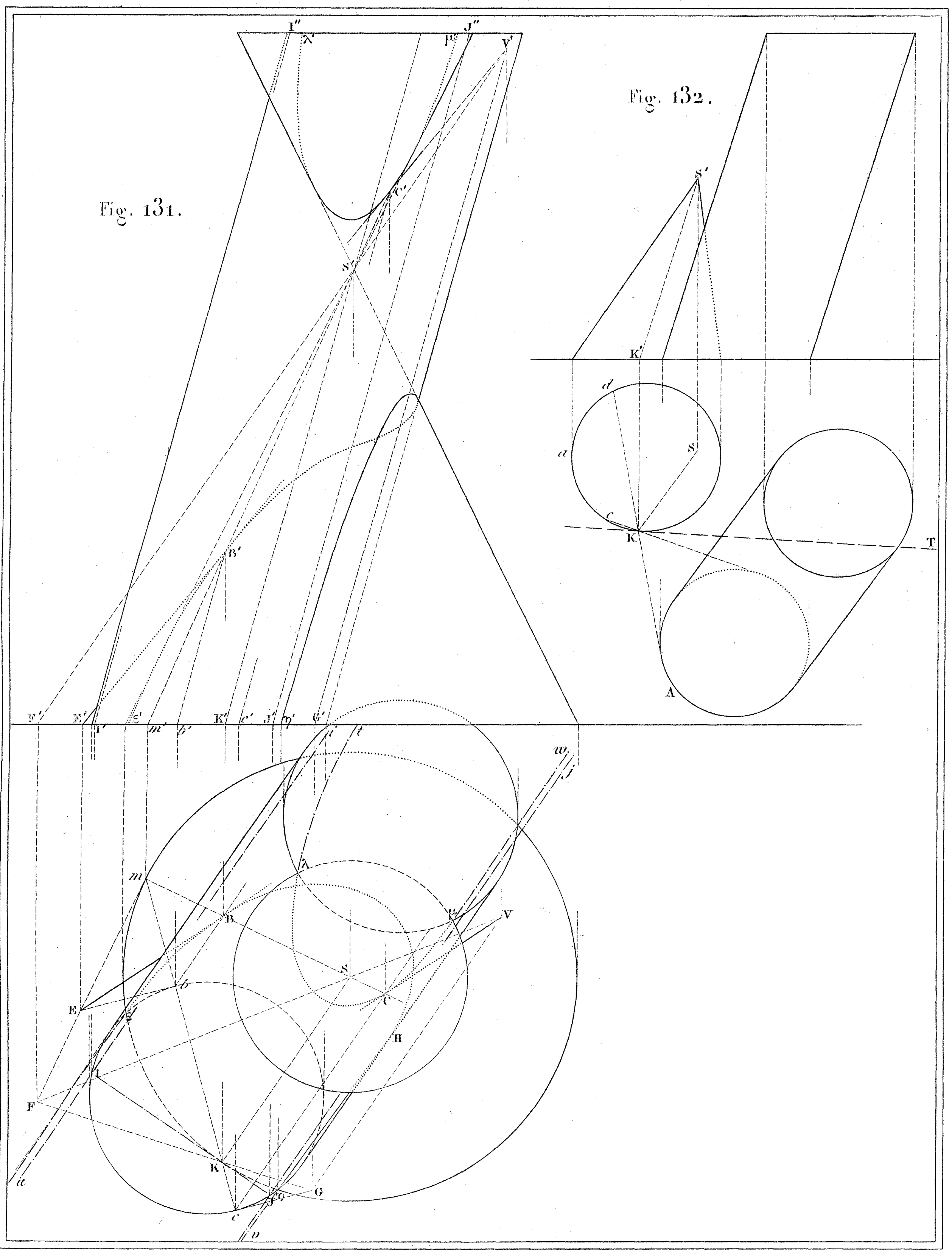

Fig. 117.
Q
T
M
T'
N'
N''
N
A
Fig. 118.
Q
T
M
T'
N
P
A
A
Fig. 119.
S
M
G
G''
N
G'
P
X
A'
M'
Y
B'
A
T
Fig. 120.
M
B
X1
B''
A''
M''
Y1
X
A'
M'
B'
Y
Y1
Fig. 121.
T
B
A
M
A''
B''
M''
X1
m'
j
n'
A
m1'
Fig. 122.
X
Y
i
n
e
B
m
n1
M1
Q
Fig. 123.
N
T
m
T'
n
B
A
P
M

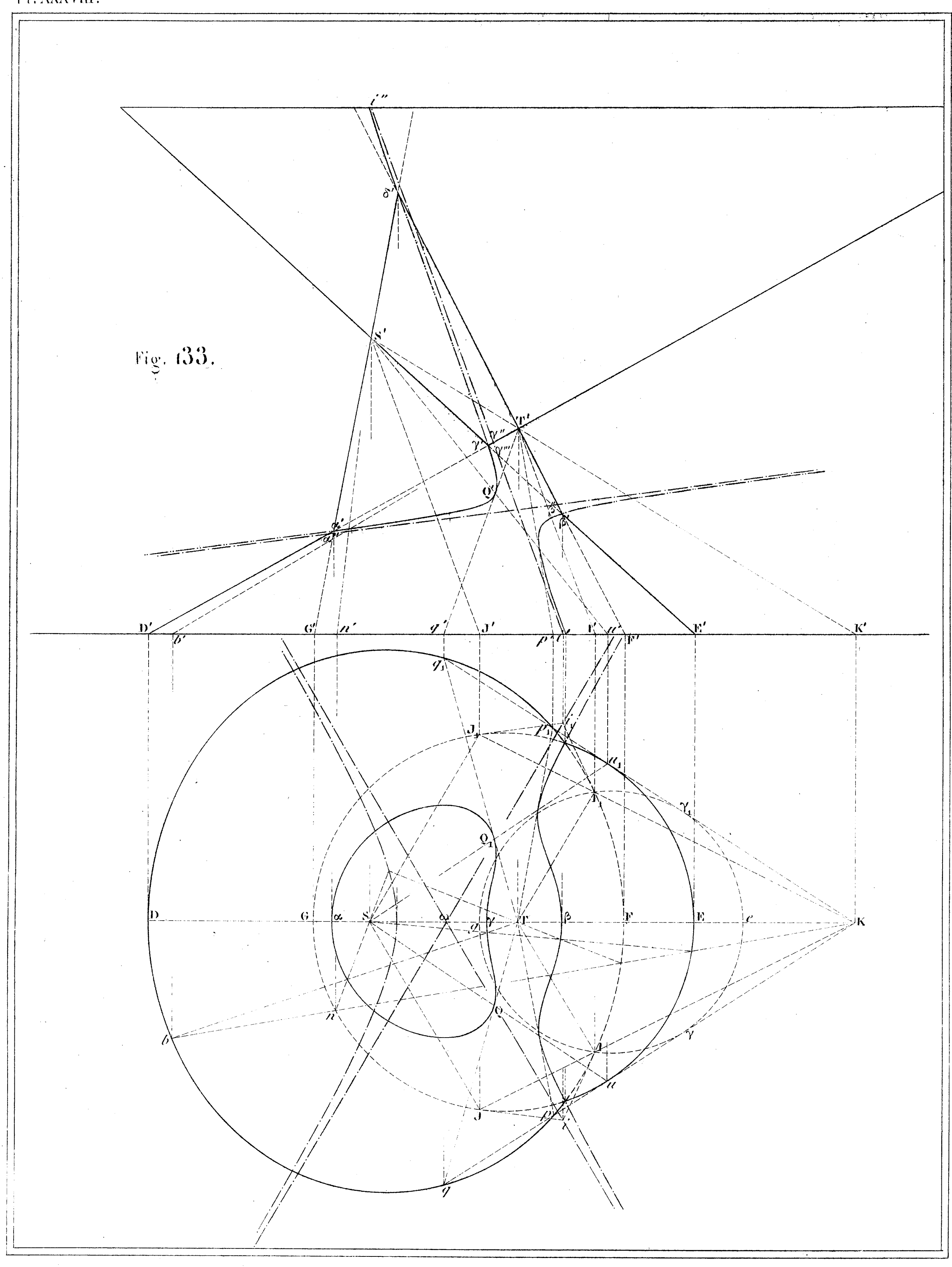

Fig. 124.
Fig. 125.

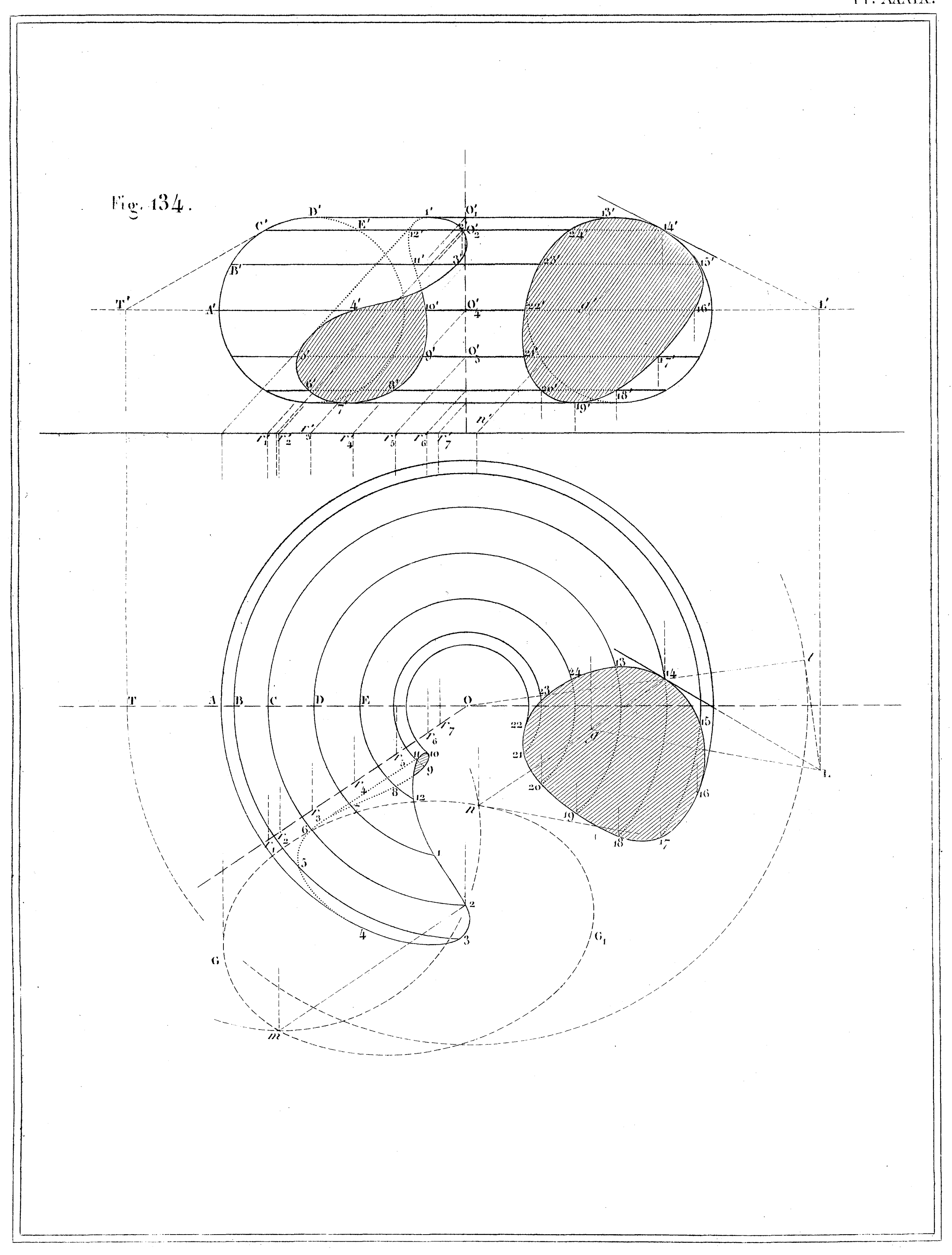

Fig. 126.
Fig. 127.

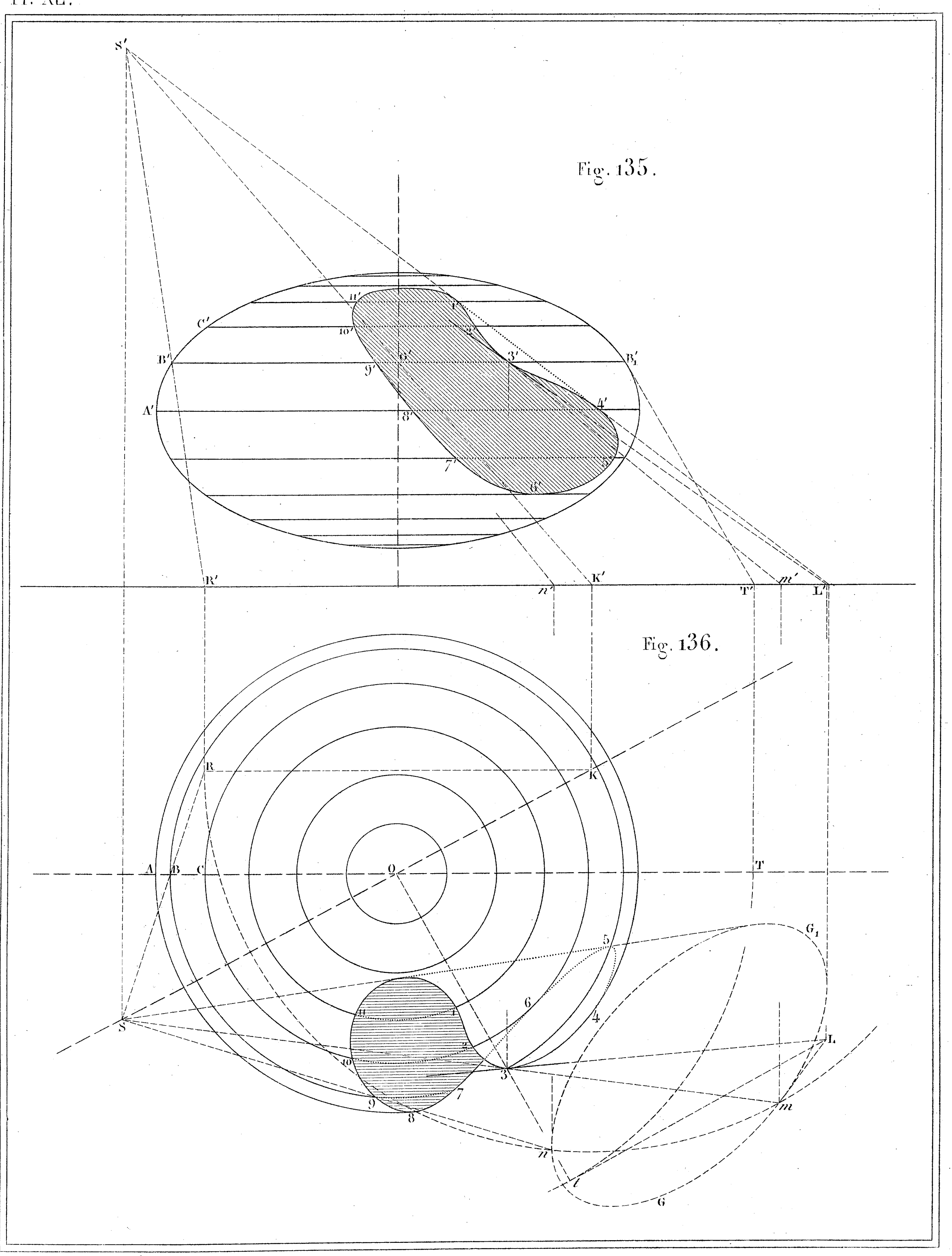

Fig. 128.
Fig. 129.

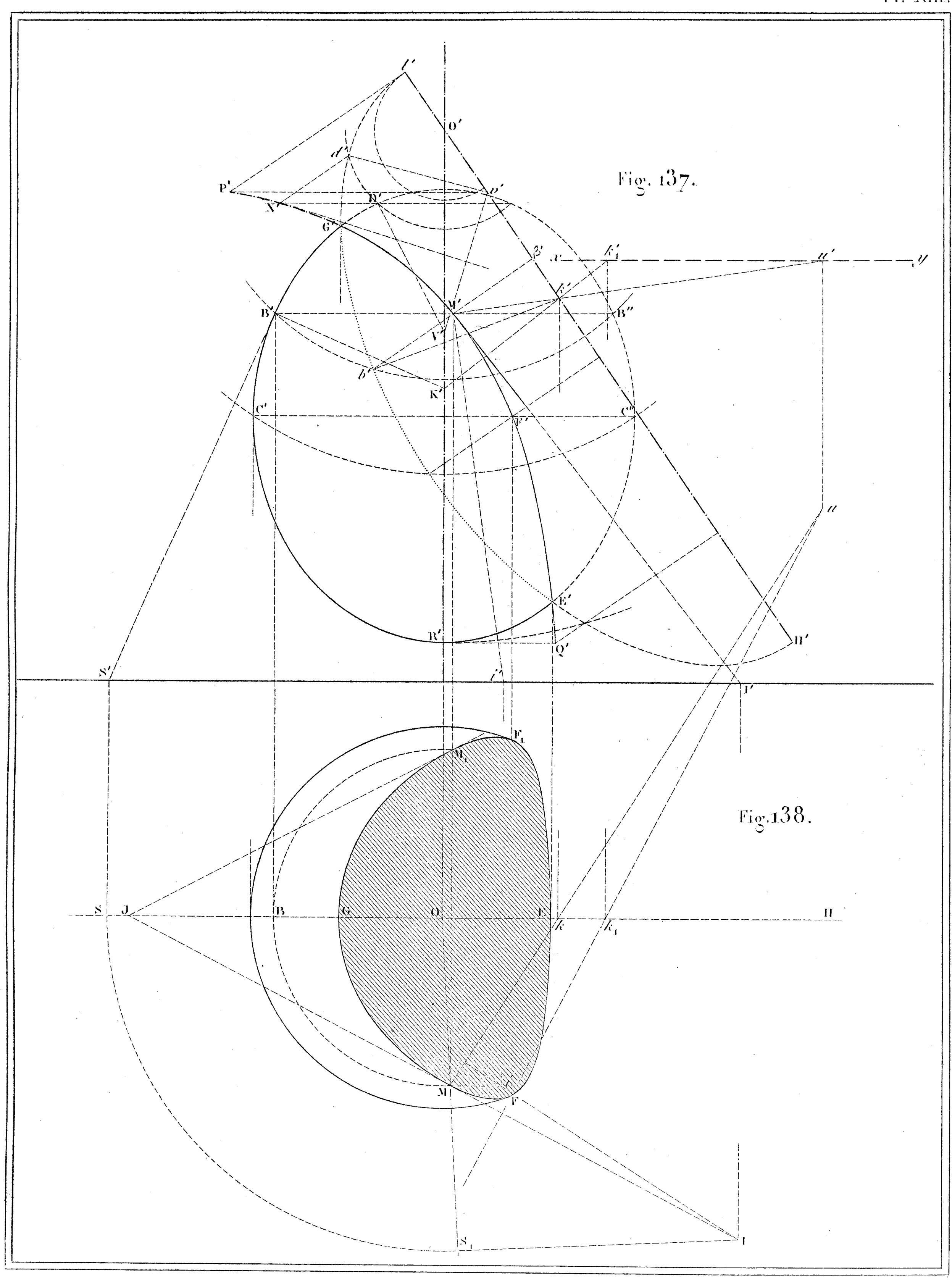

Fig. 130.

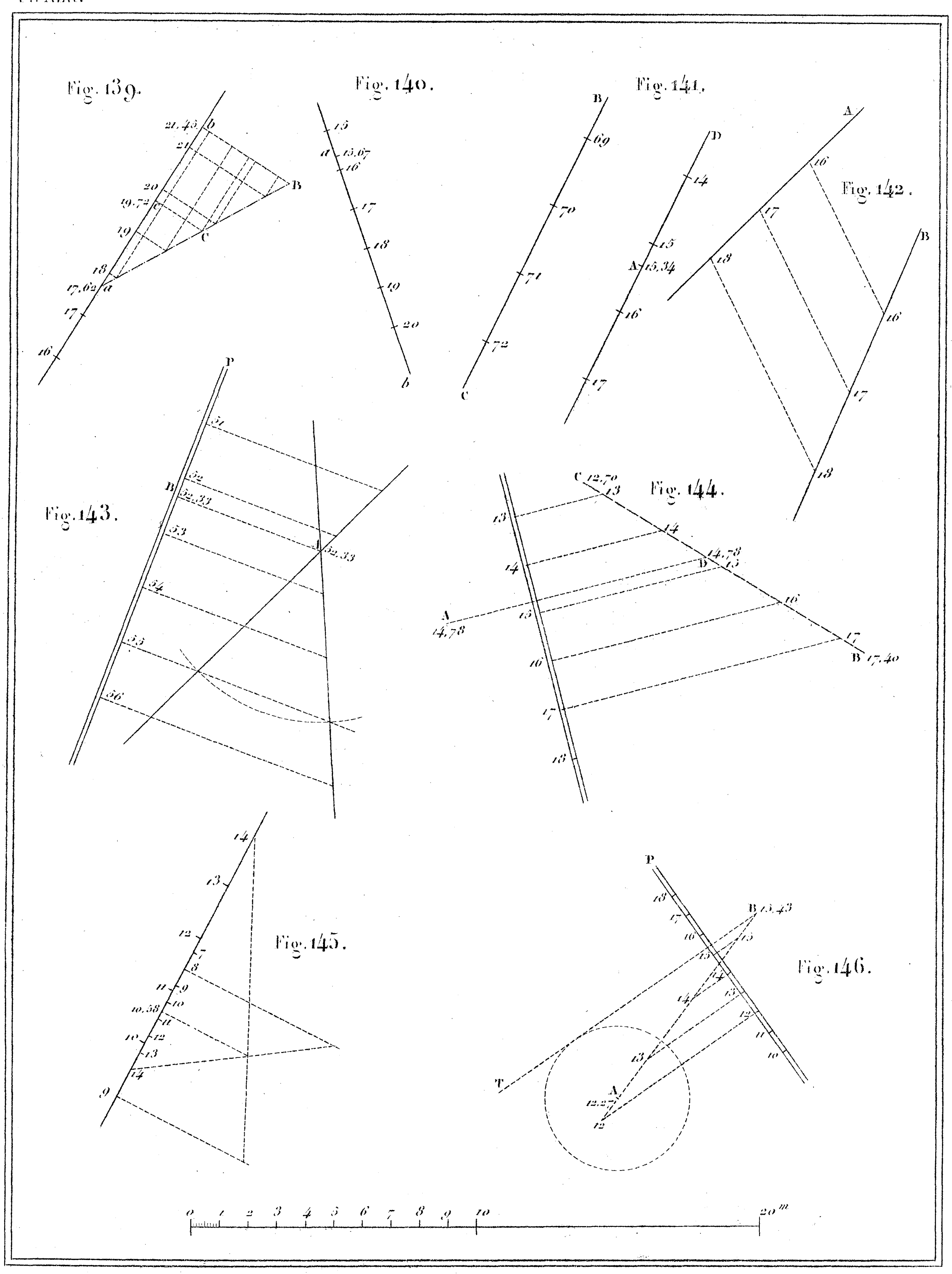

Fig. 131.
Fig. 132.


Fig. 133.
S'
T'
D'
G'
J'
E'
K'
D
G
S
T
F
E
K
J
q
b
n
O


Fig. 134.


Fig. 135.
S'
C'
B'
A'
B'1
11'
1'
10'
2'
9'
O'
3'
4'
8'
7'
5'
6'
R'
n'
K'
T'
m'
L'
Fig. 136.
R
K
A
B
C
O
T
G1
5
S
11
1
6
4
2
10
3
L
7
9
8
m
n
l
G


Fig. 137.
Fig. 138.


Fig. 139.
21,43 b
21
20
19,72 c
19
C
B
18
17,62 a
17
16
Fig. 140.
15
a 15,67
16
17
18
19
20
b
Fig. 141.
B
69
70
71
72
C
D
14
15
A 15,34
16
17
Fig. 142.
A
16
17
18
B
16
17
18
Fig. 143.
P
51
52
B 52,33
53
A 52,33
54
55
56
Fig. 144.
C 12,70
13
14
14,78
D 15
16
17
B 17,40
A
14,78
13
14
15
16
17
18
Fig. 145.
14
13
12
7
8
11 9
10,58 10
11
10 12
13
14
9
Fig. 146.
P
18
17
16
15
B 15,43
15
14
14
13
12
11
10
13
A
12,27
12
T
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
20 m

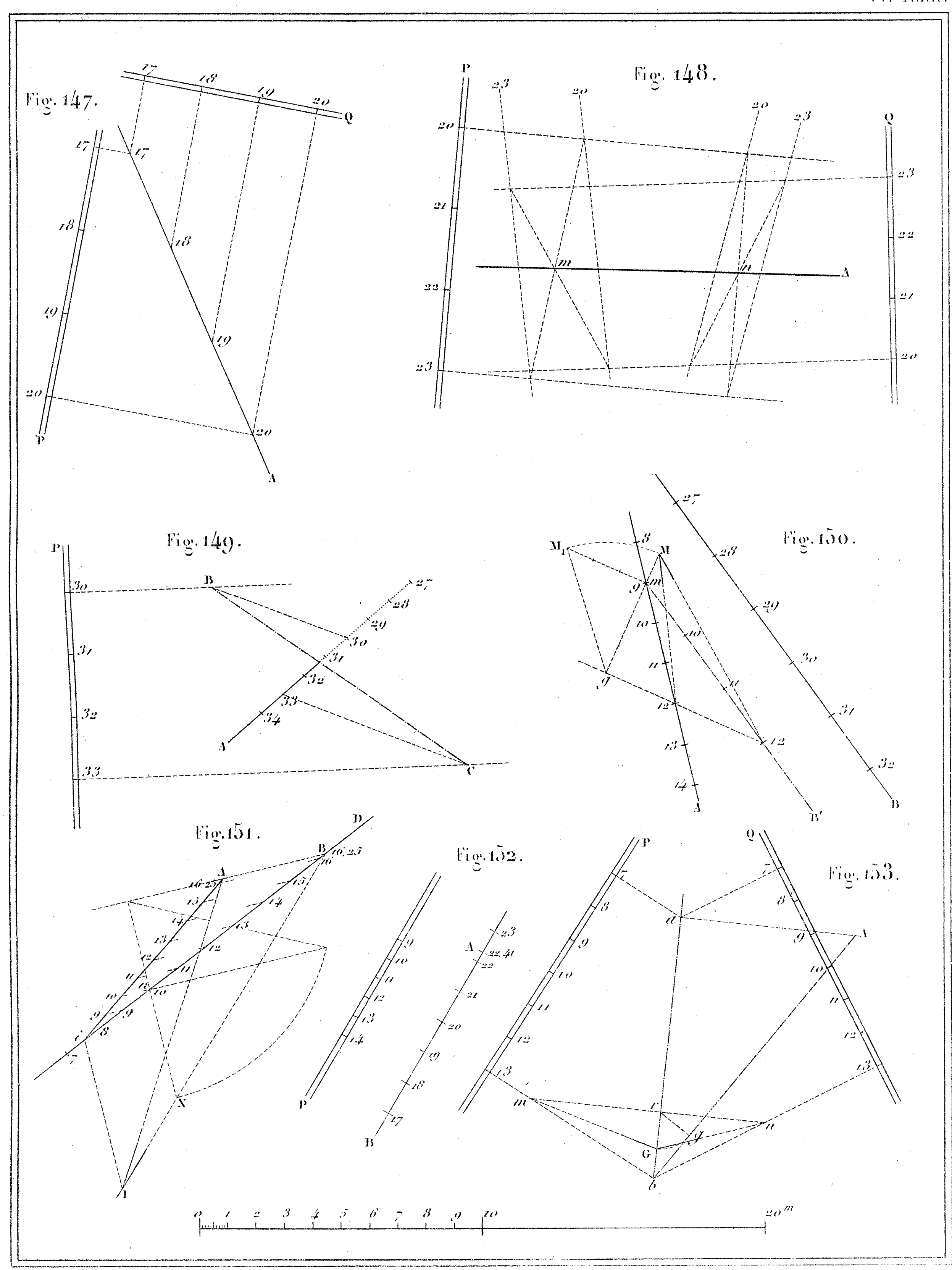


Fig. 147.
Fig. 148.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.
Fig. 153.
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 20m

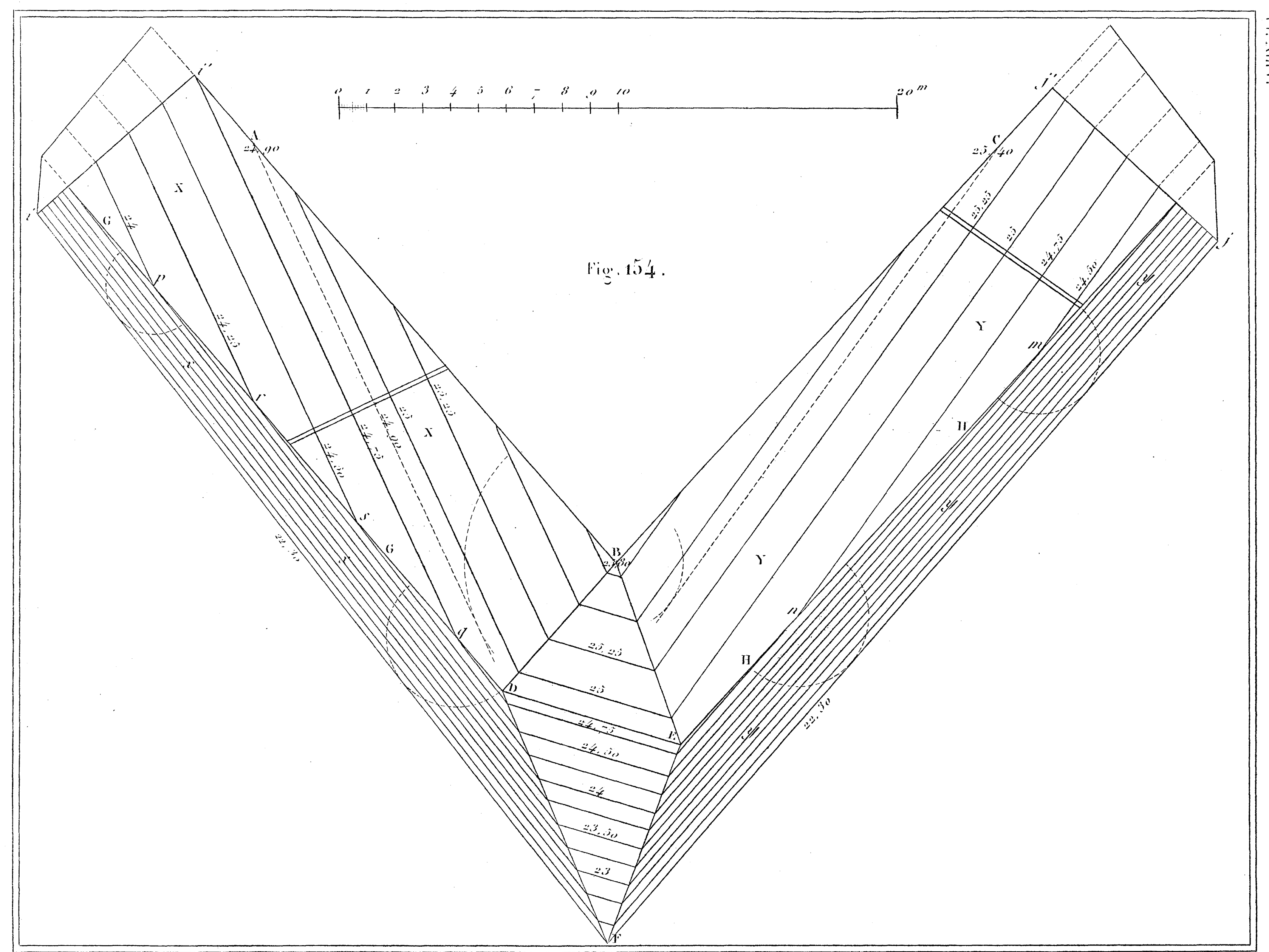
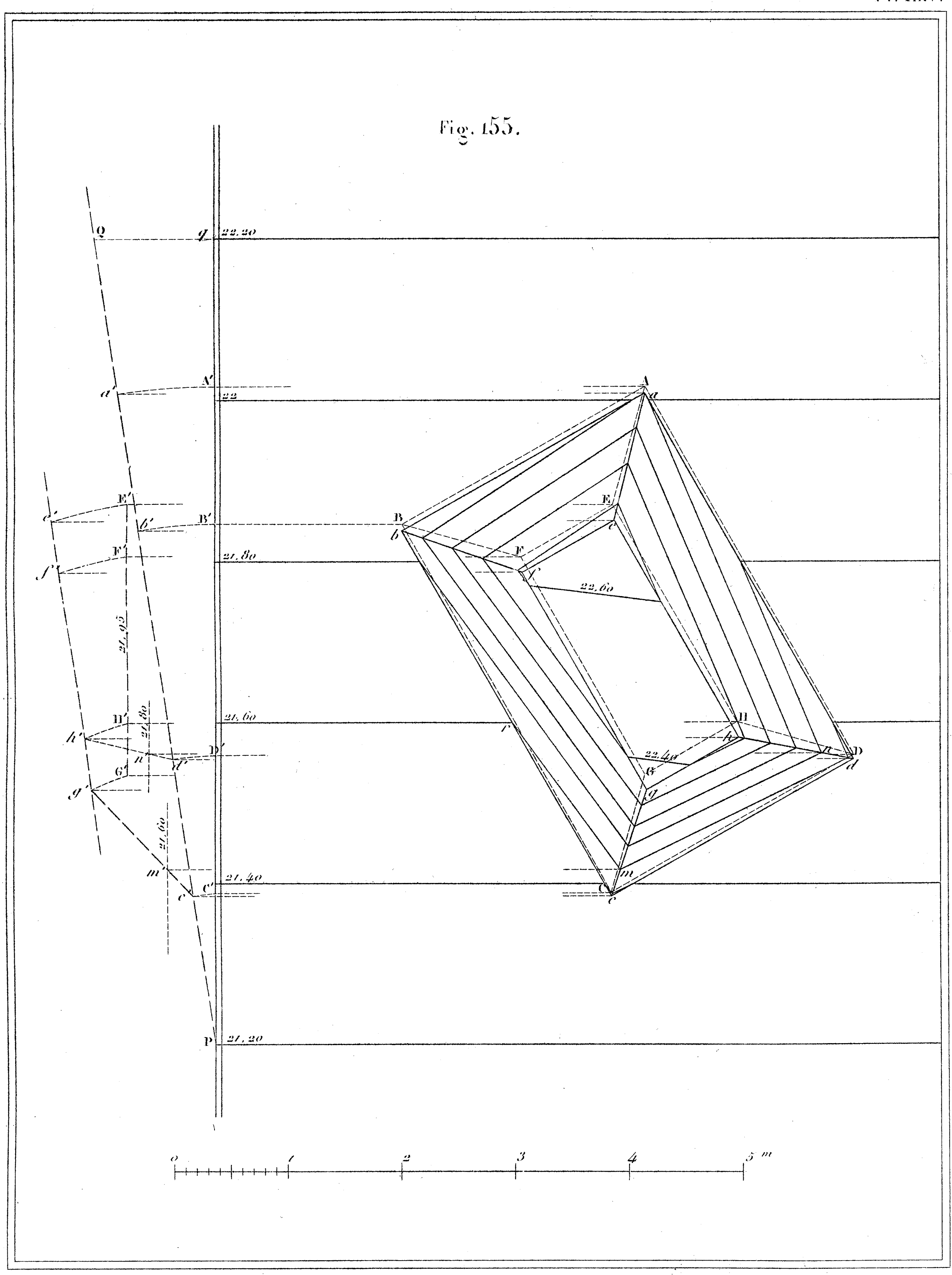
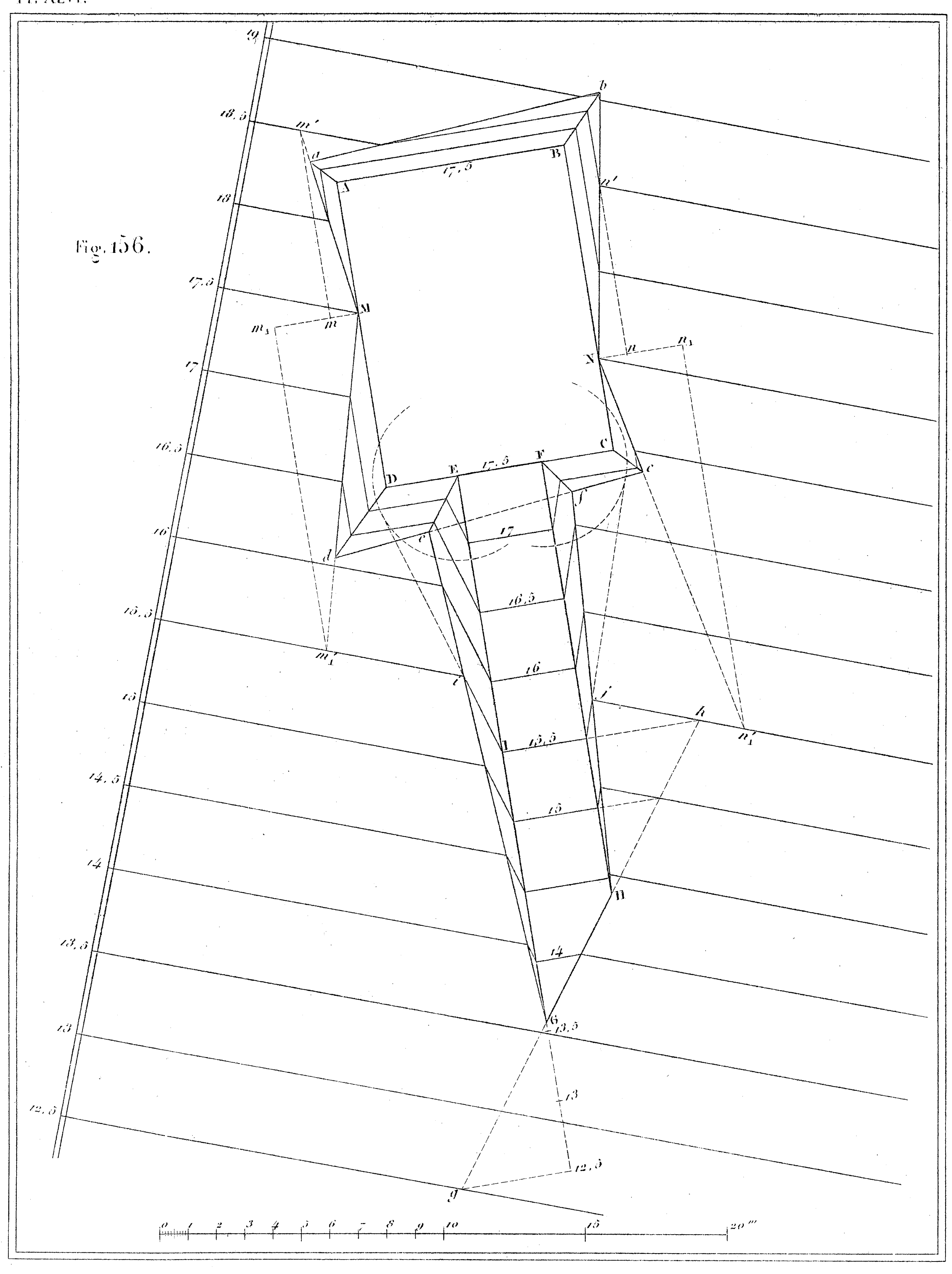
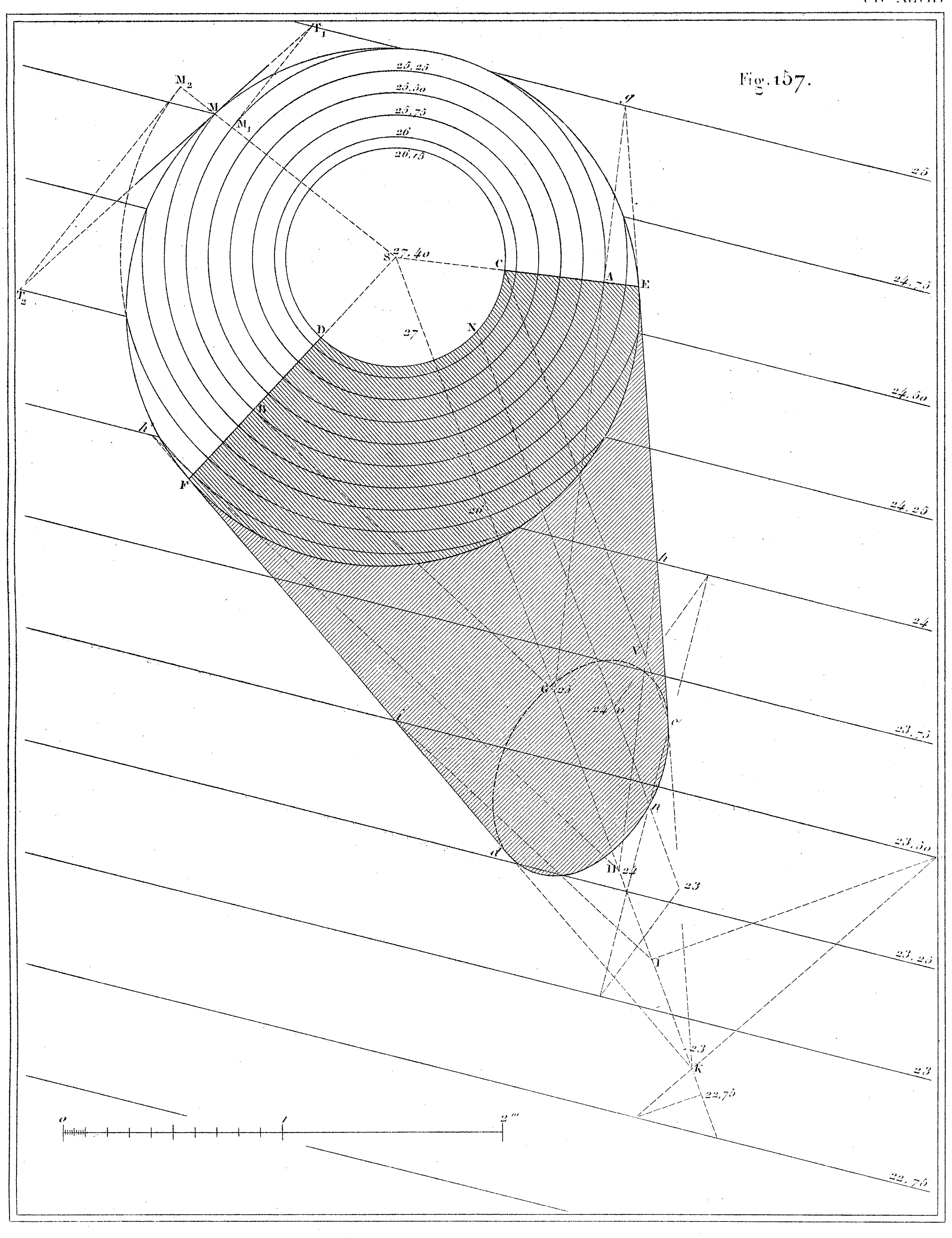

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 20m
A
24,90
B
C
25,40
D
E
F
X
Y
25,25
25
24,75
24,50
24
23,50
23
22,30

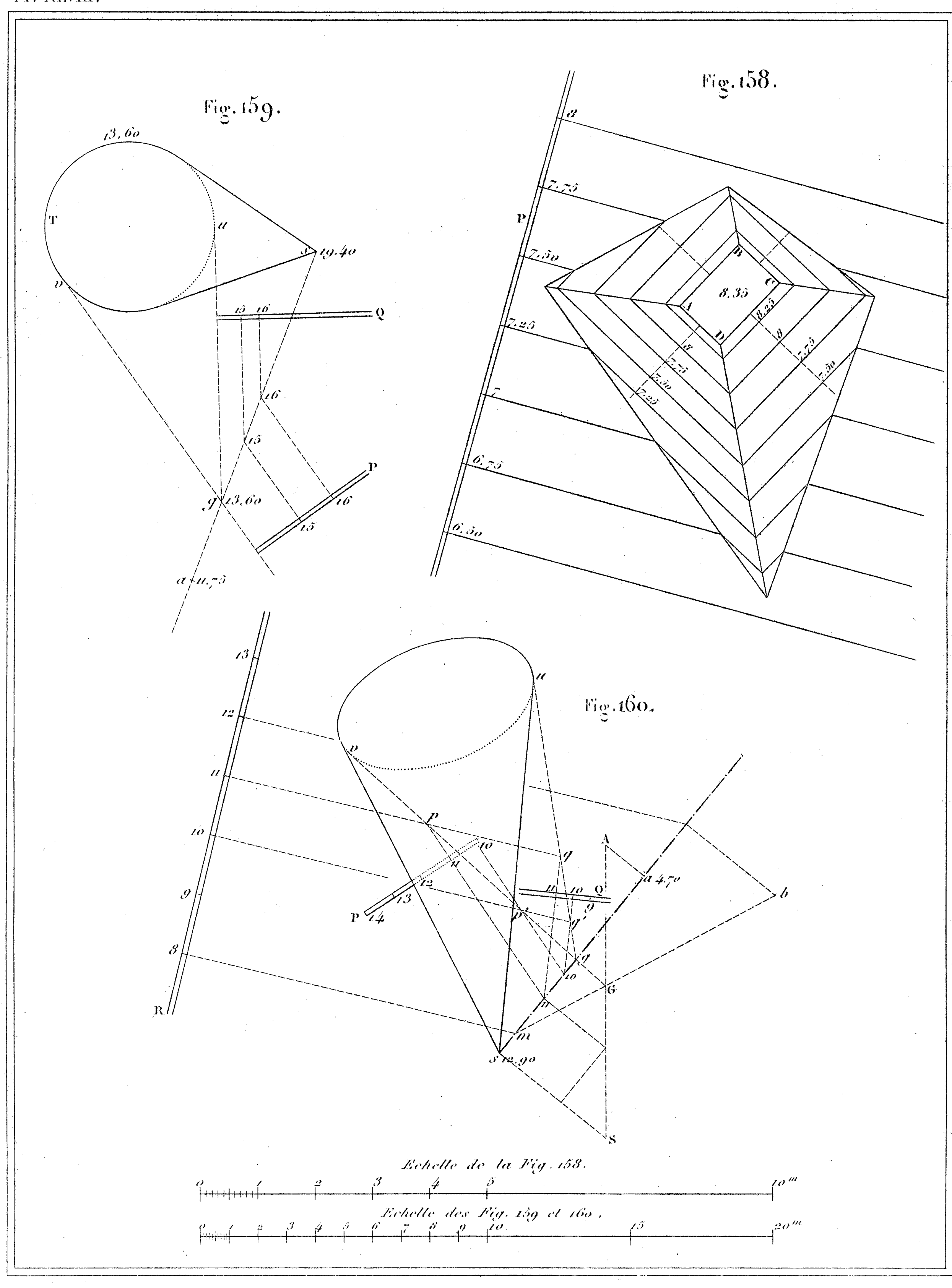
Fig. 154.

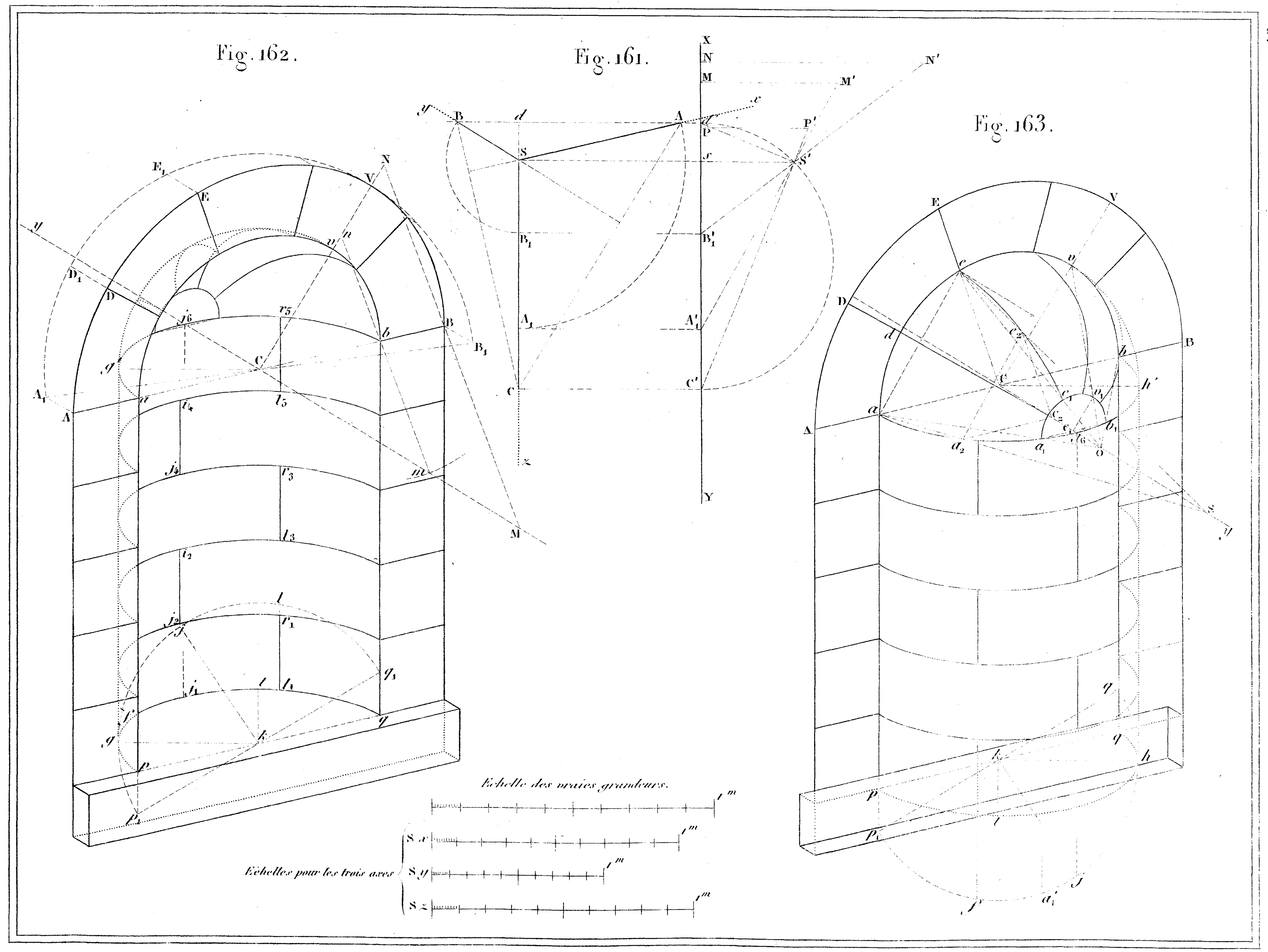

Fig. 155.
22.20
22
21.80
21.60
21.40
21.20
22.60
22.40
21.95
21.80
21.60
o
1
2
3
4
5 m

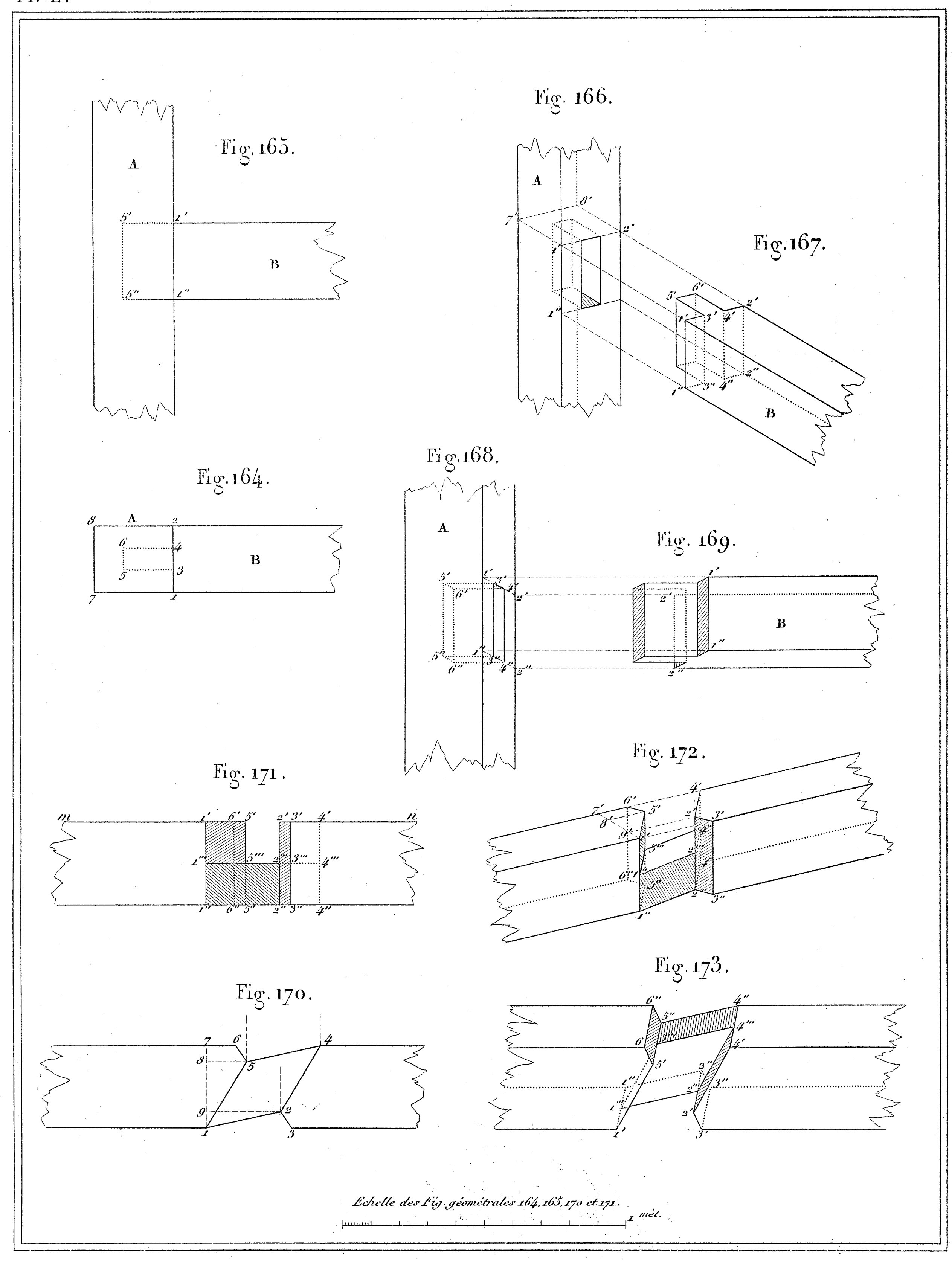
Pl. XLVI.

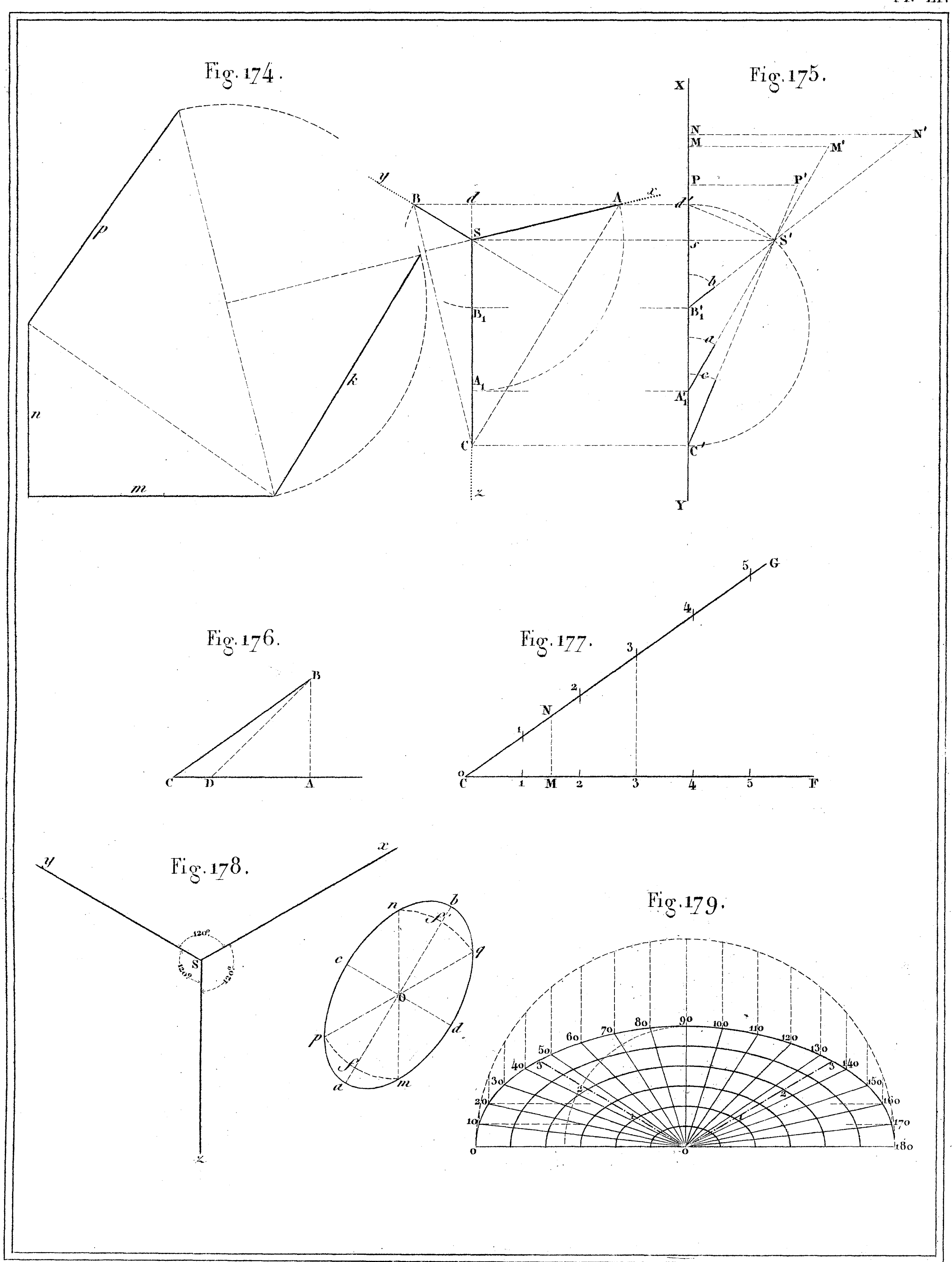

Fig. 156.
19
18.5
18
17.5
17
16.5
16
15.5
15
14.5
14
13.5
13
12.5
a
b
c
d
e
f
g
h
i
i'
m
m'
m₁
m'₁
n
n'
n₁
n'₁
A
B
C
D
E
F
G
H
I
M
N
17.5
17.5
17
16.5
16
15.5
15
14
13.5
13
12.5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 15 20m

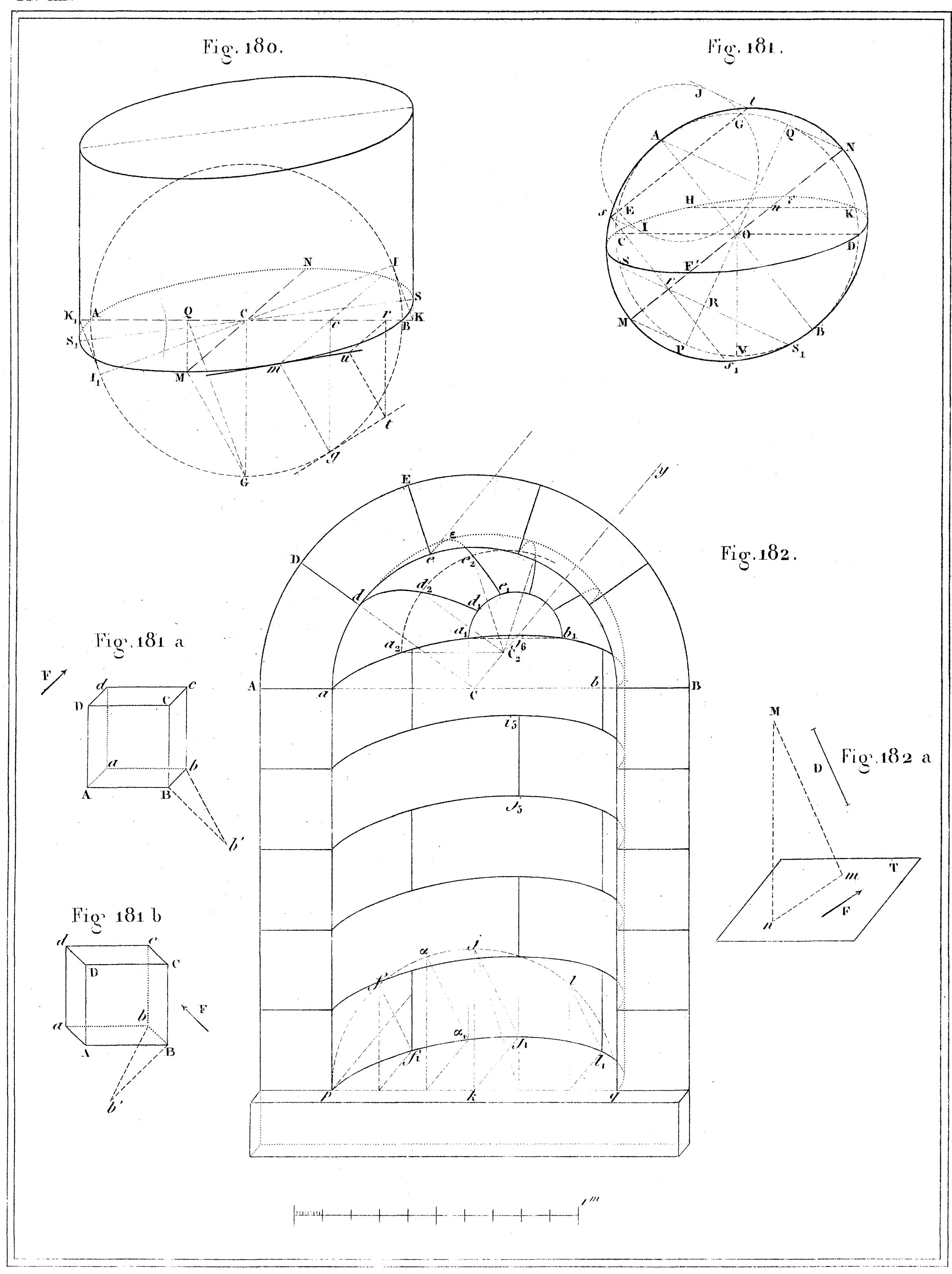

Fig. 157.
25
24.75
24.50
24.25
24
23.75
23.50
23.25
23
22.75
25.25
25.50
25.75
26
26.25
27.40
27
0
1
2 m

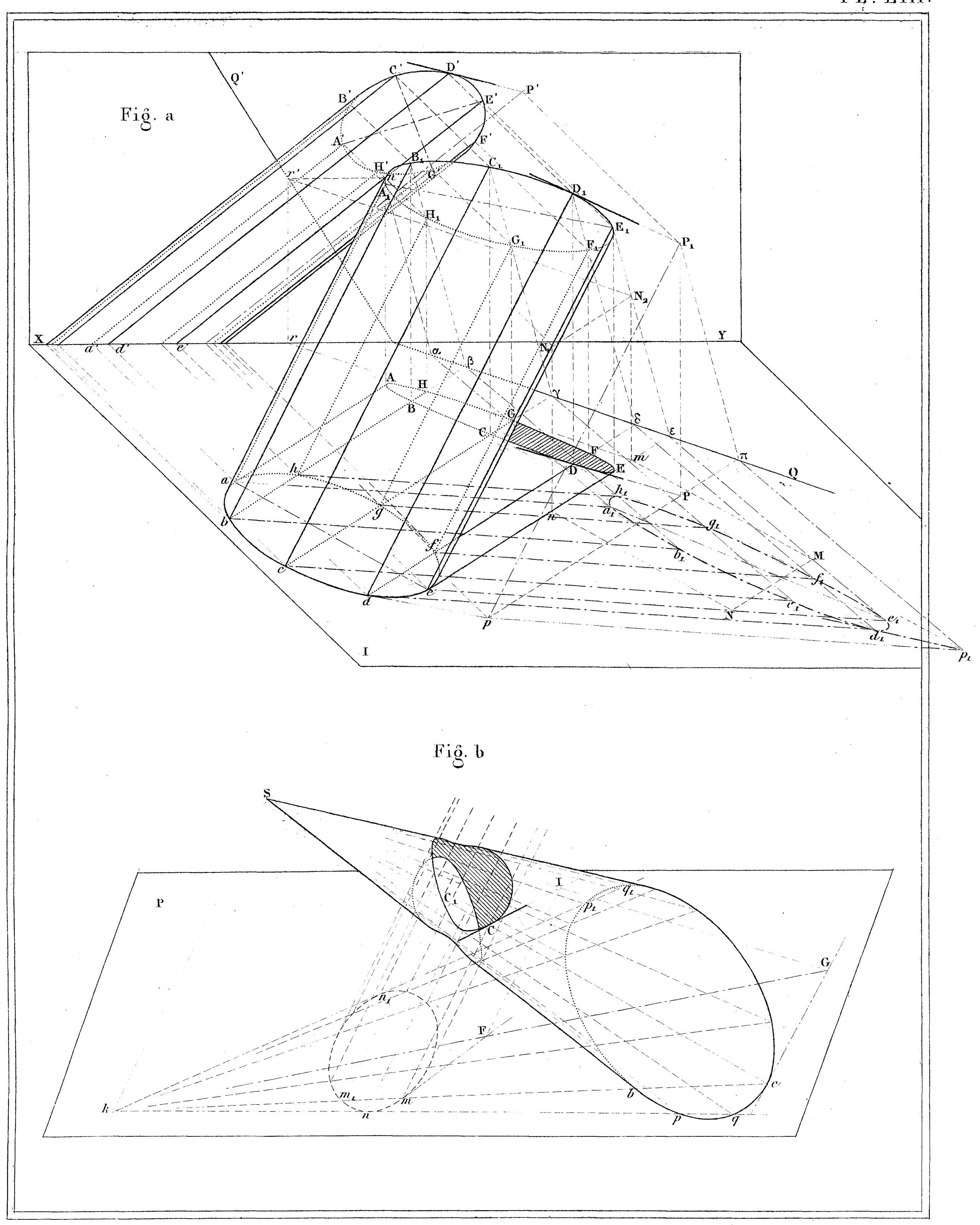

Fig. 159.
13,60
T
u
s 19.40
v
15 16
Q
16
15
P
q 13,60
16
15
a 11,75
Fig. 158.
8
7,75
P
7,50
7,25
7
6,75
6,50
B
C
8,35
A
D
8,25
8
7,75
7,50
8
7,75
7,50
7,25
Fig. 160.
13
12
11
10
9
8
R
u
v
p
10
11
12
13
P 14
q
A
a 4,70
b
11 10 Q
9
p'
q'
g
10
G
n
m
s 12,90
S
Echelle de la Fig. 158.
0 1 2 3 4 5 10m
Echelle des Fig. 159 et 160.
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 15 20m

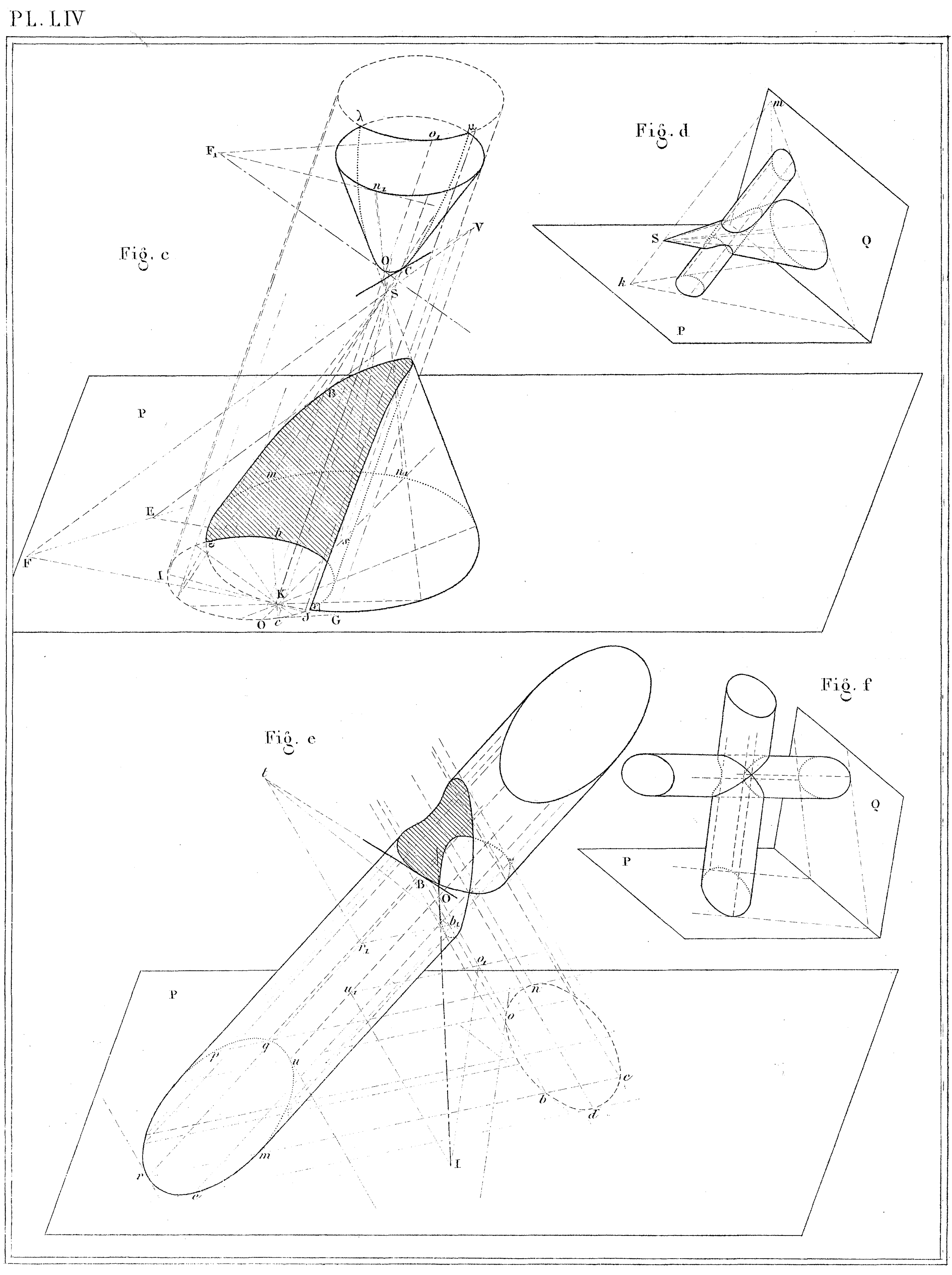

Fig. 162.
Fig. 161.
Fig. 163.
Échelle des vraies grandeurs.
Échelles pour les trois axes


Fig. 165.
A
B
Fig. 166.
A
Fig. 167.
B
Fig. 164.
A
B
Fig. 168.
A
Fig. 169.
B
Fig. 171.
m
n
Fig. 172.
Fig. 170.
Fig. 173.
Echelle des Fig. géométrales 164, 165, 170 et 171.
1 mèt.


Fig. 174.
p
k
n
m
Fig. 175.
X
N
M
N'
M'
P
P'
y
B
d
A
x
d'
S
s
S'
b
B₁
B'₁
a
A₁
c
A'₁
C
C'
z
Y
Fig. 176.
B
C
D
A
Fig. 177.
5
G
4
3
2
N
1
o
C
1
M
2
3
4
5
F
Fig. 178.
y
x
120°
S
120°
120°
z
n
b
f'
q
c
o
d
p
f
a
m
Fig. 179.
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
o


Fig. 180.
Fig. 181.
Fig. 182.
Fig. 181 a
Fig. 181 b
Fig. 182 a


Fig. a
Fig. b


Fig. c
Fig. d
Fig. e
Fig. f

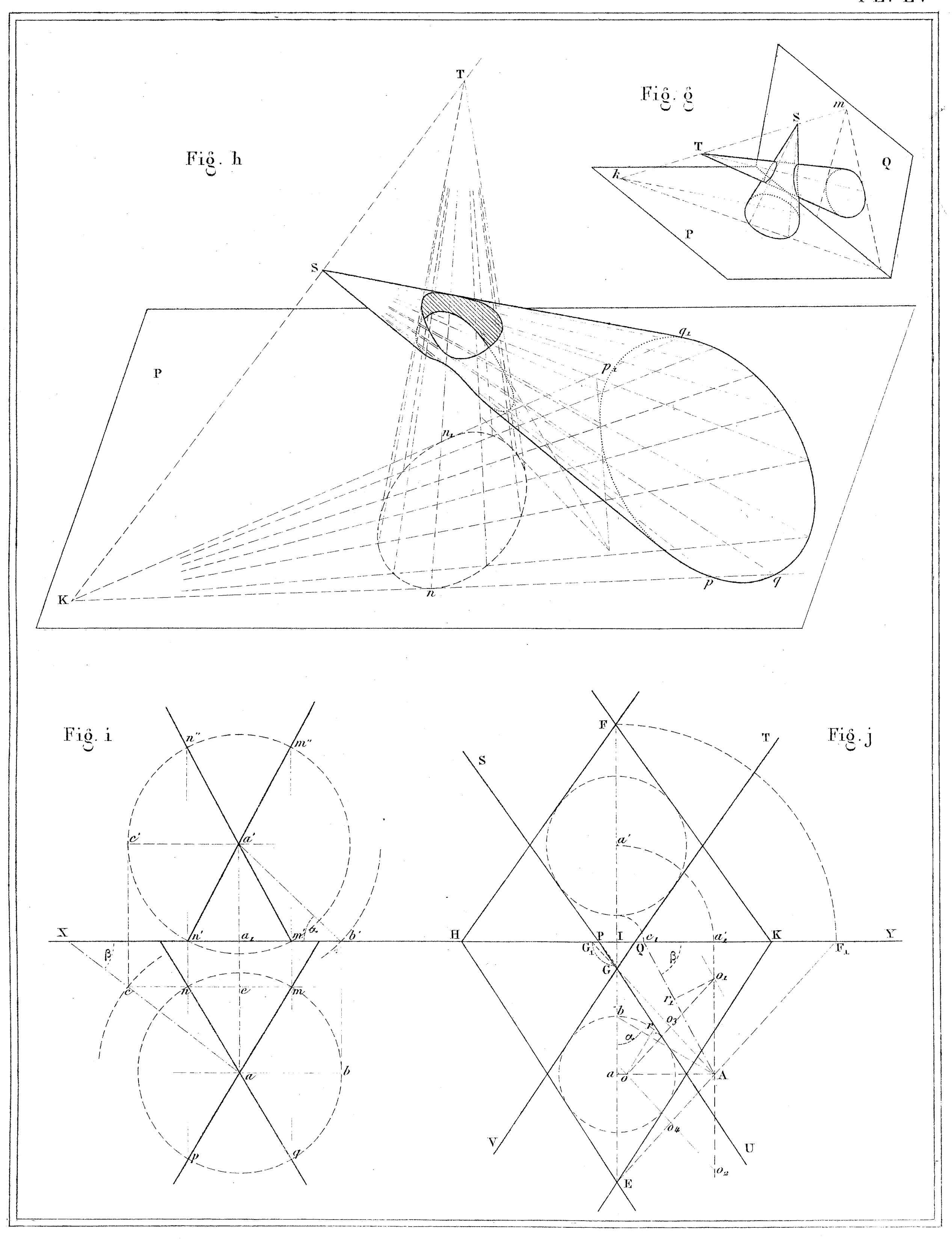


Fig. h
Fig. g
Fig. i
Fig. j
T
S
P
K
Q
m
k
n
p
q
X
Y
H
K
F
E
A
U
V

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

OUVRAGES DE L'AUTEUR.

DISCOURS sur l'art du Trait et la Géométrie descriptive .... 1 fr. 25 c.

TRAITÉ DE PERSPECTIVE, contenant les Tracés pour les Tableaux plans et courbes, les Bas-Reliefs et les Décorations théâtrales, avec une Théorie des effets de perspective; 1 vol. in-4°, avec atlas in-folio de 45 planches, dont 8 doubles.. 40 fr.

RECHERCHES sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques.............................. 4 fr.

MÉMOIRE sur l'appareil de l'arche biaise, suivi d'une analyse des principaux Ouvrages publiés sur cette question et d'une réponse à des critiques sur l'enseignement de la Stéréotomie à l'École Polytechnique. (Extrait des *Annales du Conservatoire des Arts et Métiers*.)............................ 2 fr.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

PAR JULES DE LA GOURNERIE,

MEMBRE DE L'INSTITUT, INSPECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES,
EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Les Mathématiques ont des inventions très subtiles, et qui peuvent beaucoup servir tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et diminuer le travail des hommes.

DESCARTES (*Discours de la Méthode*).

SECONDE ÉDITION.

DEUXIÈME PARTIE. — TEXTE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1880

SOMMAIRE DES PREMIÈRE ET TROISIÈME PARTIES

DU TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PREMIÈRE PARTIE.

(52 planches. — Prix : 10 francs.)

TROISIÈME PARTIE.

(46 planches. — Prix : 10 francs.)

AVANT-PROPOS.

Je présente au public une seconde édition de la Partie de mon *Traité de Géométrie descriptive* qui contient les Livres V, VI et VII, relatifs à la détermination des ombres linéaires dans les différents modes de projection, aux surfaces développables et aux surfaces gauches.

J'ai supprimé quelques développements de peu d'intérêt et j'ai modifié un grand nombre de passages, cherchant à rendre l'exposition plus méthodique et plus claire.

Dans ce travail j'ai eu particulièrement égard à des observations qui m'avaient été transmises par M. Ernest Lebon, professeur de l'Université, connu par ses travaux en Géométrie descriptive. Je suis heureux de lui adresser ici mes remercîments.

Paris, 7 octobre 1879.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE V.

OMBRES LINÉAIRES.

CHAPITRE PREMIER.

OMBRES SUR LES FIGURES GÉOMÉTRALES.

CHAPITRE II.

OMBRES SUR LES FIGURES AXONOMÉTRIQUES ET CAVALIÈRES.

CHAPITRE III.

TRANSFORMATION HOMOLOGIQUE.

HAPITRE IV.

POINTS BRILLANTS.

LIVRE VI.

SURFACES DÉVELOPPABLES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

CHAPITRE II.

SURFACES D'OMBRE ET DE PÉNOMBRE.

CHAPITRE III.

SURFACES D'ÉGALE PENTE.

LIVRE VII.

SURFACES GAUCHES.

CHAPITRE PREMIER.

PARABOLOÏDE.

CHAPITRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES GAUCHES.

CHAPITRE III.

CONOIDE.

CHAPITRE IV.

HYPERBOLOÏDE.

CHAPITRE V.

SURFACES DONT LES GÉNÉRATRICES NE SONT PAS PARALLÈLES A UN MÊME PLAN.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

LIVRE CINQUIÈME.

OMBRES LINÉAIRES.

CHAPITRE PREMIER.

OMBRES SUR LES FIGURES GÉOMÉTRALES.

Considérations générales.

320. Souvent, pour mieux faire comprendre la forme des objets représentés par des figures géométrales, on les suppose éclairés et l'on indique leurs ombres. On adopte généralement pour la direction des rayons de lumière une convention que nous ferons connaître (art. **374**).

Quelquefois aussi on construit les ombres sur des figures géométrales pour les reporter sur un tableau, car, dans quelques circonstances, cette méthode indirecte est plus simple que les tracés ordinaires de la perspective. On suppose alors les rayons divergents ou parallèles, suivant les convenances du sujet.

Les problèmes d'ombre ne présentent le plus souvent que des questions de plans tangents et d'intersection de surfaces. Nous en avons résolu quelques-uns dans la première Partie de ce Traité (art. **132** et **289**).

Polyèdres.

321. Pour un polyèdre, on recherche d'abord quelles sont les faces obscures; généralement on les distingue sans difficulté. Lorsqu'on a quelque incertitude, on coupe le corps par des plans passant par le point lumineux ou parallèles

aux rayons, et l'on voit comment la lumière est distribuée dans chaque section.

Quand on a ainsi déterminé les *ombres propres,* on fait passer des plans par le point lumineux et par les diverses arêtes qui séparent les faces éclairées de celles qui sont obscures; l'intersection de ces *plans d'ombre* avec les surfaces des corps voisins fait connaître le périmètre de l'*ombre portée.*

I[er] EXERCICE. — *Ombres d'un prisme et d'une pyramide.* (*Fig.* 183.)

322. On propose de déterminer les ombres propres d'un prisme vertical et d'une pyramide, et leurs ombres portées sur les plans de projection qui représentent le sol et le parement d'un mur. Les rayons de lumière sont parallèles à une droite donnée (Ss, S's').

On voit tout d'abord, d'après la direction des rayons, que les faces verticales AB et AD du prisme et sa base supérieure B'D' sont éclairées. La ligne brisée formée par les droites (D, D''D'), (DC, D'C'), (CB, C'B'), (B, B'B'') sépare donc la partie éclairée de celle qui est obscure. Pour avoir l'ombre portée du prisme, nous allons chercher l'intersection des plans d'ombre de ces arêtes avec la surface horizontale du sol et avec la face exposée de la pyramide.

Les plans d'ombre des arêtes verticales (B, B''B') et (D, D''D') sont verticaux; leurs traces Bp et Dr parallèles à Ss limitent l'ombre du prisme sur le plan horizontal. Pour avoir les projections verticales de leurs intersections avec la face (EGI, E'G'I') de la pyramide, nous remarquons que le plan passant par l'arête (C, C''C'), et parallèle aux rayons de lumière, coupe les droites (EG, E'G') et (EI, E'I') aux points (q, q') et (k, k'); par conséquent, si nous menons par les points p' et r', projections verticales de p et de r, des parallèles à $q'k'$, nous aurons les projections verticales cherchées. Il faut les terminer aux points b' et d', où elles sont rencontrées par les projections des rayons qui passent aux extrémités B' et D' des arêtes. On détermine de la même manière l'ombre c' du sommet (C, C'), et l'on ramène ces divers points sur les lignes Bp, Dr, Cq du plan horizontal.

323. Le rayon de lumière qui passe par le sommet (I, I') de la pyramide a sa trace horizontale en i et sa trace verticale en j'. Par suite, les plans d'ombre des arêtes (IE, I'E'), (IG, I'G') ont pour traces horizontales les droites Ei et Gi; leurs traces verticales sont uj' et vj'. On obtient ainsi les limites de l'ombre reçue par le plan horizontal, et par le plan vertical.

Les faces (IEF, I'E'F') et (IGF, I'G'F') sont dans l'ombre. Les trois faces de la pyramide seraient éclairées, si la trace i du rayon qui passe par le sommet était dans l'intérieur de la base FEG.

II[e] EXERCICE. — *Ombres d'un perron.* (*Fig.* 185.)

324. On propose de déterminer les ombres d'un perron éclairé par des rayons parallèles à une droite donnée (S*s*, S'*s'*).

Le plan et l'élévation n'indiquent pas complétement les dispositions du perron, et nous aurions ajouté une coupe transversale, si une perspective cavalière, dont nous nous occuperons plus loin (*fig.* 186), ne levait pas toute incertitude.

Les arêtes projetées horizontalement sur GB séparent les faces éclairées du *rampant* de celles qui sont obscures. Ces arêtes sont (B, B''B'), (BF, B'), (FH, B'G') et (HG, G'). Le plan d'ombre de la première est vertical, et toutes les lignes d'ombre qu'il détermine se confondent, en projection horizontale, avec sa trace B*p* parallèle à S*s*. Il est facile de déterminer sur les plans horizontaux des différentes marches les traces du rayon qui passe par le point le plus élevé (B, B') de l'arête. L'une d'elles *p* est sur le giron (¹) d'une marche : c'est le point où le rayon rencontre la surface de l'escalier, et l'extrémité de la ligne d'ombre B*mn*.

Le même plan d'ombre coupe les plans verticaux des marches, suivant des verticales qui correspondent aux points *m* et *n*. Il est inutile de dire que l'ombre du point (B, B') aurait pu se trouver sur un de ces plans verticaux.

La seconde arête (BF, B') est perpendiculaire au plan vertical; son plan d'ombre coupe le plan horizontal de la troisième marche suivant la droite pp_1 parallèle à BF, et le plan vertical de la quatrième marche suivant la ligne *p'*B' parallèle à S'*s'*. L'extrémité *q'* de la partie utile est la trace sur ce dernier plan du rayon (F*q*, B'*q'*).

L'extrémité inférieure (F, B') de la troisième arête (FH, B'G') est dans le plan horizontal de la dernière marche; le rayon passant par l'extrémité supérieure (H, G') perce ce plan au point *h* : la trace du plan d'ombre est donc F*uvh*. Le rayon (H*h*, G'*h'*) rencontre le plan horizontal de la marche précédente au point h_1, et par suite la droite $h_1 ti$ parallèle à *hu*F est la trace du même plan d'ombre sur le plan horizontal de l'avant-dernière marche. En relevant les points *i*, *t*, *u*, *v* en *i'*, *t'*, *u'*, *v'*, et déterminant la trace *j'*, sur le plan vertical XY, du rayon qui passe par le point (H, G'), on a les extrémités des lignes d'ombre *q'i'*, *t'u'* et *v'j'* : ces trois droites doivent être parallèles.

Le plan d'ombre de la quatrième arête (HG, G') est perpendiculaire au plan vertical, et par suite les lignes de l'ombre portée sont projetées sur sa trace G'*j'* parallèle à S'*s'*.

La détermination des ombres portées par les arêtes de la porte, et par celles qui se projettent horizontalement sur la droite AD, ne présente pas de difficultés.

(¹) Le *giron* d'une marche est la face sur laquelle on pose le pied.

IIIe EXERCICE. — *Ombres d'une maison.* (*Pl. IV et V.*)

325. On propose de déterminer les ombres d'une maison donnée par un plan et une élévation (*fig.* 188 et 189). Les rayons de lumière sont parallèles à la droite (Ss, $S's'$).

Nous construisons d'abord une projection auxiliaire sur un plan perpendiculaire aux deux premiers (*fig.* 190). Pour avoir la nouvelle projection S'_1s' du rayon, il suffit de prendre sur l'horizontale du point S' une longueur $s''S'_1$ égale à ss_1 (art. **34**).

Chacun des plans qui reçoivent l'ombre est perpendiculaire à l'un des trois plans de projection, et par suite on détermine facilement le point où il est rencontré par un rayon de lumière.

326. La construction de l'ombre sur le sol présente peu de difficultés. Nous avons représenté sur la *fig.* 195, faite à une échelle triple, quelques détails qui présentent de l'intérêt.

Les droites j_1j et i_1i parallèles à Ss sont les ombres des arêtes verticales J'_1J' et I'_1I'. L'ombre de l'horizontale $J'_1\alpha'$ est la parallèle à cette droite menée par le point j_1, de sorte que le rayon de lumière qui arrive au point i_2 rencontre les arêtes I'_1I' et $J'_1\alpha'$ en des points I'_2 et V. Le segment VJ'_1 porte ombre sur le sol, et le reste de l'arête $\alpha'J'_1$ sur le plan vertical $I'I'_1\beta'_1$ qui forme le *larmier;* elle y dessine une horizontale qui a son origine au point I'_2.

Des dispositions analogues, et qui par conséquent n'ont pas besoin d'être analysées, se présentent pour les ombres des arêtes $I'_1\beta'_1$ et $L'_1\gamma'$.

Si l'on veut avoir les ombres de la façade sans recourir à celles qui sont portées sur le sol, on tracera une droite $\alpha\beta\gamma\delta$ parallèle à Ss, et l'on étudiera la disposition des rayons de lumière dans le plan vertical dont cette ligne est la trace; on obtient sans difficulté les ombres β', δ' et δ'_1 des points (α, α'), (β, β'_1) et (γ, γ').

327. Le plan d'ombre de l'arête (ll_1, l') de la cheminée rectangulaire (*fig.* 188 et 189) a pour trace sur le plan vertical de projection qui lui est perpendiculaire la droite $l'g'e'$; il rencontre la droite (AB, $A'B'$), faîte de la maison, au point (g, g'), et le plan voisin des toits des fenêtres le long de la droite (ee_1, e'). On opère d'une manière analogue pour les autres plans d'ombre de la cheminée.

Pour déterminer l'ombre des fenêtres sur le toit, il faut recourir à la *fig.* 190.

Cylindre, cône et sphère.

Ier EXERCICE. — *Ombre d'une cheminée ronde.* (*Pl. V.*)

328. Les lignes qui limitent l'ombre propre sur les cylindres et sur les cônes sont les génératrices de contact des plans tangents parallèles aux rayons de lumière (art. **132**). En général, on détermine très-facilement ces droites.

La maison représentée sur la *Pl. IV* a une cheminée cylindrique dont les ombres ont été construites sur les *fig.* 191, 192 et 193, qui sont à une échelle triple de celles de la *Pl. IV*.

La droite HC, parallèle à Ss et tangente à la base du cylindre de la cheminée, est la trace de l'un de ses plans d'ombre. Les projections verticales c'C′ (*fig.* 192) et c''C″ (*fig.* 193) du rayon extrême contenu dans ce plan passent par les points c' et c'', qui correspondent à c; sa trace C″ sur le plan B″R″ fait trouver le point (C, C′) où se termine la ligne d'ombre (HC, H′C′). La génératrice de contact $H'H'_1$ prolongée jusqu'au rayon c'C′ est une ligne d'ombre propre de la cheminée. On détermine de la même manière la trace (LD, L′D′) de l'autre plan d'ombre sur le toit, et la ligne d'ombre propre (L, $L'L'_1$).

On obtient facilement l'ombre (β, β') portée par un point (α, α') du cercle inférieur du couronnement sur le cylindre de la cheminée; la courbe lieu des points β' s'étend de L'_1 à H'_1. Le rayon c'C′ la touche en H'_1, car il se trouve dans les plans tangents des deux cylindres dont cette courbe est l'intersection.

On détermine sans difficulté sur le cylindre du couronnement les génératrices $v'_1 v'$ et $u'_1 u'$ qui forment lignes d'ombre.

L'arc (cv, $c'v'_1$) projette une ombre (CV_1, $C'V'_1$) que l'on obtient par points, en considérant les rayons sur le plan vertical de la *fig.* 193. On détermine ensuite l'ombre V_1V portée par la génératrice (v, $v'_1 v'$); sur l'autre côté de la cheminée, on trouve l'arc DU_1 et la droite U_1U.

On obtient les ombres portées par l'arc (uev, $u't'v'$) sur les plans PBQ et RBQ, en considérant pour chacun d'eux les rayons sur le plan vertical qui lui est perpendiculaire.

Les courbes se rejoignent sur l'arête BQ en un point I dont il est utile d'avoir la position d'une manière exacte. Pour l'obtenir, nous considérerons les rayons (Bb, B″b'') et (Qq, Q″q'') qui aboutissent à deux points (B, B″) et (Q, Q″) de cette arête, et nous déterminerons leurs traces b et q sur le plan supérieur F″v'' du couronnement de la cheminée. La droite bq de ce plan porterait ombre sur l'arête BQ, et le point i, où elle rencontre le cercle uv, a pour ombre le point cherché I. Il n'y a plus qu'à relever i en i' (*fig.* 192), et à construire son ombre (I, I′).

On obtient facilement sur le même plan horizontal F″v'' les droites bp et br qui porteraient ombre sur les arêtes BP et BR. Par suite d'une coïncidence fortuite, la seconde passe par le point v; il résulte de là que l'extrémité V de l'ombre de la génératrice $v'_1 v'$ (*fig.* 192) est précisément sur l'arête BR (*fig.* 191).

329. La *fig.* 194 représente une coupe de la cheminée par un plan diamétral vertical. La droite $a''a'$ et la courbe a'B′ sont les ombres de la génératrice (A, A″A′) et de l'arc (AB, A′B′). La courbe a'B′ appartient à l'intersection du

cylindre intérieur de la cheminée par le cylindre d'ombre du cercle supérieur (ABd, A'B'D'). Ces deux cylindres ayant pour directrice un même cercle se coupent suivant une seconde conique qui est nécessairement une ellipse (art. **252**, 1°).

II[e] EXERCICE. — *Ombres d'un cylindre couché sur un plan horizontal. Rayons parallèles.* (*Fig.* 196.)

330. On propose de déterminer les ombres d'un cylindre de révolution couché sur un plan horizontal. La génératrice de contact est (Aa, A'a'); les bases circulaires sont projetées verticalement suivant deux ellipses identiques, faciles à construire. Nous avons représenté le cercle $\varepsilon'\varphi'$ sur lequel se projette l'une d'elles (ef, $e'f'$) lorsqu'on la rend parallèle au plan vertical par une rotation autour de la verticale du point a où elle touche le plan horizontal.

Pour avoir les lignes d'ombre, il faut mener au cylindre des plans tangents parallèles au rayon (SS_1, $S'S'_1$). Nous allons reproduire la construction donnée pour ce problème à l'article **129**, en ayant égard à la disposition spéciale des données.

D'un point (S_1, S'_1) du rayon, nous menons une droite (S_1S_2, $S'_1S'_2$) parallèle aux génératrices du cylindre; le plan passant par cette ligne et par (SS_1, $S'S'_1$) coupe le plan vertical B_2S de la première base suivant la ligne (SS_2, $S'S'_2$). Les intersections du même plan B_2S avec les plans tangents cherchés ont pour projections verticales les droites $B'B'_2$ et $C'C'_2$ parallèles à $S'S'_2$ et tangentes à la projection verticale de la première base. Les génératrices qui forment séparation d'ombre et de lumière sur le cylindre passent par les points de contact B' et C' : ce sont les droites (Bb, B'b') et (Cc, C'c'). La seconde est cachée sur les deux projections.

On peut opérer sur le cercle $\varepsilon'\varphi'$, et cela est même un peu plus exact. Il est facile de déterminer la position (Sσ, S'σ') que prend la droite (SS_2, $S'S'_2$) quand on la fait tourner autour de la verticale du point S jusqu'à la rendre parallèle au plan vertical. Une tangente parallèle à S'σ' fait connaître le point β que l'on ramène en b'.

331. On reconnaît, d'après la direction de la projection SS_1 d'un rayon, que la seconde base est éclairée et que la première est dans l'ombre. La ligne qui sépare la partie éclairée de celle qui est obscure est formée des génératrices (Bb, B'b'), (Cc, C'c'), et des deux demi-circonférences $b'e'c'$, B'M'C'. L'ombre portée par ce contour mixtiligne sur le plan horizontal se compose des droites B_1b_1, C_1c_1 parallèles aux génératrices, et des demi-ellipses b_1ac_1, $B_1M_1C_1$.

Un point M_1, trace d'un rayon (MM_1, $M'M'_1$), est déterminé par la rencontre de deux droites MM_1 et M'_1M_1 qui se coupent sous un angle assez aigu. Pour donner plus d'exactitude à la construction, on peut mener par le point (M, M') une

droite parallèle à $(SS_2, S'S'_2)$ et chercher sa trace M_2 sur B_2S. En menant par M_2 une droite parallèle aux génératrices du cylindre, on a l'ombre de la génératrice qui passe par le point (M, M') ; l'intersection de cette droite avec la ligne MM_1 donne le point M_1.

Les ombres portées peuvent être considérées comme des projections obliques, et par conséquent la tangente M_1K_1 en un point M_1 de l'ellipse est l'ombre de la tangente $(MK, M'K')$ au point correspondant du cercle. Pour avoir la première, il suffit donc de chercher l'ombre K_1 d'un point (K, K') de la seconde : nous l'obtenons par la méthode qui vient d'être expliquée.

La droite B_1b_1 est tangente à l'ellipse en B_1, car elle est l'ombre de toutes les lignes contenues dans le plan tangent au cylindre le long de la génératrice $B'b'$, et notamment de la tangente du cercle au point B'.

Les diamètres du cercle projetés sur $B'C'$ et $R'L'$ sont rectangulaires, et par suite leurs ombres B_1C_1 et R_1L_1 sont des diamètres conjugués de l'ellipse (art. **151**).

III[e] Exercice. — *Ombre d'un cône percé d'un trou cylindrique. Rayons parallèles.* (*Pl. VII.*)

332. On propose de déterminer les ombres du cône qui a déjà été représenté sur la *fig.* 124. On donne ses deux projections, et l'ombre s de son sommet sur le plan horizontal.

Les droites sa et sd, tangentes à la base du cône, sont les traces horizontales des plans tangents parallèles aux rayons de lumière et les limites de l'ombre portée sur le plan horizontal. Les génératrices de contact $(Sa, S'a')$, $(Sd, S'd')$ sont les limites de l'ombre propre. Ces droites se trouvent interrompues aux points (A, A'), (A_1, A'_1), (D, D') (D_1, D'_1) ; leurs ombres sont par conséquent limitées aux points correspondants α, α_1, δ et δ_1.

333. Il faut maintenant construire sur le plan horizontal les ombres des deux courbes de pénétration. On détermine la trace μ du rayon de lumière qui passe par un point M de l'une d'elles, sans recourir au plan vertical, en remarquant qu'elle doit être sur l'ombre sm de la génératrice SMm. L'ombre de la courbe DMR passe par les points δ et δ_1, est tangente en ces points à la droite sd limite de l'ombre sur le plan horizontal, et touche aussi la droite sr ombre de la génératrice Sr qui, dans l'espace, est tangente à la courbe de pénétration.

On construit de la même manière l'ombre $\lambda\varepsilon$ de la courbe ALT. La lumière arrive sur la partie du plan horizontal qui est comprise dans l'intérieur des deux lignes que nous venons de déterminer.

La direction des génératrices du cylindre creux est donnée, sur chaque plan de projection, par les tangentes communes aux deux courbes de pénétration. En menant du sommet (S, S') une droite $(SK, S'K')$ parallèle à ces lignes, nous

pourrons déterminer la trace SK d'un plan parallèle aux rayons et aux génératrices du cylindre. Les courbes $\delta\gamma\tau$ et $\alpha\gamma\tau$ doivent admettre des tangentes communes $\varphi\lambda$ et $\beta\varepsilon$, parallèles à sK : ces droites sont les traces de plans qui sont tangents au cylindre, et parallèles aux rayons de lumière.

334. La ligne d'ombre sur le cylindre creux est l'intersection de cette surface et du cylindre d'ombre qui a pour directrice la courbe DRM et pour trace horizontale $\delta\gamma\tau$. On construit cette intersection par la méthode ordinaire (art. **223**, **234**). Une droite $\mu\nu$, parallèle à sK, peut être considérée comme la trace d'un plan parallèle aux génératrices rectilignes des deux cylindres. Ce plan auxiliaire coupe le cylindre d'ombre suivant les droites μM et νN, et le cylindre creux suivant deux droites qui passent par les points M et N. Les points I et i où se rencontrent ces lignes appartiennent à la courbe d'ombre; le premier seul est utile (art. **97**).

Quand les points μ et ν se réunissent, les points M et I se confondent également. L'origine F de l'arc utile correspond donc au point φ de la trace du cylindre d'ombre où la tangente est parallèle à sK. L'extrémité G de l'arc utile est sur le rayon de lumière qui rencontre les deux courbes d'entrée et de sortie du cylindre, et qui par conséquent aboutit au point de croisement γ. La courbe d'ombre portée sur le cylindre creux a un autre arc utile BT, que l'on obtient de la même manière.

On relève sans difficulté sur le plan vertical les lignes d'ombre ainsi déterminées sur le plan horizontal.

335. La *fig.* 197 (*Pl. VI*) représente, dans la même position par rapport aux plans de projection, et éclairé par les mêmes rayons, le solide retiré du cône. Le périmètre de l'ombre portée sur le plan horizontal est formé des quatre droites $\alpha\alpha_1$, $\varepsilon\beta$, $\delta_1\delta$, $\varphi\lambda$ et des arcs des courbes déjà déterminées qui se raccordent avec elles. En ramenant les points λ, φ, β, ε en L, F, B, E, puis en L', F', B', E', nous obtenons les génératrices (LF, L'F') et (BE, B'E') suivant lesquelles la surface cylindrique du solide est touchée par des rayons de lumière : ce sont les limites de l'ombre propre. Ces lignes ne sont pas à considérer sur la *fig.* 198, parce que les rayons qui les rencontrent sont noyés, près le point de contact, dans la partie solide du cône, et n'ont, par conséquent, qu'une existence purement géométrique. Nous dirons que les droites (LF, L'F') et (BE, B'E'), lignes d'ombre *réelles* sur la *fig.* 197, seraient *virtuelles* sur la *fig.* 198.

Une construction analogue fait trouver sur la partie conique du solide les lignes d'ombre (AA_1, $A'A'_1$) et (DD_1, $D'D'_1$).

IV[e] Exercice. — *Ombres d'une niche sphérique.* — *Rayons parallèles.* (*Fig.* 206.)

336. On propose de déterminer les ombres d'une niche sphérique semblable à celles des *fig.* 162 et 163, mais représentée par une élévation sur le plan de

tête et par une coupe horizontale que l'on peut supposer faite à la hauteur du plan de naissance A'B' de la voûte sphérique. La droite (R, R') donne la direction des rayons de lumière.

L'ombre portée par l'arête (A, A'_1 A') est l'horizontale (A*a*, A'_1 a'_1), et la génératrice (*a*, a'_1*a'*) du cylindre de la niche jusqu'au point où elle rencontre le rayon de lumière qui passe à l'extrémité A' de l'arête.

On obtient facilement l'ombre (*k*, *k'*) portée par un point (K, K') de la courbe de tête, sur le même cylindre, en cherchant l'intersection de cette surface avec le rayon (K*k*, K'*k'*).

L'arc *a'k'e'* appartient à l'intersection du cylindre vertical de la niche avec le cylindre d'ombre qui a pour directrice le cercle A'E'B'. Les plans limites (art. **227**) sont les plans (A*a*, A'_1 A') et (B*b*, B'_1 B'), qui sont parallèles aux rayons de lumière, et dont les traces verticales touchent la directrice du cylindre d'ombre aux points A' et B'. Il y a pénétration : l'une des courbes se projette horizontalement sur l'arc *a*B, l'autre sur l'arc A*b*. Nous avons négligé la dernière, mais la première a été représentée même dans ses parties non utiles. Nous verrons plus loin comment on détermine sur la droite A'B' la position précise de l'extrémité *e'* de l'arc utile.

337. La tangente en un point *k'* est l'intersection des plans tangents aux deux cylindres. Les traces du plan tangent au cylindre de la niche sont la droite *kt* sur le plan horizontal, et la verticale *tt'* sur le plan K_1 *t* parallèle au plan de tête. La trace du plan tangent au cylindre d'ombre, sur le même plan, est la droite K'_1*t'* parallèle à K'*f'*. La tangente est donc *t'k'*.

Les droites *kt* et K_1 *t* se rencontrant très-obliquement, il est convenable de tracer d'abord la verticale *tt'* dans une position arbitraire, et de mener ensuite, par son point de rencontre *t* avec la tangente *ki*, une droite *t*K_1 parallèle à BA.

On peut faire les constructions sur le plan horizontal : en le supposant à la hauteur du plan de naissance, il est rencontré par la tangente K'*f'* de la directrice A'K'B' au point *f*, et par le rayon de lumière (K*k*, K'*k'*) au point *u*; la trace du plan tangent au cylindre d'ombre le long de la génératrice K'*k'* est donc *fu*; cette ligne coupe la trace du plan tangent au cylindre de la niche en un point *i* qui, relevé sur A'B', donne un point *i'* de la tangente *t'k'*.

Le plan d'ombre de l'arête A'_1 A' est tangent au cylindre d'ombre de la courbe de tête le long de la génératrice A'*a'*, et par suite les lignes d'ombre sur le cylindre de la niche se raccordent au point *a'*.

338. L'arc *e'*G est l'intersection du cylindre d'ombre avec la sphère. On le détermine en coupant les surfaces par des plans perpendiculaires au plan de tête et parallèles aux rayons. Pour que la construction soit facile, il faut prendre un plan de projection parallèle aux plans sécants, de manière que les cercles d'in-

tersection sur la sphère se projettent en vraie grandeur. La trace de ce plan avec le plan de tête est une droite X″ Y″ parallèle à R′.

Le plan sécant qui passe par le centre (C, C′) a pour trace verticale la droite M′C′ parallèle à R′ : il coupe la sphère suivant un cercle dont nous traçons sans difficulté la projection $M''M''_1$ sur le nouveau plan, et le cylindre suivant le rayon de lumière (M*c*, M′C′) dont on détermine la projection M″*c*″, en remarquant que le point *c*″, sur lequel se projette le point (*c*, C′), doit être à une distance de C″ égale à C*c* (art. **59**). Le rayon M″*c*″ coupe le cercle $M''M''_1$ en un point μ'' que nous ramenons en μ.

Les sections de la sphère et du cylindre d'ombre par le plan auxiliaire qui a pour trace verticale la droite N′*n*′ parallèle à M′C′ sont, en projection, le cercle décrit du point C″ comme centre avec N″C″ pour rayon, et la droite N″*n*″ parallèle à M″μ''. Le point de rencontre *n*″ est ramené en *n*′.

Les origines M″ et N″ des arcs concentriques M″μ'' et N″*n*″ se trouvent sur un même rayon, et leurs cordes sont parallèles; ces arcs sont donc égaux en degrés, et par suite les points C″, *n*″ et μ'' sont en ligne droite. Il en résulte que la projection de la courbe d'ombre est une droite passant par le point C″; la courbe elle-même est un grand cercle situé dans un plan perpendiculaire aux plans auxiliaires, et sa projection verticale, une ellipse dont le grand axe est égal au diamètre de la sphère. La construction montre que cet axe est le diamètre PG situé dans le plan de tête et perpendiculaire à R′; le petit axe est $\mu C' \mu_1$.

Les deux surfaces sont du second degré, et se coupent suivant le cercle (AB, A′M′B′); on pouvait donc prévoir que leur intersection complète comprendrait une seconde courbe plane (art. **252**, 1°).

En coupant la sphère et le cylindre d'ombre par des plans parallèles au plan de tête, on déterminerait la courbe *e*′G aussi facilement que par la construction que nous venons d'expliquer. Nous nous contentons d'indiquer cette méthode.

339. Le point *e*′ du cercle de naissance, où se joignent les arcs utiles des deux courbes, est sur l'intersection (A′B′, C″μ'') du plan de naissance et du plan de la courbe d'ombre. Si nous considérons un point (*r*′, *r*″) de l'intersection de ces plans, nous déterminerons sa position sur le plan horizontal en prenant le segment R*r* égal à R″*r*″, et nous pourrons tracer la droite d'intersection C*r*; elle rencontre le cercle en un point *e* qui fait trouver *e*′.

Les deux courbes ont au point *e*′ une tangente commune, parce que le cylindre de la niche est circonscrit à la sphère le long du cercle de naissance. On construit cette tangente en considérant le point *e*′ comme appartenant, soit à la ligne d'ombre de la sphère, soit à celle du cylindre, soit à une ellipse dont on connaît les axes. Nous avons employé le premier procédé; les traces sur le plan de tête du plan tangent au cylindre d'ombre, et du plan de la courbe sont E′ε et PG : leur point de rencontre ε appartient à la tangente cherchée.

340. Nous n'avons pas tracé la projection horizontale de la courbe d'ombre portée sur la sphère, parce qu'elle présente peu d'intérêt; mais il serait très-facile de déterminer cette ellipse : son centre est en C; la droite C*e* est la moitié de son grand axe; en projetant le point G sur AB, on aurait un point de la courbe, et l'on construirait ensuite la longueur du petit axe (art. **299**).

341. Si le demi-cylindre et le quart de sphère représentés sur la *fig.* 206 étaient en relief, il n'y aurait pas de lignes d'ombre portées sur les surfaces, mais seulement des lignes d'ombre propre qu'il serait très-facile de construire. Nous ne nous arrêterons pas à ce problème; nous voulons simplement faire remarquer que les lignes d'ombre à considérer sur une surface sont différentes, suivant que la partie solide se trouve d'un côté ou de l'autre.

Surfaces de révolution.

Ier EXERCICE. — *Rayons divergents. — Points lumineux dans une position quelconque.* (*Pl. XII.*)

342. Lorsqu'une surface courbe est éclairée, le lieu des points de contact des rayons qui lui sont tangents forme la ligne qui sépare la partie éclairée de celle qui est dans l'ombre : nous l'appellerons quelquefois *séparatrice*. On peut la déterminer, soit en coupant la surface par des plans passant par le point lumineux et menant de ce point des tangentes à la section, soit en construisant des plans tangents contenant le point lumineux, et cherchant leur point de contact. Cette dernière méthode est la plus employée; nous allons l'appliquer à la recherche des ombres d'un corps engendré par la révolution, autour de l'axe O′O″, de l'aire O′A′*e*′A″O″ composée d'un rectangle et d'un demi-cercle. Les rayons divergent du point (S, S′).

343. *Premier procédé : cônes circonscrits.* — Proposons-nous de trouver les points de la courbe d'ombre situés sur un parallèle (RMN, R′M′N′) choisi arbitrairement : si la droite $\lambda' g'_1$, tangente de la méridienne en R′, accompagne cette courbe dans son mouvement de rotation autour de l'axe, elle engendrera un cône qui sera circonscrit à la surface le long du cercle décrit par le point (R, R′) [1]; on voit, en effet, qu'en chacun de ses points les plans tangents des deux sur-

[1] Une surface est *circonscrite* à une autre ou lui est *inscrite,* quand elle a les mêmes plans tangents en tous les points d'une ligne commune. Ces expressions n'impliquent pas d'ailleurs une idée de grandeur relative nécessaire : ainsi la surface que l'on dit circonscrite, parce qu'elle contient l'autre surface dans la disposition spéciale du système géométrique considéré, peut très-bien, pour une autre disposition des données, être renfermée dans celle-ci.

faces se confondent, parce qu'ils contiennent deux mêmes droites, la tangente du méridien et celle du parallèle. Donc, si par le point lumineux (S, S′) nous menons des plans tangents au cône, les points où les génératrices de contact rencontreront le parallèle considéré appartiendront à la courbe d'ombre de la surface de révolution.

Nous prenons pour plan horizontal d'opération le plan xy situé à la hauteur du point lumineux. Tous les tracés seront d'ailleurs projetés sur le plan horizontal qui correspond à la ligne de terre T′A′.

Le cône circonscrit a son sommet sur l'axe (O, O′O″); sa trace horizontale est le cercle $\lambda\mu\nu$. Les traces des plans tangents à cette surface sont les tangentes $S\mu$ et $S\nu$; les génératrices de contact ont pour projections horizontales $O\mu$ et $O\nu$; enfin les points M et N, où elles rencontrent la projection du parallèle, appartiennent à celle de la courbe : on les relève verticalement en M′ et en N′.

Il est important de remarquer que si le parallèle considéré et la trace $\lambda\mu\nu$ du cône étaient sur des nappes différentes de cette surface, ce que l'on reconnaîtrait facilement sur le plan vertical, il faudrait prendre les intersections du parallèle avec les prolongements des droites analogues à μO et νO au delà du point O.

Pour éviter de tracer les tangentes $S\mu$ et $S\nu$, et déterminer avec précision les points de contact μ et ν, on décrit un cercle sur OS comme diamètre.

Le point (M, M′) est vu sur les deux projections, parce qu'il est en avant du méridien principal, et sur la partie supérieure du corps, au-dessus du parallèle du plus grand rayon. Le point (N, N′) est vu sur le plan horizontal et caché sur le plan vertical.

344. Nous avons trouvé deux points M et N sur le parallèle, parce que le point S est en dehors du cercle $\lambda\mu\nu$; la courbe d'ombre n'aurait pas de point sur le parallèle considéré, si la trace du cône auxiliaire renfermait le point S; et enfin elle serait tangente au parallèle, si le cône avait pour trace, sur le plan horizontal xy, le cercle SS_1 décrit du point O comme centre avec OS pour rayon. D'après cela, pour déterminer les parallèles qui sont touchés par la courbe d'ombre, il suffit de relever le point S_1 en S'_1, et de mener par S'_1 des tangentes S'_1P' et S'_1p' à la méridienne : chacun des points de contact P′ et p' appartient à un des parallèles cherchés. Il résulte d'ailleurs de la construction générale de l'article précédent que les points M et N, où la courbe d'ombre rencontre un parallèle, ont des positions symétriques par rapport au plan méridien SO, et par suite qu'ils ne peuvent se réunir que dans ce plan; les points (I, I′) et (i, i'), où les parallèles des points P′ et p' percent le plan SO, sont donc ceux où ils sont touchés par la ligne d'ombre. L'un est le plus élevé de cette courbe, et l'autre celui qui l'est le moins.

345. Le long du parallèle (EUV, $E'e'$) qui a le plus grand rayon, le cône circonscrit se change en un cylindre vertical; les plans tangents sont verticaux, et ceux qui contiennent les points de la courbe d'ombre ont pour traces horizontales les droites SU et SV tangentes à la projection du parallèle, et passant par le point S. Le cercle $O\mu S$ détermine la position des points de contact U et V; ces points limitent la partie vue de la courbe en projection horizontale : on les relève en U′ et en V′.

346. *Deuxième procédé : cylindres circonscrits.* — Au lieu de se donner des parallèles, on peut choisir des méridiens, et la même construction faite en ordre inverse résoudra le problème. Si l'on considère le méridien dont la trace est $O\mu M$, son intersection μ avec le cercle OS sera ramenée en λ, puis relevée en λ'. On tracera ensuite les tangentes $\lambda'R'$ et $\lambda'r'$ qui feront connaître les parallèles $R'M'N'$ et $r'm'n'$; les intersections M et m de leurs projections horizontales avec la droite OM appartiendront à la courbe. Les points λ' et r' étant de côtés différents de l'axe, le point m devra être pris au delà du point O par rapport au point μ.

Cette construction est suffisamment établie par les raisonnements des articles précédents, car, lorsqu'elle est terminée, on peut supposer que ce sont les parallèles qui ont été donnés; mais on peut la démontrer directement.

347. Les tangentes des parallèles, aux points où ils coupent le plan méridien MOm, forment un cylindre circonscrit perpendiculaire à ce plan. Tout plan tangent à ce cylindre est tangent à la surface de révolution en un point du méridien considéré. Le problème est donc ramené à déterminer des plans contenant un point (S, S′) et tangents à un cylindre. Cette question a été traitée à l'article **128**; nous allons reproduire la solution, en ayant égard à la manière dont les données sont disposées.

La droite ($S\mu$, $S'\mu'$) est parallèle aux génératrices du cylindre, et le point (μ, μ') où elle rencontre le plan MOm appartient aux traces des plans tangents cherchés, sur le plan méridien. Si nous faisons tourner ce plan de manière à le rendre parallèle au plan vertical, le point (μ, μ') se transportera en (λ, λ'), et les tangentes $\lambda'R'$ et $\lambda'r'$ seront les traces des plans tangents : leurs points de contact R′ et r' reportés dans le plan méridien en (M, M′) et (m, m') appartiendront à la courbe d'ombre.

348. Les tangentes $S'Q'$ et $S'q'$ sont les traces verticales des plans qui contiennent le point (S, S′) et qui sont tangents au cylindre circonscrit à la surface le long du méridien de front. La projection verticale de la courbe d'ombre rencontre le contour apparent en Q′ et en q', et lui est tangente en ces points.

L'horizontale xy ne rencontrant pas le méridien principal, quelle que soit la position du point λ', on pourra mener deux tangentes $\lambda'R'$ et $\lambda'r'$, et par suite la courbe a deux points dans chaque plan méridien.

349. On emploiera l'un ou l'autre des deux procédés que nous avons expliqués, d'après la nature de la méridienne, suivant qu'il sera plus facile de mener une tangente à cette courbe par un point pris sur elle, ou de déterminer le point de contact d'une tangente. Pour une courbe graphique (art. **98**), la première détermination sera en général plus facile.

350. *Ombre portée.* — Les courbes d'ombre portée sur les plans de projection sont les traces du cône qui a son sommet au point (S, S′), et pour directrice la courbe d'ombre propre. Une génératrice quelconque (SM, S′M′) perce le plan horizontal en un point (T, T′) qui appartient à la courbe d'ombre portée. La tangente Tg de cette courbe est la trace du plan tangent au cône, qui est également tangent à la surface au point (M, M′); elle est donc perpendiculaire à la trace OM du plan méridien (art. **190**).

La tangente Tg peut être considérée comme l'ombre d'une tangente quelconque de la surface en M; elle est parallèle à la tangente MJ du parallèle. L'ombre O_1T du rayon horizontal OM est perpendiculaire à la tangente Tg, car le rayon OM et son ombre O_1T sont parallèles; par conséquent *les normales à la courbe d'ombre portée d'une surface de révolution sur un plan horizontal sont les ombres des horizontales qui joignent les points de la courbe d'ombre propre à l'axe vertical de la surface.*

On voit qu'il est très-facile de construire les tangentes de la courbe d'ombre portée, tandis que nous n'avons encore exposé aucun procédé pour tracer les tangentes à la courbe d'ombre propre. La construction qui sur la figure fait trouver la tangente αM de la courbe au point M ne sera expliquée que dans la troisième Partie de cet Ouvrage (art. **878**).

Les droites SU et SV qui passent par le point S, et touchent le contour apparent de la surface sur le plan horizontal, forment le contour apparent du cône d'ombre, et sont par conséquent tangentes à la courbe d'ombre portée aux points v et u qui correspondent à V et U.

IIe Exercice. — *Rayons divergents.* — *Points lumineux dans le plan méridien de front.* (*Fig.* 213.)

351. Le plan vertical de projection étant parallèle au plan méridien qui contient le point lumineux (S, S′), les deux points M et M_1 d'un parallèle qui appartiennent à la ligne d'ombre ont une même projection verticale M′, et la courbe, sur le plan vertical, s'arrête aux points Q′ et q' où elle rencontre le méridien principal; elle est prolongée par une partie parasite que les constructions exposées aux articles précédents ne font pas connaître, parce que ses points ne correspondent pas à des points de la projection horizontale de la courbe. Pour

déterminer cette partie, nous allons chercher un tracé qui donne les points de la projection verticale directement, sans faire intervenir la projection horizontale.

Les triangles rectangles $OS\mu$ et OMF sont semblables, et par suite nous avons

$$O\mu : OS :: OF : OM$$

ou bien

$$O''\lambda' : O''S' :: O'M' : O'm'.$$

Ainsi les droites $O''O'$, $\lambda'M'$ et $S'm'$ partagent en parties proportionnelles les horizontales $O''S'$ et $O'm'$, et par conséquent convergent vers un même point M''. D'après cela, pour obtenir le point M' situé sur l'horizontale $m'_1 m'$, on peut tracer la tangente $m'\lambda'$, puis la sécante $S'm'$, et joindre par une droite les points λ' et M'' où elles rencontrent, l'une l'horizontale du point S', et l'autre l'axe. On trouverait le même point M' en opérant sur la tangente $m'_1\lambda'_1$ de la méridienne inverse, ainsi qu'il est indiqué sur la figure.

Cette construction fait trouver un point sur la trace verticale du plan de chaque parallèle. Quand la trace considérée passe entre les points Q' et q', le point est en dedans du contour apparent; dans le cas contraire, le point tel que B' est en dehors de ce contour, et par conséquent parasite.

352. La construction montre que la droite $A'_1 A'$ rencontre la projection de la ligne d'ombre en un point situé à l'infini. Sa parallèle $b'B'$ passe par ce point; si elle se transporte parallèlement à elle-même jusqu'à coïncider avec $A'_1 A'$, le point B' ira rejoindre celui que nous considérons à l'infini. La droite $A'_1 A'$ est donc asymptote de la courbe $M'q'B'$ (art. **92**); la droite $A''_1 A''$ l'est également.

La courbe paraît s'arrêter à l'infini, mais cela tient à ce que nous ne nous sommes occupé que de la surface engendrée par la révolution du demi-cercle $A'm'A''$. Si nous avions étendu les constructions à la surface complète, ayant pour méridienne un cercle entier, nous aurions trouvé que la projection verticale de la ligne d'ombre se compose de deux parties qui se rejoignent à l'infini (art. **182**, **183**). Ces parties correspondent à deux branches généralement distinctes, mais qui se réunissent quand le point lumineux est dans le plan du parallèle supérieur ou dans celui du parallèle inférieur. Nous donnerons plus loin quelques indications sur ce cas particulier (art. **879**).

353. Si nous voulons construire la courbe par la méthode de l'article **346**, pour avoir les points M et N situés dans un plan méridien $O\mu$, il faudra ramener le point μ en λ, le relever ensuite en λ', et mener de ce point des tangentes à la méridienne : les points de contact m' et n' feront connaître les parallèles sur lesquels sont les points cherchés. Il y en a deux, parce que le point λ' est exté-

rieur à la méridienne; s'il était en γ' sur cette courbe, les points m' et n' se confondraient en ce point, et le plan méridien ne contiendrait de la ligne d'ombre qu'un seul point situé sur le parallèle qui est à la hauteur du point lumineux. On voit d'après cela que, si l'on projette γ' en γ, et qu'on ramène γ en C et en C_1 sur le cercle OS, les points C et C_1 appartiendront à la courbe d'ombre, et que les droites OC et OC_1 seront les traces des plans méridiens qui la touchent.

354. Il est facile de reconnaître que, si le point lumineux était dans le plan horizontal $E'e'$ qui contient le cercle décrit par le centre de la méridienne, la projection horizontale de la courbe d'ombre aurait des parties parasites. On détermine facilement ces parties quand la méridienne est un cercle, ou une conique ayant l'un de ses axes parallèle à l'axe de révolution. Nous ne nous arrêterons pas à cette question. On peut remarquer que la construction que nous avons donnée pour les arcs parasites sur le plan vertical est toujours applicable, quelle que soit la méridienne.

355. Les rayons (SQ, S'Q') et (Sq, S'q') sont parallèles au plan vertical, et par suite l'ombre portée sur ce plan a deux branches infinies. Les asymptotes sont les droites S'Q' et S'q', traces, sur le plan de la courbe d'ombre portée, des plans tangents au cône le long des génératrices qui lui sont parallèles.

Le plan vertical SD_1 étant tangent au cône d'ombre, sa trace verticale $\delta\delta'$ touche la courbe d'ombre portée sur le plan vertical de projection, au point δ'', ombre de (D, D').

IIIe Exercice. — *Rayons parallèles dans une direction quelconque.* (*Fig.* 215.)

356. Les données sont l'axe (O, O'''Z) de la surface, la méridienne $m'_1a'm'b'$, qui est symétrique par rapport à cette droite, et la direction (R, R') des rayons de lumière.

Premier procédé : cônes circonscrits. — Considérons un parallèle (MNm, M'N'm') choisi arbitrairement, et traçons la tangente $m'z$ de la méridienne à l'un des points où il la rencontre : le cône engendré par la révolution de cette ligne autour de l'axe touche la surface aux différents points du parallèle (Mm, M'm') (art. **343**); par conséquent, si l'on construit les plans qui sont tangents à ce cône et parallèles à la droite (R, R'), les points où les génératrices de contact rencontreront le parallèle appartiendront à la courbe d'ombre.

Pour plusieurs des parallèles que l'on devra successivement considérer, le sommet du cône sera hors du cadre de l'épure. On lève cette difficulté, et l'on simplifie la construction en abaissant ou en élevant le cône, de manière que son sommet arrive à un point fixe (O, O'), choisi arbitrairement sur l'axe. La génératrice (Om, zm') prend la position (Oμ_1, O'μ'_1) et le cercle $\mu_1\nu\mu$ est la trace horizontale du cône transporté.

Par le point (O, O′), nous menons une droite (Or, $O'r'$) parallèle à (R, R′) : les plans qui contiennent cette droite, et qui sont tangents au cône, ont pour traces les tangentes $r\mu$ et $r\nu$ du cercle $\mu_1\nu\mu$ (art. **131**). Les génératrices de contact sont projetées sur les lignes $O\mu$ et $O\nu$. En relevant le cône jusqu'à sa première position, les projections horizontales de ces génératrices ne changent pas, et les plans tangents transportés parallèlement à eux-mêmes sont encore parallèles aux rayons de lumière. Les points M et N où les génératrices $O\mu$ et $O\nu$ rencontrent le parallèle considéré appartiennent alors à la projection horizontale de la courbe de contact : nous les relevons en M′ et N′. Ils sont vus sur les deux projections, parce qu'ils se trouvent en avant du méridien principal xy et sur la partie supérieure du solide de révolution.

Un cercle décrit sur Or comme diamètre fait connaître, sur la trace de chaque cône, la position précise des points de contact μ et ν, et dispense de tracer les tangentes $r\mu$ et $r\nu$.

357. La méridienne de la surface prise pour exemple a un centre O″ situé sur l'axe. Il en résulte que les tangentes du méridien en deux points opposés m' et m'_1 sont parallèles, et que les deux cônes circonscrits le long des parallèles de ces points se confondent lorsqu'ils sont ramenés à avoir leur sommet en O′. On trouve ainsi sur le plan horizontal les mêmes génératrices de contact, et les parallèles sont aussi projetés sur un même cercle ; mais, comme celui du point m'_1 est sur la nappe supérieure du cône circonscrit, il faut prolonger les génératrices au delà du sommet O jusqu'aux points M_1 et N_1, qui doivent être ensuite relevés en M'_1 et N'_1.

358. Nous avons trouvé deux points sur le parallèle (Mm, $M'm'$), parce que le point r est extérieur à la trace $\mu_1\nu\mu$ du cône auxiliaire transporté. Si ce cercle passait par le point r, les points M et N seraient réunis, et le parallèle toucherait la courbe d'ombre. D'après cela, pour déterminer les parallèles tangents à cette courbe, il suffit de ramener le point r en r_1 par un arc de cercle décrit du point O comme centre, de le projeter en r'_1, et de mener à la méridienne des tangentes parallèles à $O'r'_1$: les points de contact a' et b' appartiennent aux parallèles cherchés. On obtient ensuite sans difficulté les points (A, A′) et (B, B′) situés sur ces cercles : l'un est le plus haut et l'autre le plus bas.

On voit d'ailleurs, par la construction même, que les points de la courbe d'ombre sont deux à deux sur des cordes horizontales perpendiculaires au plan vertical rO, et divisées par lui en deux parties égales.

359. Le cône auxiliaire devient un cylindre vertical pour le parallèle F′H′ qui forme le contour apparent de la surface sur le plan horizontal. La trace horizontale FH du cylindre est la projection du parallèle, et les traces des plans tangents parallèles aux rayons de lumière sont les tangentes de ce cercle parallèles à R. On obtient leurs points de contact G et E en traçant par le centre O une perpen-

diculaire GE à Or. Ces points sont, sur le plan horizontal, les extrémités de l'arc vu de la courbe d'ombre.

360. *Deuxième procédé : cylindres circonscrits.* — Au lieu de se donner des parallèles, on peut choisir les méridiens; la même construction, faite en ordre inverse, résout le problème. Si l'on considère le méridien M_1OM, son point de rencontre μ avec le cercle Or sera ramené en μ_1, puis relevé en μ'_1; on mènera ensuite à la méridienne des tangentes parallèles à $O'\mu'_1$, et leurs points de contact m' et m'_1 détermineront les deux parallèles qui passent par les points de la courbe situés dans le méridien donné.

Cette construction est suffisamment établie par les raisonnements de l'article **356**, car, lorsqu'elle est terminée, on peut supposer que ce sont les parallèles qui ont été donnés; mais il est facile de la démontrer directement.

361. Les tangentes des parallèles aux points où ils coupent le plan MOM_1 forment un cylindre perpendiculaire à ce plan et circonscrit à la surface de révolution le long du méridien. Le problème peut donc être ramené à la construction de plans tangents à un cylindre et parallèles à une droite, question traitée à l'article **129**. Nous allons reproduire la solution, en ayant égard à la manière dont les données sont disposées.

La ligne $r\mu$, perpendiculaire à MM_1, est parallèle aux génératrices du cylindre. La droite qui va du point μ au point (O, O′) est parallèle aux traces des plans tangents cherchés sur le plan méridien considéré. Si par une rotation autour de l'axe nous ramenons ce plan à être parallèle au plan vertical, le point μ arrivera en μ_1, et la droite dont nous parlons sera projetée sur $O'\mu'_1$. Les traces des plans tangents seront donc les tangentes $m'z$ et m'_1z_1 parallèles à $O'\mu'_1$. Les points de contact (m, m'), (m_1, m'_1), ramenés dans le plan méridien considéré, sont les points cherchés.

On pourra mener à la méridienne principale $F'O^{v}H'O^{iv}$ deux tangentes parallèles à la droite $O'\mu'_1$, quelle qu'en soit la direction, et par conséquent la courbe d'ombre de la surface considérée a deux points dans chaque plan méridien.

Aux points de la courbe situés sur le méridien de front, les plans tangents sont perpendiculaires au plan vertical. Leurs traces verticales sont donc les tangentes de la méridienne parallèles à la projection R′ du rayon de lumière. Les points de contact C′ et D′ de ces droites sont, sur le plan vertical, les extrémités de l'arc vu de la ligne d'ombre.

362. *Troisième procédé : sphères inscrites.* — Considérons un parallèle $(mM, m'M')$, et traçons à la méridienne la normale $m'i$: la sphère qui aurait son centre au point i, où cette droite rencontre l'axe, et im' pour rayon, serait tangente à la surface tout le long du parallèle. Les points de rencontre de ce cercle avec la ligne d'ombre de la sphère appartiendront donc à la courbe que nous cherchons.

La courbe d'ombre de la sphère est un grand cercle situé dans un plan perpen-

diculaire aux rayons. Par conséquent, si nous faisons tourner tout le système autour de l'axe, de manière que la droite $(Or, O'r')$ prenne la position $(Or_1, O'r'_1)$ parallèle au plan vertical, la ligne d'ombre de la sphère se projettera sur une droite passant par le centre i, et perpendiculaire à $O'r'_1$. Nous n'avons tracé de cette droite que le segment $i\varepsilon'$, utile à la construction. Le point ε' est la projection de deux points de contact qui appartiennent au parallèle commun à la surface de révolution et à la sphère. La projection horizontale ε de ce point doit être ramenée dans sa véritable position e; la droite MeN perpendiculaire à Or est alors la projection horizontale de la ligne qui se projetait verticalement en ε'. Elle détermine les points M et N sur le parallèle considéré $m_1 m$.

363. Si l'on trace la droite $m'k$ parallèle à $O'r'_1$, et par le point k une ligne parallèle à la tangente $m'z$, cette droite coupera la projection $m'M'$ du parallèle au point ε', car les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle $m'ik$ sur les côtés opposés se rencontrent en un même point ε'. Cette construction, n'exigeant que des parallèles, est un peu plus facile que la précédente, dans laquelle il faut abaisser des perpendiculaires.

364. La construction fait trouver un point ε' sur toute droite $M'm'$ trace du plan d'un parallèle, mais quelquefois elle le donne en dehors de la méridienne de front, et alors le point e n'est pas dans l'intérieur du parallèle, et ne correspond à aucun point de la surface.

Le point ε' est la projection d'un point de la courbe d'ombre pour des rayons parallèles à $(Or_1, O'r'_1)$. Lorsqu'il est en dehors du contour apparent de la surface, il appartient à la partie parasite que la courbe doit avoir sur le plan vertical, lorsque les rayons sont parallèles à ce plan (art. **351**). Nous avons donc un moyen facile de déterminer les points parasites.

En appliquant les raisonnements de l'article **352**, on voit que la courbe lieu des points ε' a en général pour asymptotes les tangentes horizontales de la méridienne; mais quand les points O^{IV} et O^{V}, où les tangentes sont horizontales, se trouvent sur l'axe même, la construction n'indique plus sur ces droites des points à l'infini. Dans ce cas, si la méridienne est une courbe graphique, le lieu des points ε' s'arrête brusquement aux horizontales des points O^{IV} et O^{V} [1].

365. On peut employer le procédé des sphères inscrites dans le cas des rayons divergents, mais alors, pour déterminer le cercle d'ombre de chaque sphère considérée, il faut tracer le grand cercle situé dans le plan méridien principal, et lui mener des tangentes du point lumineux ramené dans ce plan par une rotation. Cette construction peut être employée comme exercice graphique.

---

[1] Le lecteur qui voudrait avoir des détails plus étendus sur les arcs parasites des projections des courbes d'ombre des surfaces de révolution pourrait consulter le Mémoire que nous avons publié dans le XXXVe cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (1853).

366. La surface (FH, F′H′) (*fig.* 215) est un ellipsoïde, et par conséquent sa ligne d'ombre est une courbe plane (¹), une ellipse. Les axes de sa projection horizontale sont AB et GE. Les droites A′O″B′ et G′O″E′ sont des diamètres conjugués de la projection verticale.

Si l'on fait tourner tout le système autour de l'axe, jusqu'à ce que la droite (Or, O′r') soit de front, les points A′ et B′ iront en a' et b', et la courbe d'ombre se projettera sur le diamètre a'O″b' conjugué avec la direction des tangentes en a' et en b', qui est celle du rayon O′r'_1. Ce diamètre passe nécessairement par le point ε'.

367. On peut déduire des constructions précédentes un moyen pour tracer la tangente en un point donné m' d'une ellipse dont on connaît un axe O″Z, un diamètre $a'b'$ et une droite O′r'_1 parallèle au diamètre conjugué de $a'b'$. Si, en effet, on trace les lignes $m'k$ et $m'\varepsilon'$, l'une parallèle à O′r'_1, l'autre perpendiculaire à O″Z, la droite déterminée par les points de rencontre ε' et k sera parallèle à la tangente en m'.

Pour déterminer sur une ellipse les points où la tangente est parallèle à une droite donnée, on tracera à une distance arbitraire une droite $\varepsilon'k$ parallèle à cette tangente (*fig.* 215 ou 258), et par les points k et ε', où elle rencontre l'un des axes et un diamètre quelconque $a'b'$, on tracera les droites km' et $\varepsilon'm'$ respectivement parallèles au diamètre conjugué de $a'b'$ et au second axe. Si le sommet m' du triangle $\varepsilon'km'$ est sur l'ellipse, il sera l'un des deux points cherchés; dans tous les cas, il déterminera un diamètre O″m' qui passera par ces points, car O″ est évidemment un centre de similitude de tous les triangles ainsi formés (²).

368. *Transformation qu'éprouve la ligne d'ombre d'une surface de révolution éclairée par des rayons parallèles, lorsque l'on considère la surface engendrée par la méridienne transportée dans son plan parallèlement à elle-même.* — Supposons maintenant que la méridienne ait été éloignée de l'axe par un mouvement de translation dirigé perpendiculairement à cette droite, et considérons la surface qu'elle engendre dans sa révolution.

Si l'on transporte la première surface de manière que son méridien (FH, F′O^{IV}H′)

(¹) Il sera démontré dans le Livre VII, à l'occasion de l'hyperboloïde, que les lignes d'ombre des surfaces du second ordre sont des courbes planes (art. 716).

(²) Il est facile de voir que l'on peut remplacer les axes par un second système de diamètres conjugués : on établit d'abord le théorème pour le cercle, puis on l'étend à l'ellipse en faisant une projection. La construction, étant démontrée pour l'ellipse, et ne s'appuyant que sur des lignes et des points qui subsistent dans l'hyperbole, s'applique naturellement à cette courbe.

Pour démontrer la construction dans le cas du cercle, il suffit de remarquer que sur une figure faite pour cette courbe les droites km' et $\varepsilon'm'$ (*fig.* 258) seraient respectivement perpendiculaires aux diamètres $a'b'$ et O″k comme étant parallèles aux diamètres qui leur sont conjugués, et que, les trois hauteurs du triangle O″$\varepsilon'k$ devant se couper en un même point, le diamètre O″m' serait perpendiculaire à $\varepsilon'k$.

aille coïncider avec le méridien ($F_1H_1, F'_1\omega'H'_1$) de la seconde, les deux surfaces seront tangentes le long de cette ligne. Comme d'ailleurs les rayons de lumière sont parallèles, la ligne d'ombre de la surface transportée ne sera pas modifiée. Les points C_1 et D_1, nouvelles positions des points C et D, appartiendront donc à la projection horizontale de la ligne d'ombre de la seconde surface. Cette courbe a sur la droite xy deux autres points correspondant à la méridienne transportée en sens inverse, et dont un seul, C_2, a pu être placé sur la figure. On opérera de la même manière pour un méridien quelconque OO_1; chaque point de l'ancienne ligne d'ombre sur le plan horizontal sera ainsi transporté, d'un côté comme de l'autre, de la longueur constante $O\omega$ dont tous les points de la méridienne ont été déplacés.

La projection horizontale $\delta\psi\ldots, \gamma\varphi\ldots$ étant déterminée, on obtient facilement la projection verticale $\delta'\psi'\ldots, \gamma'\varphi'\ldots$.

La construction que nous venons d'exposer permet de tracer rapidement, dans le cas de rayons parallèles, les lignes d'ombre des surfaces engendrées par la révolution d'une courbe du deuxième degré autour d'une droite située dans son plan et parallèle à l'un de ses axes. Tout le tracé sur le plan horizontal se réduit alors à construire une section conique et à transformer cette courbe en augmentant tous les rayons vecteurs d'une quantité constante ([1]).

369. Nous allons rechercher comment on peut obtenir les tangentes de la nouvelle ligne d'ombre lorsque l'on connaît celles de la première courbe GE.

Soient Om et On (*fig.* 216) les rayons vecteurs de deux points m et n d'une courbe, et mg un arc de cercle dont le centre est à l'origine O. Si l'angle mOn est assez petit pour que le triangle mgn puisse être considéré comme rectiligne, on aura

$$\operatorname{tang}\widehat{gmn} = \frac{\overline{gn}}{\overline{Om} \times \widehat{nOm}}.$$

Supposons maintenant que l'on augmente les rayons vecteurs de tous les points de la courbe considérée d'une longueur mM constante, mais d'ailleurs arbitraire; le triangle gmn deviendra GMN, et l'on pourra écrire

$$\operatorname{tang}\widehat{GMN} = \frac{\overline{GN}}{\overline{OM} \times \widehat{NOM}} = \frac{\overline{gn}}{OM \times \widehat{nOm}}.$$

Les tangentes trigonométriques des angles gmn et GMN sont donc inversement proportionnelles aux rayons vecteurs Om et OM.

([1]) Cette construction a été donnée par M. Dunesme (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 2e semestre de 1857).

Maintenant, traçons mK et OK respectivement perpendiculaires à mn et Om, et joignons KM : les tangentes trigonométriques des angles KmO et KMO sont inversement proportionnelles aux rayons vecteurs Om et OM, mais $\widehat{KmO}$ est égal à $\widehat{gmn}$ comme formé par des perpendiculaires ; donc $\widehat{KMO}$ est égal à $\widehat{GMN}$, et KM est perpendiculaire à MN.

Les droites indéfinies mn et MN sont, à la limite, tangentes aux courbes; les lignes mK et MK sont donc normales, et par conséquent on peut exprimer le résultat auquel nous sommes arrivé en disant que *les sous-normales de la transformée sont égales à celles de la courbe primitive*.

D'après cela, si l'on élève des normales à l'ellipse GE (*fig.* 215) en des points α et β, les points ρ et σ où ces droites seront coupées par le diamètre perpendiculaire à $\alpha\beta$ seront sur les normales de la transformée aux points homologues α_1 et β_1 [1].

IV[e] Exercice. — *Rayons parallèles ayant leurs projections inclinées à 45° sur la ligne de terre. — Méthode des projections obliques.* (*Fig.* 217.)

370. Une méthode assez commode, et souvent employée pour déterminer les lignes d'ombre des surfaces, consiste à choisir un certain nombre de génératrices convenablement espacées, et à déterminer leurs ombres sur un plan. Pour une surface de révolution, on prend des parallèles; l'ombre de chacun d'eux sur un plan perpendiculaire à l'axe est un cercle de même grandeur.

371. Considérons un vase ayant la forme du solide de révolution représenté sur la *fig.* 217; nous déterminons facilement sur le plan horizontal les ombres du carré supérieur du socle et de différents parallèles. Nous avons fait cette construction sur la figure spéciale 218, en supposant le vase éloigné du plan vertical.

L'ensemble des cercles de cette figure fait connaître avec exactitude le périmètre de l'ombre que projetteraient sur le sol des disques minces qui occuperaient la position des parallèles, et d'une manière approximative la ligne de l'ombre portée par la surface de révolution.

Cette courbe doit être tangente à tous les cercles, car en considérant les ombres sur le sol comme des projections obliques, nous pouvons leur appliquer les raisonnements que nous avons faits à l'article **149** pour les contours apparents : en un point de la courbe d'ombre propre, le plan tangent est parallèle aux rayons de lumière, et par conséquent il projette obliquement sur sa trace toutes les lignes

---

[1] Cette construction est celle que l'on emploie pour les tangentes des conchoïdes. On la rattache généralement à la méthode de M. Chasles pour les normales à la courbe décrite par un point d'une figure de forme invariable (*Aperçu historique*, p. 548); mais nous avons dû présenter une démonstration plus élémentaire.

qu'il contient, et notamment la tangente du parallèle et la tangente de la courbe.

On voit, d'après cela, que l'on peut tracer la ligne *ij* par la condition de toucher tous les cercles, et qu'ensuite, pour construire la ligne d'ombre propre IJ, il suffit de relever chaque point de contact sur le parallèle correspondant par une droite parallèle aux rayons de lumière. Le point *m* fait ainsi trouver le point M′.

372. Pour déterminer l'ombre portée par le cercle A″B″ sur la partie supérieure du vase, nous cherchons les points où son ombre a_1 b_1 sur le plan horizontal coupe les ombres des différents parallèles (*fig.* 218). Le rayon qui passe par l'un de ces points, tel que *n*, rencontre le cercle A″B″ (*fig.* 217) et le parallèle qui a son centre en O′; son intersection N′ avec cette ligne est donc un point de la courbe d'ombre portée.

On obtient de la même manière l'ombre portée sur la partie inférieure du vase.

373. On détermine l'ombre portée sur le plan vertical, soit en cherchant la trace du cylindre oblique qui a pour directrice la ligne d'ombre propre déjà obtenue sur la surface du vase, soit en construisant les ombres de quelques parallèles, comme il a été fait pour le plan horizontal. Ces lignes sont des ellipses dont on obtient deux diamètres conjugués en cherchant les ombres de deux diamètres rectangulaires du parallèle.

Pour le cercle (AB, A′B′) nous prenons les deux diamètres (AB, A′B′) et (CD, C′) : leurs ombres sont l'horizontale *ab* et la droite *cd* parallèle à R′. Les projections du rayon sont inclinées à 45° sur la ligne de terre, et, par suite, le triangle *aod* formé par les demi-diamètres conjugués est isoscèle et rectangle. Cette disposition simplifie la construction expliquée à l'article **153** pour la détermination des axes. Nous l'avons faite à une échelle double sur la *fig.* 219 : les axes *gh* et *ef* (*fig.* 217) sont parallèles aux droites *og* et *oq* (*fig.* 219) et égaux aux segments *dq* et *dp*.

374. On suppose généralement dans le dessin géométral que les rayons sont parallèles à une droite (R, R′) dont les projections sont inclinées à 45° sur la ligne de terre. Il en résulte quelques simplifications dans les tracés, comme nous venons de le reconnaître, et d'ailleurs cette direction de la lumière est très-convenable pour bien faire ressortir la forme des objets.

375. Les ombres des divers parallèles sur le plan vertical sont des ellipses semblables et semblablement placées, ou *homothétiques*. Les diamètres, dont les ombres sont les grands axes des ellipses, se projettent tous horizontalement sur une certaine droite OG (*fig.* 217 ou 219). On peut obtenir un point de cette ligne en ramenant le point *g* en G sur le cercle AB; mais nous allons voir qu'il est facile de la déterminer directement.

Nous traçons la tangente GT du cercle et l'ordonnée GN, et nous déterminons leurs ombres *gt* et *gn* (*fig.* 219). La droite *gn*, ombre d'une perpendiculaire au plan vertical, est inclinée à 45° sur la ligne de terre : la hauteur *g*L du triangle

got est donc égale au segment L*n*, et par suite à G_1N_1 et à la hauteur GN du triangle GOT; les bases *to* et TO de ces triangles sont aussi évidemment égales; l'angle *g* du premier est droit comme l'angle G du second, car la droite *tg*, ombre de la tangente TG, touche l'ellipse au sommet *g*; les deux triangles sont par conséquent égaux. On voit d'ailleurs que le sommet *o* le plus éloigné du pied L de la hauteur *g*L est homologue de T. L'angle GOD, égal à GTO, est donc aussi égal à l'angle *goa*. En résumé, *le diamètre du cercle dont l'ombre est le grand axe de l'ellipse fait avec une perpendiculaire au plan vertical le même angle que ce grand axe avec la ligne de terre.*

376. La méthode que nous avons employée dans cet exercice permet de ramener la détermination de l'ombre d'un corps à la construction des ombres d'un certain nombre des génératrices de sa surface, ce qui est généralement facile.

On peut recevoir les ombres sur un plan auxiliaire, si pour les tracés les plans coordonnés ne sont pas bien disposés par rapport au corps.

Trait ressenti.

377. Très-souvent dans le dessin géométral, au lieu de déterminer les ombres, on se contente d'indiquer par un trait plus prononcé, que l'on appelle *trait ressenti* ou *trait de force*, les arêtes qui séparent les faces éclairées de celles qui sont obscures, les rayons de lumière ayant d'ailleurs la direction que nous avons indiquée à l'article **374**.

Cette convention permet de distinguer à la première vue, sur une projection, les positions relatives des diverses parties. Il n'y a pas un accord complet entre les dessinateurs pour le tracé des corps arrondis; quelques-uns mettent un trait ressenti au contour apparent, du côté opposé à celui d'où vient la lumière; mais alors un cylindre est représenté comme un prisme, et la seconde projection seule fait comprendre sa forme.

CHAPITRE II.

OMBRES SUR LES FIGURES AXONOMÉTRIQUES ET CAVALIÈRES.

Considérations générales.

378. Quand on veut résoudre des problèmes sur des figures axonométriques et cavalières, on représente les points et les lignes par leur perspective et par la perspective de leur projection sur un plan horizontal. Ainsi sur la figure cavalière 184, le sommet de la pyramide est déterminé par sa perspective I, et par la perspec-

tive I_1 de sa projection sur le plan horizontal de la base. On peut, de cette manière, représenter les points et les lignes sans indétermination, si toutefois les éléments de la perspective sont connus, c'est-à-dire si l'on a la direction des axes de la figure axonométrique, ou la direction des lignes fuyantes, et le rapport de réduction de la figure cavalière.

Les traits de ces deux perspectives diffèrent peu ; les exercices d'ombre que nous allons présenter en feront connaître les principes.

Nous adopterons une notation analogue à celle qui est employée pour les figures géométrales. Ainsi nous dirons que le point (I, I_1) est le sommet de la pyramide représentée sur la *fig.* 184.

Polyèdres.

Ier Exercice. — *Ombres d'un prisme et d'une pyramide représentés par une perspective cavalière. — Rayons parallèles.* (*Fig.* 184.)

379. La *figure* 184 représente en perspective cavalière le prisme et la pyramide des *figures* géométrales 183. Les lignes perpendiculaires aux plans de front sont, en perspective, parallèles à la droite ef, et leurs longueurs mesurées à partir de l'axe xy sont réduites à moitié. Les perspectives des rayons de lumière et de leurs projections horizontales sont parallèles aux droites Ss, S_1s_1 perspectives des lignes $(Ss, S's')$ et Ss de la *fig.* 183 ([1]). Enfin la ligne XY est la trace sur le sol du parement d'un mur qui reçoit l'ombre de la pyramide.

Les plans d'ombre des arêtes B_1B et D_1D ont pour traces horizontales les droites B_1p et D_1r parallèles à S_1s_1. Le plan d'ombre de l'arête C_1C coupe la droite EG, la projection EI_1 de l'arête EI, et cette arête elle-même, aux points q, k_1 et k. L'intersection de ce plan d'ombre avec le plan EIG est donc qk. Les traces, sur cette face, des plans d'ombre des arêtes B_1B et D_1D sont les lignes pb et rd parallèles à qk : leurs extrémités b et d sont sur les perspectives des rayons qui passent par les points B et D. On détermine de la même manière l'ombre c du sommet (C, C_1).

380. Les perspectives du rayon de lumière qui passe par le sommet de la pyramide et de sa projection sont les droites Ii et I_1i respectivement parallèles à Ss et à S_1s_1. La trace horizontale de ce rayon est au point i où ces deux lignes se rencontrent. Sa trace sur le plan vertical XY est au point j de la verticale j_1j. Les points i et j étant obtenus, on établit sans difficulté les lignes de l'ombre portée par la pyramide.

On peut remarquer que le rapport de réduction et la direction ef des lignes fuyantes ne nous ont été d'aucune utilité pour la détermination des ombres.

([1]) La construction pour déterminer Ss et S_1s_1 est analogue à celle qui est expliquée à l'art. 392 pour un cas plus difficile.

IIe EXERCICE. — *Ombres d'un perron représenté par une perspective cavalière. — Rayons parallèles.* (*Fig.* 186.)

381. Nous allons traiter sur une figure cavalière le problème que nous avons déjà résolu, sur des figures géométrales, à l'article **324**.

L'ombre de l'arête verticale D_1D sur le plan horizontal du sol est une droite D_1d parallèle à la projection S_1s_1 du rayon de lumière; elle se termine au point d sur le rayon qui passe en D. Le plan d'ombre de la droite horizontale DKA_2 coupe le sol suivant une ligne *do* qui lui est parallèle, et le plan vertical du parement du mur suivant la droite qui passe par les points A_2 et o. Le point k limite du segment utile est sur le rayon du point K : on peut l'obtenir directement en le relevant de sa projection k_1. On construit de cette même manière l'ombre r du point R. Les lignes Ar et A_2o doivent être parallèles comme étant les ombres sur un même plan des droites parallèles RA et DA_2.

La ligne brisée $Ggg'j$ est l'ombre de GH; le segment gg' est parallèle à cette droite, et les deux autres à Ar. L'extrémité j se trouve sur le rayon du point H.

L'ombre de l'arête FH sur le plan de la marche supérieure est déterminée par le point F et par le point h, ombre de H et intersection du rayon Hj avec sa projection H_1j_1 : la partie *uv* est seule utile. L'ombre *it* de la même arête sur la marche précédente passe par l'ombre h_1 du point H sur ce plan, et est parallèle à Fh. Les droites *jv*, *ut* et *iq*, ombres de l'arête FH sur des plans de front, sont parallèles à *rk*.

Au-delà du point q situé sur le rayon du point F, nous avons l'ombre de l'arête FB formée de deux segments qp_1 et p_1p respectivement parallèles à Ar et à FB, et l'ombre de BB_1 formée de droites alternativement parallèles à Ss et à BB_1.

Cylindre, cône, sphère.

Ier EXERCICE. — *Ombres d'un perron représenté par une perspective isométrique. — Rayons parallèles.* — (*Pl. VIII.*)

382. La *fig.* 199 est une perspective isométrique, et par conséquent les lignes A_1B_1 et B_1k_1, qui représentent des droites parallèles aux directions principales horizontales, font des angles de 60° avec une verticale telle que B_1B. Les demi-cercles des marches sont projetés sur des moitiés d'ellipses isométriques : les demi-axes de la première sont les droites *cg* et *ch*, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle à B_1B. Leurs longueurs ont été prises sur les échelles (*fig.* 200), ainsi qu'il est expliqué à l'article **309**.

Le demi-cercle de tête est représenté par la moitié ANB d'une ellipse isométrique. La droite ACB est l'un des deux diamètres isométriques; l'autre, qui n'a

pas été tracé, est vertical. La droite CL, perpendiculaire à la direction isométrique CC′, est la moitié du grand axe (art. **309**).

Les rayons de lumière sont parallèles à la droite R, et leurs projections horizonteles, à la droite R_1.

383. Les droites A_1a_1 et Aa, respectivement parallèles à R_1 et à R, font trouver l'ombre A_1a_1a de l'arête A_1A sur le plan horizontal de la marche supérieure, et sur le plan vertical dont la trace est k_1a_1.

Ce plan étant parallèle au plan de tête, tous les rayons de lumière Aa, Ee,... ont la même longueur entre la courbe de tête et son ombre. Les deux lignes AEK et *aek* sont identiques : ce sont des projections sur un même plan des intersections d'un cylindre par deux plans parallèles.

Pour avoir la position précise du point k où la courbe d'ombre rencontre l'arête verticale, on trace k_1K_1 parallèlement à R_1, et relevant le point K_1 sur la courbe de tête, on obtient le point K dont l'ombre est le point cherché.

384. L'ombre de la courbe de tête sur l'intrados [1] de la voûte est l'intersection de deux cylindres du second degré qui ont une directrice plane commune, la courbe ANB; nous concluons de là que la ligne d'ombre est plane (art. **252**, 1°); c'est une ellipse, mais nous la construirons sans avoir égard à ses propriétés spéciales, et par la méthode générale que nous avons fait connaître pour les intersections des surfaces cylindriques (art. **223**).

En menant du point a_1 des droites a_1F et $a_1\varphi$ respectivement parallèles à R et à k_1B_1, on détermine, sur le plan de tête, la trace $F\varphi$ du plan passant par le point a_1 et parallèle aux droites R et k_1B_1 qui déterminent les directions des génératrices des deux cylindres.

Une sécante NN′, parallèle à $F\varphi$, peut être considérée comme la trace d'un plan sécant auxiliaire. Par conséquent, le rayon de lumière qui passe par le point N rencontre la génératrice de l'intrados qui aboutit en N′. On détermine ainsi un point n de la courbe de l'ombre portée.

Les traces, sur le plan de tête, des plans tangents aux deux cylindres sont les tangentes Nt et $N't$: leur intersection t appartient à la tangente nt de la courbe d'ombre au point n.

Lorsque les points N et N′ se réunissent, le triangle $NN'n$ se réduit à un point; l'extrémité de l'arc utile se trouve donc au point où la tangente à la courbe ANB est parallèle à NN′ ou à $F\varphi$. Son origine est sur la génératrice de naissance Bu, au point u dont on obtient la position précise en menant par le point B une parallèle BU à $F\varphi$, et par le point U une droite Uu parallèle à R.

---

[1] L'*intrados* d'une voûte en est la surface inférieure et concave. L'intrados de la porte que nous considérons est un cylindre qui a pour directrice la courbe de tête ANB, et dont les génératrices sont perpendiculaires au plan de tête. Les génératrices de naissance sont celles qui passent par les extrémités A et B de la courbe de tête.

385. La ligne uk est l'ombre de l'arc UK sur le plan du pied-droit. On l'obtient par la même construction, en regardant ce plan comme un cylindre qui a pour directrice la verticale B_1B, et dont les génératrices sont parallèles à B_1k_1. On pourrait aussi obtenir le point où un rayon rencontre le plan du pied-droit, en relevant l'intersection de sa projection horizontale avec B_1k_1.

386. En menant aux ellipses qui représentent les cercles inférieurs des cylindres des marches les tangentes $\alpha_1\gamma$ et $\beta_1\delta$ parallèles à R_1, on détermine les extrémités α_1 et β_1 des génératrices de séparation d'ombre et de lumière. Les droites $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$, parallèles à R, font connaître les extrémités γ et δ des ombres de ces génératrices.

On obtient l'ombre δ' d'un point β' de l'arête saillante d'une marche, sur le plan horizontal de la marche voisine, en portant sur la parallèle à R menée par le point β' une longueur égale à $\beta\delta$. Les arcs γx et $\delta\eta$ sont évidemment identiques à ceux dont ils sont les ombres.

387. Pour construire l'ombre de l'arête $\beta'\rho$ sur le plan de tête, par un point m de cette courbe nous faisons passer un plan parallèle aux rayons de lumière et à la droite B_1k_1; ses intersections avec le plan supérieur de la marche, le cylindre d'ombre et le plan de tête, sont les droites mm_1, $m\mu$ et $m_1\mu$, respectivement parallèles à B_1k_1, R et $F\varphi$. Le point μ, où se rencontrent les deux dernières, est l'ombre de m. L'ombre de la ligne $m\rho$ sur le plan de tête est l'arc $\rho\mu$; on obtiendrait deux diamètres conjugués de l'ellipse à laquelle il appartient, en déterminant les ombres des axes ou celles des diamètres isométriques de l'ellipse $\beta\beta'\rho$.

L'ombre γx rencontre en un point x l'arête $\beta\beta'\rho$. Le rayon de lumière qui passe à ce point rencontre l'arête $\alpha\varepsilon$ en un point y, et est l'intersection des cylindres d'ombre des deux arêtes. La courbe $\rho\mu$ n'est utile qu'à partir du point π où ce rayon la rencontre, jusqu'au point η où elle coupe la ligne de terre du mur. La courbe $\varepsilon\pi$ est l'ombre de l'arc εy.

388. *Étude des ellipses d'ombre.* — Nous avons vu comment on peut construire la courbe kpn; nous allons maintenant étudier les ellipses auxquelles appartiennent les deux arcs dont elle est formée, et voir quelles relations géométriques elles ont avec l'ellipse perspective de la courbe de tête.

Nous nous occuperons d'abord de l'ellipse d'ombre sur l'intrados de la voûte. La courbe de tête étant ANB (*fig.* 202), pour obtenir un point n, on trace une sécante NN′ dans une direction donnée, puis deux droites Nn et $N'n$ respectivement parallèles aux rayons de lumière et aux génératrices du berceau.

Si nous ne savions pas que le lieu des points n doit être une ellipse, quand la courbe ANB en est une, il serait facile de le reconnaître. Traçons le diamètre IJ qui passe par le milieu O de la corde NN′, et joignons le point O au point n; ensuite par le centre C de la courbe ANB menons les droites MM′ et mm' respectivement parallèles à NN′ et à On, et concevons que les deux courbes soient rapportées l'une aux axes IJ et MM′, l'autre aux axes IJ et mm' : deux points homo-

logues N et n auront la même abscisse CO, et des ordonnées ON et on qui seront dans un rapport constant; les équations auront donc la même forme, ce qui prouve la proposition énoncée. Par la construction, les diamètres IJ et MM′ sont conjugués dans la première ellipse : les diamètres IJ et mm' seront donc conjugués dans la deuxième.

Les tangentes aux points homologues N et n rencontrent l'axe IJ en un même point t.

389. Le quatrième sommet n' du parallélogramme NnN′n' appartient à la courbe mn.

Si l'on mène à l'ellipse MNB une tangente VV′ parallèle à N′n, cette droite sera le contour apparent du cylindre d'intrados; la seconde ellipse devra donc lui être tangente. On voit ainsi que le parallélogramme formé par les tangentes communes aux deux ellipses a ses côtés parallèles à ceux du parallélogramme NnN′n'.

390. Les relations qui existent entre les ellipses résultent uniquement de ce qu'elles ont un diamètre commun IJ; elles se coupent d'ailleurs en deux points autres que I et J, et le diamètre sur lequel ils se trouvent jouit, dans le système des courbes, des mêmes propriétés que IJ. Les deux ellipses sont donc reliées par une seconde suite de parallélogrammes ayant également leurs côtés parallèles aux tangentes communes, et dont les diagonales sont les cordes conjuguées au nouveau diamètre.

391. Occupons-nous maintenant de la courbe d'ombre sur le parement du pied-droit. La courbe de tête étant ANB (*fig.* 201), nous traçons dans une direction donnée une sécante PG qui coupe la tangente verticale BT au point P′, et l'ellipse d'abord au point P, puis en un autre point très-voisin de P′. Par les points P et P′ nous menons des droites respectivement parallèles à des lignes données : leur point d'intersection p appartient à la courbe. Les milieux G et g des cordes correspondantes des deux ellipses sont sur une droite parallèle à Pp.

Le mode de transformation est facile à saisir, et l'on voit que la nouvelle courbe st une ellipse comme la courbe donnée. Le diamètre SH conjugué aux cordes parallèles à PP′ a pour homologue le diamètre sh conjugué à la direction pP′. Les ellipses ont deux tangentes communes parallèles à Pp.

Dans la transformation, les points de l'ellipse SH sont tous rapprochés de la tangente S′H′, et par suite des deux côtés du point de contact B, la courbe sh se trouve entre la tangente et la courbe SH. Si les données étaient telles qu'un point P s'éloignât de la tangente en passant à sa nouvelle position, tous les points de la courbe primitive s'éloigneraient également de S′H′, et près du point B, la transformée serait dans la concavité de la courbe SH. Enfin si la droite Pp était parallèle à S′H′, tous les points de la courbe primitive seraient transportés parallèlement à cette ligne, et la transformée traverserait tangentiellement la courbe SH au point B; elle aurait, par conséquent, un contact du second ordre avec elle.

Ces résultats dépendent évidemment du mode de transformation, et nullement de la nature de la courbe.

II[e] EXERCICE. — *Ombre d'une niche représentée par une perspective axonométrique. — Rayons parallèles.* (*Fig.* 208.)

392. Nous nous proposons de déterminer les ombres de la niche représentée sur la figure axonométrique 208 reproduite de la *Pl. XLIX* de la première Partie de ce Traité. Cette niche est la même que celle dont nous avons construit les ombres sur un plan et une élévation (art. **336-341**); nous la supposons éclairée par les mêmes rayons.

La *fig.* 209 donne les projections des axes, et leurs inclinaisons (art. **82** et **298**). Les trois directions principales sont une horizontale du plan de tête, une verticale et une perpendiculaire à ces deux lignes. Nous appelons *plan de front* tout plan parallèle au plan de projection.

Les longueurs des projections du rayon de lumière (Mc, M′C′) (*fig.* 206) sur les directions principales sont MC, Cc et M′d. Nous portons ces segments sur A'_1S', B'_1S' et C′S′ (*fig.* 209), et les projetant sur XY, nous obtenons les grandeurs en perspective des trois projections d'un rayon. Si maintenant nous prenons sur l'axe Sx, et sur des parallèles aux deux autres axes des segments Sα, $\alpha\beta$ et $\beta\delta$ respectivement égaux aux longueurs $A'_1\alpha_1$, $B'_1\beta_1$ et $C'\gamma_1$ que nous venons de trouver, nous pourrons tracer les droites Sδ et Sβ perspectives d'un rayon de lumière, et de sa projection horizontale. Les flèches R et R_1 sont tracées parallèlement à ces lignes.

Nous déterminerons la projection Sγ du rayon de lumière sur le plan zSx, par une construction analogue à celle qui nous a fait trouver la projection Sβ.

393. Les constructions à faire sur la perspective axonométrique sont analogues à celles que nous avons expliquées aux articles **336** et suivants.

Nous traçons la droite A_1a_1 parallèle à R_1, nous élevons la verticale a_1a, et nous la terminons au point a sur le rayon issu du point A.

La courbe *ake* est l'intersection du cylindre d'ombre qui a pour directrice la courbe de tête AKB, avec le cylindre de la niche.

Le plan vertical qui contient le rayon Kk coupe le plan de naissance et le cylindre de la niche suivant les droites K_1k_1 et k_1k; l'ombre du point K est donc en k. La tangente de la courbe d'ombre en ce point est l'intersection des plans tangents aux deux cylindres. Le plan tangent au cylindre d'ombre contient la tangente Kf à la courbe de tête, et le rayon Kk; sa trace sur le plan de naissance est la droite *fui* qui passe par les traces f et u de ces deux droites. La trace du plan tangent au cylindre de la niche est la droite k_1i en k_1 à l'ellipse k_1eB. Le point de rencontre i appartient à la tangente cherchée.

394. Il faut maintenant déterminer l'intersection de la sphère par le cylindre

d'ombre. Nous traçons tout d'abord le cercle qui serait le contour apparent de la sphère si elle était en relief : son rayon est égal au demi grand axe de l'ellipse AB. On l'obtient en traçant la droite Cv (*fig.* 208) parallèle à CA (*fig.* 209) (art. **299**).

Nous coupons les deux surfaces par des plans auxiliaires parallèles aux rayons de lumière et perpendiculaires aux plans de tête (art. **338**).

La projection $S\gamma$ du rayon de lumière perce le plan de la figure au point E où il coupe la droite CA trace du plan xSz (*fig.* 209) : le point B est la trace de l'axe Sy perpendiculaire à ce plan; la droite BE est donc la trace du plan qui projette le rayon $S\delta$ sur le plan xSz.

Nous menons par le point C (*fig.* 208) deux droites CM et CL, respectivement parallèles à ES et EB (*fig.* 209) : ce sont les traces du plan auxiliaire passant par le point C, sur le plan de tête, et sur le plan de front qui contient le centre de la sphère. Si nous faisons tourner ce plan auxiliaire autour de CL pour le rabattre sur le plan de front, le cercle suivant lequel il coupe la sphère se placera sur le cercle dont le rayon est Cv. Dans ce mouvement, le point M se transportera en M_1 sur une perpendiculaire MM_1 à CL.

Le rayon de lumière qui passe par le point M coupe en un point l l'axe du mouvement. Il devient donc après le rabattement $M_1 l$, et il rencontre la sphère au point M' du cercle vL. Lorsque le plan auxiliaire est remis dans sa position, le point M' se projette en μ à l'intersection du rayon Ml avec la perpendiculaire abaissée du point M' sur CL.

Si nous traçons $C\mu$, le triangle $CM\mu$ sera la perspective du triangle $C''M''\mu''$ de la *fig.* 206.

L'intersection du plan de la courbe d'ombre et du plan de tête est perpendiculaire au plan auxiliaire; sa projection est donc la droite CG, perpendiculaire à la trace CL de ce plan.

395. Sur la *fig.* 206, un point n' de la courbe d'ombre $e'G$ est donné par un triangle $C''N''n''$ homothétique à $c''M''\mu''$; le point N'' est sur la courbe $A'E'B'$, et le point C'' sur le diamètre PG. D'après cela, si nous traçons une droite NN' parallèle à MC (*fig.* 208), puis les lignes Nn et $N'n$ respectivement parallèles à $M\mu$ et à $C\mu$, le point n appartiendra à la ligne d'ombre Ge, qui est évidemment une ellipse. Cette courbe prolongée passerait par le point μ.

La tangente $n\nu$ est l'intersection du plan de la courbe avec le plan tangent au cylindre d'ombre.

Les rayons $C'M'$ et $C'G$ (*fig.* 206) sont rectangulaires; leurs projections CM et CG (*fig.* 208) sont donc des demi-diamètres conjugués de l'ellipse AMB. La construction qui fait trouver l'ellipse $\mu e G$ est identique avec la transformation que nous avons exposée aux articles **154** et **314**. On voit d'après cela que CG et $C\mu$ sont des diamètres conjugués de cette conique; on peut donc obtenir ses axes

par la construction expliquée à l'article **153**, mais il est plus simple de remarquer que le grand axe est sur la droite d'intersection du plan de la courbe d'ombre avec le plan de front du centre de la sphère. Les droites Sλ et Sρ (*fig.* 209), respectivement parallèles à CG et à Cμ, sont les traces d'un plan mené par le point S parallèlement au plan d'ombre, sur les plans xSz et BSE, parallèles l'un au plan de tête, et l'autre aux plans auxiliaires. Ces lignes percent le plan de la figure aux points λ et ρ : le grand axe de l'ellipse μeG est donc parallèle à la droite $\lambda\rho$; sa longueur est d'ailleurs égale au diamètre de la sphère.

La droite Ce est dans le plan de naissance et dans celui de la courbe. Les traces des plans menés par le point S parallèlement à ceux-là sont AB et $\lambda\rho$ (*fig.* 209). La ligne Ce est donc parallèle à la droite qui irait du point S à celui où les traces AB et $\lambda\rho$ se rencontrent. Nous n'avons pas tracé cette droite par crainte de confusion.

396. Nous croyons que cet exercice suffira pour montrer comment on doit disposer, sur une perspective axonométrique, les constructions qui correspondent aux divers tracés des figures géométrales. Il n'est pas toujours nécessaire d'établir une figure auxiliaire représentant les projections de l'angle trièdre des axes, et d'y déterminer les directions des principales lignes, mais cette méthode introduit beaucoup de clarté dans l'épure, et il est bon de l'adopter comme règle générale.

III[e] EXERCICE. — *Ombres d'une niche représentée par une perspective cavalière. — Rayons parallèles.* (*Fig.* 203.)

397. La niche représentée sur la figure cavalière 203 est la même que celle qui vient de nous occuper, mais la direction (R, R_1) des rayons est différente. Les lignes perpendiculaires aux plans de front sont réduites à la moitié de leur grandeur; la droite F fait connaître leur direction.

Les droites A_1a_1 et Aa, respectivement parallèles à R_1 et à R, font trouver l'ombre A_1a_1a de l'arête A_1A sur le plan horizontal A_1B_1, et sur le cylindre de la niche.

Une génératrice (Kk, K_1k_1) du cylindre d'ombre perce le cylindre de la niche en un point k que nous déterminons d'après sa projection k_1. Les plans tangents aux deux cylindres en k ont pour traces sur le plan de tête KT et T_1T : la droite Tk est donc la tangente de la courbe en k.

398. Pour construire l'intersection de la sphère par le cylindre d'ombre, nous emploierons, comme précédemment, des plans auxiliaires parallèles aux rayons de lumière et perpendiculaires aux plans de tête. Si du point a_1 nous menons les droites a_1A′ et a_1a' respectivement parallèles à R et à F, nous pourrons tracer la droite A′a' qui sera parallèle aux intersections des plans auxiliaires avec le plan de tête.

Considérons maintenant le plan auxiliaire passant par le centre de la sphère : ses intersections avec le plan de tête, le cylindre d'ombre et le plan de naissance sont les droites CM, MD et CD respectivement parallèles aux trois côtés du triangle $a'A'a_1$. Si nous rabattons ce plan sur le plan de tête par une rotation autour de CM, la ligne fuyante CD se placera sur la droite Cd d'une longueur double, et perpendiculaire à CM ; le rayon de lumière MD deviendra Md, et le cercle de section avec la sphère se confondra avec BMAm'. L'ombre de M se trouvera donc au point m' ; on la ramènera en m sur MD, en traçant les droites m'M′ et M′m respectivement parallèles à dC et à CD. On pourrait, sans déterminer le point M′, tracer une droite $m'm$ parallèle à celle qui irait du point d au point D. L'intersection du plan d'ombre avec le plan auxiliaire est Cm.

Le plan de la courbe d'ombre et le plan de tête sont perpendiculaires aux plans auxiliaires, et notamment à celui qui contient le centre de la sphère ; leur intersection est donc la droite CG perpendiculaire à la trace MC de ce plan et passant d'ailleurs par le centre C.

Maintenant, pour avoir un point n de l'ellipse d'ombre, il suffit de tracer les droites N′N, Nn et N′n respectivement parallèles à CM, Mm et Cm. La génération de cette courbe et la construction de ses tangentes donnent lieu aux mêmes observations que dans l'exercice précédent : ainsi Cm et CG sont deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse emnG.

On pourrait construire cette courbe en coupant la sphère et le cylindre par des plans de front.

599. Pour avoir le point e où se joignent les deux ellipses, nous remarquons que le plan auxiliaire qui passe par le centre, le plan de naissance et le plan de la courbe d'ombre sur la sphère, se coupent suivant les droites Cm, CD et Ce, dont la troisième seule est inconnue. Les traces de ces trois plans sur le plan de tête sont CM, AB et CG. Donc, si nous les coupons par un plan de front passant par un point quelconque α de Cm, les intersections seront $\alpha\beta$ parallèle à CM, et des droites passant l'une par β, l'autre par α, et respectivement parallèles à AB et à CG : leur intersection donnera un point γ de la droite Ce.

CHAPITRE III.

TRANSFORMATION HOMOLOGIQUE.

Notions sur les figures homologiques.

400. Nous allons généraliser les constructions que nous avons présentées aux articles **388-391**, sur les ellipses produites par les ombres des cercles, et rechercher les relations qui existent entre les projections d'une figure plane et de son ombre sur un plan. Les résultats auxquels nous parviendrons sont utiles non-seulement pour le tracé des ombres, mais encore pour diverses autres constructions, notamment dans la perspective.

Si un plan XYZV ou P′ (*fig.* 221) reçoit l'ombre M′ d'une figure plane M éclairée par un point lumineux S, les relations suivantes existeront évidemment entre les deux figures M et M′ :

1° Deux points homologues, c'est-à-dire un point quelconque A et son ombre A′, seront sur un rayon de lumière SAA′.

2° Les points qui sont en ligne droite sur l'une des figures auront pour homologues des points de l'autre figure également en ligne droite.

3° Les points de l'une des figures qui sont sur l'intersection XY des deux plans seront leurs homologues dans l'autre figure.

Si la figure M s'étendait sur le prolongement du plan P au delà de P′, un point de cette figure situé au delà de XY ne pourrait pas porter ombre sur P′, mais au contraire recevrait l'ombre d'un point de ce plan, qui serait son homologue. Pour que les considérations que nous allons présenter puissent être admises sans restriction, il faut considérer la figure M′ comme la *projection conique* de la figure M, c'est-à-dire comme la section par le plan P′ d'un cône qui aurait son sommet au point fixe S, et les différentes lignes de la figure M pour directrice [1]. Toutefois nous continuerons à employer les mots d'*ombre* et de *rayon de lumière,* qui font image et qui montrent la connexion de cette question avec notre sujet.

401. Les relations que nous avons reconnues entre les figures M et M′ existent entre leurs projections *m* et *m′* sur un plan Q, et par suite :

1° Les figures *m* et *m′* se correspondent point à point, et de telle sorte que deux points homologues sont sur des droites qui divergent d'un point *s*.

---

[1] Nous avons déjà eu l'occasion de parler de la projection conique dans une note de l'article 183.

2° Les points qui sont en ligne droite sur l'une des figures ont pour homologues des points de l'autre figure également en ligne droite.

3° Les points de l'une des figures qui sont sur une certaine droite xy sont leurs homologues dans l'autre figure.

M. Poncelet a appelé *homologiques* les figures tracées sur un plan et qui ont entre elles les relations que nous venons d'exposer. La droite xy et le point s sont l'*axe* et le *centre* d'homologie; les droites qui divergent du point s sont *les rayons d'homologie;* enfin l'une quelconque des figures est la *transformée* de l'autre par homologie (1).

402. La transformée homologique m' d'une figure donnée m est déterminée quand on connaît le centre et l'axe d'homologie, et le point a' homologue d'un point quelconque a de la figure m. On peut en effet obtenir le point b' homologue d'un point b choisi arbitrairement, par la rencontre du rayon d'homologie sb, et de la droite $a'd$ homologue de abd.

403. Quand les côtés de deux triangles ABC, A'B'C', situés dans des plans différents, se rencontrent deux à deux en des points D, E, F nécessairement en ligne droite, ils déterminent trois plans qui se coupent deux à deux suivant les droites AA', BB' et CC'; ces lignes convergent par conséquent vers un point S.

On peut étendre cette proposition à deux triangles abc, $a'b'c'$ situés sur un plan : s'ils ont un axe d'homologie, c'est-à-dire si leurs côtés se rencontrent deux à deux sur une droite xy, ils ont un centre d'homologie vers lequel convergent les droites qui passent par les sommets homologues. Car si nous relevons les triangles sur deux plans P et P' dont l'intersection XY se projette sur xy, d'après ce que nous venons de voir, les droites qui passeront par les sommets homologues se rencontreront en un point S; les projections de ces lignes sur le plan des triangles abc et $a'b'c'$ passent donc par la projection s de S.

Réciproquement, deux triangles qui ont un centre d'homologie ont aussi un axe d'homologie, car on voit facilement qu'ils peuvent être considérés comme les projections de deux triangles dont l'un serait l'ombre de l'autre (2).

---

(1) Les figures homologiques sont très-souvent considérées en dehors des questions d'ombre auxquelles nous les rattachons ici. M. Poncelet les a présentées comme résultant de la projection conique (ou perspective) de deux figures homothétiques situées sur un même plan (*Propriétés projectives*, art. 297 et suivants).

(2) Nous donnerons ici l'énoncé d'un double théorème qui peut être utilisé en perspective : *Quand deux figures* A *et* A' *sont homologiques d'une troisième* B, *elles sont homologiques entre elles, pourvu toutefois que les deux premières homologies aient pour axe la même droite, ou pour centre le même point. Dans le premier cas, les centres d'homologie des figures prises deux à deux sont en ligne droite; dans le second, les trois axes d'homologie passent par un même point.*

Pour la démonstration, il faut regarder les figures B, A et A', dans le premier cas, comme les projections d'une figure plane éclairée par deux points lumineux et de ses ombres sur un plan; dans le second, comme les projections d'une figure plane éclairée par un point lumineux et de ses ombres sur deux plans.

404. On peut justifier par ce théorème une construction que nous avons établie à l'article **226** par d'autres raisonnements. Il s'agit d'avoir la tangente de la courbe QQ_1 au point C (*fig.* 124), et pour cela de faire passer une droite par le point C et par le point éloigné où les deux droites *c*G et *m*E se rencontrent. Nous coupons ces lignes par deux droites *cm*K et GFK; nous traçons ensuite *m*C et *c*CS, puis par les points K et F deux lignes KS et FI parallèles à *m*C, enfin la droite GS. Nous avons ainsi deux triangles *mc*C et FGI dont les côtés se rencontrent deux à deux au point K, au point S, et au point de KS situé à l'infini; cette droite est ainsi un axe d'homologie, et les droites *m*F, *c*G et CI, rayons d'homologie, doivent se rencontrer en un même point.

405. On voit que la construction donnée à l'article **68** peut être généralisée, et qu'il n'est pas nécessaire que les triangles ABC et *abc* (*fig.* 53) soient semblables, mais seulement que les points de concours de leurs côtés homologues soient en ligne droite. On peut ainsi simplifier quelquefois les tracés, en utilisant des lignes déjà établies.

406. Deux figures homologiques *m* et *m'* (*fig.* 221) peuvent toujours être considérées comme les projections sur un plan Q de deux figures planes dont l'une serait l'ombre de l'autre.

Supposons en effet qu'on relève la figure *m* et l'axe *xy* sur un plan quelconque P, le centre *s* en un point S hors de ce plan et un point *a'* de *m'* en A' sur le rayon SA : si l'on fait passer un plan P' par la droite XY et par le point A', qu'on reçoive sur lui l'ombre M' de M et qu'on la projette sur le plan Q, on aura une figure homologique de *m*, dont le point S et la droite *xy* seront le centre et l'axe d'homologie, et dont le point homologue de *a* sera *a'*; elle se confondra nécessairement avec *m'* (art. **402**).

Il résulte de là que dans les figures homologiques la courbe homologue d'une section conique est une section conique, et que, quand deux courbes sont tangentes l'une à l'autre, leurs homologues sont également tangentes.

407. Un plan RII'K ou P'_1 mené par le point S parallèlement à P' coupe le plan P suivant une droite II' dont tout point a pour homologue sur P' un point à l'infini. La projection *ii'* de cette ligne, qui est évidemment parallèle à *xy*, représente sur la figure *m* tous les points de la figure *m'* qui sont à l'infini : c'est la *ligne de fuite* de la figure *m* relativement à la figure *m'*. Pour en déterminer graphiquement un point *u*, on mène par le centre *s* un rayon d'homologie parallèle à une droite quelconque *ea'* de la figure *m'*, jusqu'à la rencontre de son homologue *ea*.

Si la courbe *m* avait rencontré la droite *ii'*, son homologue *m'* aurait eu des branches infinies.

Il y a entre les deux figures un parallélisme complet de propriétés et de relations; par conséquent la figure *m'* a relativement à la figure *m* une ligne de fuite

jj' parallèle à xy : on en détermine un point t par une construction analogue à celle que nous avons expliquée, c'est-à-dire en menant par le centre s un rayon d'homologie parallèle à une droite ac de la figure m, jusqu'à la rencontre de son homologue $a'c'$.

408. Des points situés sur le plan P′ sont en ligne droite, quand leurs homologues du plan P se trouvent eux-mêmes sur une droite; or les homologues des points à l'infini du plan P′ sont sur une ligne II′, intersection de deux plans : donc tous les points d'un plan situés à l'infini doivent être considérés comme étant distribués sur une droite située elle-même à l'infini ([1]). En général la direction de cette ligne est indéterminée, mais dans une question spéciale on peut être conduit à lui attribuer une direction : ainsi les points à l'infini du plan Q, regardés comme appartenant à la figure m', homologue de m, sont sur une droite parallèle à xy.

409. Quand les rayons de lumière sont parallèles, les rayons d'homologie le sont également. Le centre s et les lignes de fuite ii' et jj' disparaissent à l'infini. Aucun point à distance finie sur l'une des figures ne peut correspondre à un point à l'infini sur l'autre : une ellipse a nécessairement pour homologue une ellipse.

Cette circonstance se présente sur les *fig.* 201 et 202. L'axe d'homologie est pour la première S′T, et pour la seconde IJ. Les rayons d'homologie sont parallèles à R; on peut aussi, sur la *fig.* 202, les prendre parallèles aux génératrices de l'intrados, car sous le rapport géométrique il n'y a aucune différence essentielle entre les cylindres qui se coupent suivant les deux courbes dont nous considérons les projections. Le point M a pour homologue dans le premier mode m et dans le second m'.

Le demi-cercle de tête d'une niche sphérique, et son ombre sur la sphère, qui est une courbe plane, donnent lieu à des observations analogues (*fig.* 203, 206 et 208).

Quand les plans P et P′ (*fig.* 221) sont parallèles, l'axe xy et les lignes de fuite s'éloignent à l'infini, et les courbes m et m', projections de deux sections parallèles d'un cône, sont homothétiques. La similitude est donc un cas particulier de l'homologie.

Application des théories précédentes aux sections coniques. Propriétés fondamentales des pôles et des polaires.

410. Considérons deux sections coniques M et M′ tracées sur un plan (*fig.* 225), et le point de concours s de deux quelconques de leurs tangentes communes : nous pouvons regarder M comme la trace d'un cône dont le sommet S se projette

---

([1]) M. Poncelet (*Propriétés projectives*, art. 96).

en s, et M′ comme la trace d'un cylindre perpendiculaire au plan de la figure que nous supposons horizontal. Chacune de ces surfaces est tangente le long d'une droite aux plans verticaux dont les traces sont sE et sG; elles se touchent donc en deux points; et, comme elles sont du second ordre, leur intersection est composée de deux courbes planes (art. **252**, 2°) que nous appellerons N et N′ (¹).

La courbe M peut être considérée comme l'ombre de la conique N éclairée par un point lumineux placé en S. La ligne M′, projection de N sur le plan de M, est donc homologique avec cette courbe par rapport au point s. On trouve une seconde homologie en regardant les coniques M et M′ comme l'ombre et la projection de la ligne N′ pour des rayons divergents du point S. Les axes d'homologie sont les traces des plans des courbes N et N′.

Nous voyons donc que *deux sections coniques tracées sur un plan sont homologiques de deux manières différentes, par rapport au point de concours de deux quelconques de leurs tangentes communes, considéré comme centre d'homologie.*

Les points A et a situés sur une droite divergeant du point s sont respectivement homologues de A′ et de a' dans un des modes, de a' et de A′ dans l'autre. Les points de contact E et G sont toujours homologues de E′ et de G′. D'après cela, et en opérant comme il a été dit plus haut, on trouve facilement les axes d'homologie XY, X_1Y_1 et les lignes de fuite qui leur correspondent (art. **407**). L'une des deux lignes de fuite parallèles à X_1Y_1 n'a pas pu être placée sur la figure.

411. Le point de contact de deux sections coniques tangentes peut être considéré comme le point de concours de deux tangentes communes qui se sont confondues en une seule : c'est donc un centre d'homologie des sections coniques.

On peut démontrer directement cette proposition, en s'appuyant sur le quatrième théorème de l'article **252**, et raisonnant d'ailleurs comme nous l'avons fait à l'article précédent.

412. Comme application de ces théories, nous allons nous proposer de déterminer le centre et les axes d'une section conique dont nous connaissons trois points N, M, Q (*fig.* 222), et les tangentes NS et MS. Cette question s'est présentée à l'article **258** pour la projection verticale de l'intersection de deux ellipsoïdes de révolution dont les axes se rencontrent, mais nous ne pouvions pas alors développer la solution. Les données de la *fig.* 222 sont relevées sur la *fig.* 137, de sorte que la première doit être considérée comme un complément de celle-ci.

Tout cercle qui touche les deux tangentes MS et NS est homologique de la courbe, par rapport au point S, centre d'homologie. On prend les points de contact m et n homologues de M et de N, à une même distance de S; on détermine ensuite le centre O, et on trace la circonférence.

(¹) En se donnant la hauteur du sommet du cône au-dessus du plan de la courbe M, on peut se proposer, comme exercice graphique, de déterminer les vraies grandeurs des deux courbes N et N′.

On peut prendre à volonté pour point homologue de Q l'un ou l'autre des deux points où le rayon d'homologie QS coupe le cercle : nous avons choisi celui qui est indiqué par la lettre q. Toutes les relations du système sont maintenant déterminées.

413. Le point situé à l'infini sur la sécante MQ a pour homologue le point i, intersection de mq et du rayon d'homologie Si, parallèle à MQ. On détermine de la même manière le point i', homologue du point situé à l'infini sur MN, et on trace la ligne de fuite ii'. Elle coupe le cercle en deux points r et t auxquels correspondent sur la section conique deux points à l'infini. Cette courbe est donc une hyperbole, ainsi que nous l'avons dit dans la note de l'article **258**.

Les asymptotes étant tangentes à la courbe aux points situés à l'infini sont homologues des tangentes rr' et tt' du cercle; par conséquent, en reportant sur la droite MN par des rayons d'homologie les points d et e où la sécante mn rencontre les tangentes, on obtient des points D et E qui appartiennent aux asymptotes. Ces lignes sont d'ailleurs parallèles aux rayons d'homologie Sr et St qui passent par les points situés à l'infini; il est donc facile de les tracer et d'obtenir ensuite les axes qui sont leurs bissectrices.

414. On peut disposer la construction d'une autre manière en déterminant l'axe d'homologie.

Les couples de droites homologues déjà établies sur la figure ont leur point de concours hors du cadre, et par conséquent nous devons en tracer de nouvelles, convenablement choisies. Prenons sur la ligne ii' un point p, et joignons-le à S et à q : le point homologue de p est à l'infini sur Sp, et la ligne homologue de qp est la droite Qβ, parallèle à Sp. Le point de rencontre β de deux droites homologues appartient à l'axe d'homologie que nous savons être parallèle à la ligne de fuite ii'.

Les tangentes $r'r$ et $t't$ rencontrent l'axe d'homologie en r_1 et en t_1; les asymptotes passent donc respectivement par ces points.

415. Si l'on veut avoir la position exacte du sommet A sur l'axe transverse BB', on déterminera la droite $h\alpha$, homologue de cet axe, et l'on ramènera sur BB', par un rayon d'homologie, le point a où elle rencontre le cercle. La droite $h\alpha$ passe par le point α de l'axe d'homologie, et par le point h, homologue du point H où BB' coupe MN. Nous n'avons pas laissé subsister le rayon d'homologie Hh, pour ne pas augmenter le nombre des droites qui se croisent au point S.

416. Nous avons résolu le problème pour le cas où la conique a des asymptotes; il nous reste à établir des relations générales qui permettent d'opérer lorsque la ligne de fuite ne rencontre pas le cercle auxiliaire.

Soit A (*fig.* 223 ou 224) une conique qui doit éprouver la transformation homologique, et ii' la droite dont les points s'éloigneront à l'infini. Deux tangentes lm et ln issues d'un point l de cette ligne auront pour homologues deux droites paral-

lèles; la sécante *mn* deviendra donc un diamètre. Le point homologue du centre de la transformée est l'intersection de cette ligne, et d'une autre sécante *m'n'* déterminée de la même manière.

Une droite *mn* qui passe par les points de contact de deux tangentes issues d'un point *l* est dite la *polaire* de ce point, et celui-ci est le *pôle* de la droite.

Nous voyons donc que les polaires des différents points de la ligne de fuite passent toutes par un même point qui est homologue du centre de la transformée.

D'après une propriété connue des courbes du second ordre, le point *c* est sur le diamètre conjugué de *ii'*, et sa distance au centre O est donnée par la relation

$$\mathrm{O}c \times \mathrm{O}b = \overline{\mathrm{O}e}^2.$$

Quelles que soient la nature de la conique considérée et la position de la ligne *ii'* dans son plan, la quantité $\overline{\mathrm{O}e}^2$ sera réelle, et l'équation fera connaître une grandeur également réelle pour le segment O*c*.

Le point *c* est le pôle de la droite *ii'* (*fig.* 223), car si l'on suppose que la sécante *mn* tourne autour du point *c* jusqu'à devenir tangente, les points *m* et *n* situés de part et d'autre de *ii'* se réuniront sur cette ligne, avec le point *l*, en *k* ou en *k'*. Sur la *fig.* 224 les tangentes issues du point *c* sont imaginaires, mais ce point jouit, par rapport au système de la section conique A et de la droite *ii'*, de toutes les propriétés dans lesquelles ces tangentes ne figurent pas : on dit encore que c'est le pôle de la ligne *ii'*, et que cette droite est sa polaire. On peut donc énoncer la proposition que nous avons établie plus haut, en disant que, *lorsqu'une section conique éprouve la transformation homologique, le pôle de la ligne de fuite est homologue du centre de la transformée*.

D'après cela, le point de concours des tangentes *tt'* et *rr'*, pôle de la ligne de fuite *ii'* (*fig.* 222), est homologue du centre C de l'hyperbole, et doit se trouver sur la droite CS.

417. La droite *cl* et les tangentes *ml* et *nl* (*fig.* 223 ou 224) deviennent parallèles dans la transformation; les lignes *cl* et *mn* sont donc homologues de deux diamètres conjugués. Par conséquent, si l'on a un cercle homologique d'une conique déterminée par certaines conditions, on pourra obtenir des diamètres conjugués de cette courbe, et les points où ils la rencontrent; ce qui permettra de déterminer les axes, dans le cas où elle serait une ellipse, qui est celui que nous avions encore à résoudre.

418. Les propriétés des sections coniques permettent de ramener dans bien des cas la recherche du centre, des axes, des asymptotes,... d'une de ces courbes, au problème que nous nous sommes proposé à l'article **412** (¹). Nous rappellerons

(¹) On peut consulter M. Brianchon (*Correspondance sur l'École Polytechnique*, IIIᵉ vol., p. 383), M. Poncelet (*Propriétés projectives*, art. 338 et 339).

d'ailleurs que, pour tracer un cercle homologique d'une section conique, il suffit de connaître sa tangente en un point (art. **411**).

419. Toute droite tracée sur le plan d'une conique pouvant être prise pour ligne de fuite dans une certaine transformation homologique, les raisonnements que nous venons de faire établissent deux théorèmes fort importants :

1° *Les polaires des différents points d'une droite passent par le pôle de cette droite;*

2° *Les pôles des diverses droites qui passent par un point sont sur la polaire de ce point.*

Le pôle l d'une sécante mn (*fig.* 223) étant le point de concours des tangentes aux points m et n, la même relation subsistera après la transformation homologique. Ainsi quelque part que l'on place l'axe et le centre d'homologie, le point homologue de l sera le pôle de la droite homologue de mn. Il en serait de même si la figure était transformée par une projection cylindrique, ou par une projection conique.

Si le point c était le centre de la courbe (*fig.* 224), les points l et l', et par suite la droite ii', s'éloigneraient à l'infini. La polaire du centre est donc la droite sur laquelle on peut concevoir tous les points du plan situés à l'infini (art. **408**).

Emploi de la transformation homologique comme méthode de recherche.

420. La transformation homologique est souvent employée comme méthode de recherche et de démonstration. Nous allons établir de cette manière un théorème qui est quelquefois utile dans les constructions.

Si trois droites AD, BE, CF (*fig.* 226) *divergeant d'un même point* P *sont coupées par deux sécantes* DF *et* AC, *les points de rencontre* M *et* N *des diagonales des quadrilatères* ABED *et* BCFE, *et le point de concours* Q *des sécantes sont en ligne droite.*

Nous construisons une figure $adfc$ homologique de la proposée, et de manière que la droite homologue de PQ soit à l'infini : la position du centre d'homologie S, et la grandeur Sa du rayon d'homologie de l'un des points sont d'ailleurs choisies arbitrairement. Les droites qui convergent vers les points P et Q ont pour homologues des droites respectivement parallèles à SP et à SQ. Les quadrilatères sont ainsi changés en parallélogrammes, et les points m et n où se coupent les diagonales, se trouvant au milieu de ces lignes, sont sur une droite parallèle à ac et à df. La droite homologue MN passe nécessairement par le point Q qui représente le point où se rejoignent à l'infini les droites de la figure transformée qui sont parallèles à SQ.

Les diagonales du quadrilatère DACF n'ont pas été tracées; elles se croisent évidemment sur la droite MNQ.

Nous avons construit la figure homologique af, bien que cela ne fût pas néces-

saire pour le raisonnement, mais afin de donner un nouvel exemple graphique de ce genre de transformation.

421. Le théorème que nous venons de démontrer donne un procédé pour tracer une droite qui passe par un point M, et par le point éloigné où deux droites DF et AC se rencontrent. On trace une droite quelconque AD, les deux transversales DE et AE, la droite BE qui coupe AD au point P, une droite PF, enfin les transversales EC et BF qui se rencontrent en N : la droite MN passe par le point éloigné Q. Cette construction est assez commode, quand le point M est notablement plus rapproché de l'une des deux lignes que de l'autre, parce qu'alors le point P se trouve généralement à une petite distance. Si au contraire le point M était voisin de la bissectrice de l'angle DQA, quelque direction que l'on donnât aux transversales DB et EA, le point P lui-même serait éloigné, comme nous le montrerons plus loin (art. **602**).

CHAPITRE IV.

POINTS BRILLANTS.

Considérations générales.

422. Un corps poli éclairé par des rayons directs peut présenter une ou plusieurs images du corps lumineux. Si ce dernier corps est réduit à un point S (*fig.* 227), son image sera produite par la réflexion sur un seul point G que l'on appelle *point brillant*, et qui est déterminé par les conditions que la droite GI, normale à la surface du corps poli, fasse des angles égaux avec le rayon de lumière SG et le rayon visuel GO, et qu'elle se trouve dans le plan de ces deux lignes [1].

Si le corps est mat, sa surface se compose en réalité d'une multitude de petites facettes qui réfléchissent la lumière dans toutes les directions. Il n'y a plus de points brillants, mais le point G, déterminé comme nous l'avons dit, est le plus éclairé.

---

[1] La vision est produite pour chaque point regardé par un *faisceau* de rayons, mais on peut ne considérer que le rayon qui, passant au centre optique du cristallin, n'éprouve pas de déviation sensible. Le faisceau issu du point S est réfléchi sur une petite surface, mais l'image n'est qu'un point situé dans la direction OG.

423. Un ellipsoïde engendré par la révolution autour de son grand axe d'une ellipse E dont le point lumineux S et l'œil O du spectateur sont les foyers réfléchirait les rayons de lumière vers ce dernier point. Si nous supposons que les axes de l'ellipse augmentent graduellement, en conservant entre eux la relation exigée par la condition que les points O et S soient les foyers, il arrivera que l'ellipsoïde touchera la surface du corps C d'abord au point G, puis en un point H, ayant le même caractère géométrique, mais placé de telle sorte que le rayon de lumière qui y parviendrait se trouve arrêté par le corps. Le point G est évidemment brillant; le point H le serait, si le corps se trouvait de l'autre côté de la surface, et si rien n'empêchait les rayons d'y arriver : nous dirons que le point H est un point brillant *virtuel.* Le point brillant réel de la partie sphérique d'une niche serait virtuel sur la sphère en relief.

424. Le lieu des pieds des normales abaissées des différents points de la droite SO sur la surface C (*fig.* 227) passe par les points G et H. En déterminant sur chacune de ces normales le point où elle est rencontrée sous des inclinaisons égales par des droites issues des points S et O, on obtient une seconde courbe dont l'intersection avec la première fait connaître la position des points brillants.

Cette méthode, due à Hachette, peut être appliquée aux surfaces de révolution, et donne lieu à un bon exercice graphique.

Détermination du point brillant d'un corps représenté par des figures géométrales et éclairé par des rayons parallèles.

425. Dans le cas d'une projection, on doit considérer le spectateur comme étant à l'infini (art. **12**); les rayons visuels sont alors les projetantes, et, si les rayons de lumière sont parallèles, on aura la direction de la normale de la surface au point brillant, en construisant la bissectrice de l'angle formé par un rayon visuel et une projetante. Le problème sera ainsi ramené à *déterminer le point de la surface où la normale est parallèle à une droite donnée.* Ce point est le point de contact d'un plan parallèle à un plan perpendiculaire à la normale.

426. Si l'on veut avoir le point brillant sur la projection verticale, par exemple, on commencera par construire la bissectrice de l'angle formé par le rayon de lumière (SA, S'A') (*fig.* 228), et par une projetante (AB, A'). Pour cela, on rend horizontal le plan de ces deux droites, en le faisant tourner autour de la dernière, et, après avoir obtenu la véritable grandeur S_1AB de l'angle, on trace la bissectrice D_1A, et on la ramène à sa véritable position (AD, A'D'). Menant ensuite par un point de la ligne de terre deux droites P et P' respectivement perpendiculaires à AD et à A'S', on obtient les traces d'un plan auquel les plans tangents de la surface aux points brillants sont parallèles.

427. Nous avons vu, aux articles **129** et **131**, qu'un plan tangent à un cône ou à un cylindre était déterminé par la seule condition d'être parallèle à une droite; ces surfaces n'ont donc pas, en général, de points brillants. Si un cône avait un plan tangent parallèle au plan (P, P′) (*fig.* 228), tous les points de la génératrice de contact seraient brillants sur la projection verticale.

428. Considérons maintenant la surface de révolution représentée sur la *fig.* 228, supposons-la éclairée par des rayons parallèles à (SA, S′A′), et proposons-nous de déterminer son point brillant sur la projection verticale, c'est-à-dire le point où le plan tangent est parallèle au plan dont les traces sont P et P′, ou P et $e'g$, en prenant le plan méridien *cox* pour plan vertical de projection. Le plan méridien du point brillant doit être perpendiculaire au plan (P, $e'g$) (art. **186**), et comme d'ailleurs il est vertical, sa trace horizontale est la droite *ok*, perpendiculaire à P.

Au point cherché la tangente de la méridienne est parallèle à l'intersection du plan *ok* de cette courbe, avec le plan (P, $e'g$); par conséquent, si nous faisons tourner le plan *ok* autour de l'axe, de manière à le rendre parallèle au plan vertical, et si nous déterminons la position gk'_1 que prend son intersection avec le plan (P, $e'g$), les tangentes $m'_1 t$ et $n'_1 s$, parallèles à gk'_1, feront connaître des points (m_1, m'_1) et (n_1, n'_1) qui, ramenés en (m, m') et (n, n') dans le plan *ok*, seront les points brillants; le premier de ces points est réel et l'autre virtuel.

On construirait d'une manière analogue les points brillants sur la projection horizontale.

Détermination du point brillant sur les figures axonométriques.

429. Nous allons nous occuper du point brillant en perspective axonométrique. Les axes sont Sx, Sy et Sz (*fig.* 187); les droites Ss et Ss_1 représentent un rayon de lumière et sa projection horizontale.

Nous déterminons les traces AB, AC et BC des plans principaux sur un plan parallèle au plan de la figure (art. **82**). Le plan qui projette le rayon de lumière sur le plan horizontal xSy contient la droite Ss_1 et l'axe Sz; sa trace sur le plan ABC est donc CG, et la trace du rayon Ss est au point F de cette ligne. Nous rabattons le plan projetant dont la trace est Ss : le sommet S, dont nous avons préalablement déterminé la hauteur SS′, se place en S″, et par suite le rayon de lumière devient S″F. L'angle SS″F est formé par une projetante et un rayon; sa bissectrice S″R a sa trace en R, et le plan qui la projette sur le plan horizontal xSy contenant l'axe Sz a pour trace CRL. La bissectrice cherchée est donc (Ss, SL).

430. Proposons-nous maintenant de déterminer le point brillant d'une sphère DgD_1 (*fig.* 187). Si nous supposons que le plan projetant dont la trace est le diamètre DD_1, parallèle à Ss, ait été rabattu sur le plan de front qui passe par

le centre o, le diamètre rr_1, parallèle à la bissectrice S″R, fera connaître les points r et r_1 où la normale partage en parties égales l'angle du rayon de lumière et de la projetante. Ces points après le relèvement sont k et k_1 : le premier est réel et le second virtuel.

Le diamètre ff_1, perpendiculaire à S″F, est, après le rabattement, la projection du cercle de séparation d'ombre et de lumière. En relevant on trouve une ellipse dont les axes sont gh et EE_1.

Teintes. Lumière diffuse. Lumière reflétée.

431. Un corps est de moins en moins éclairé depuis le point où le rayon incident est réfléchi vers l'œil du spectateur, jusqu'à la ligne d'ombre propre. La dégradation n'est pas toujours la même dans les différentes directions : elle dépend non-seulement de l'incidence des rayons, mais encore de la rugosité de la surface. Au delà de la courbe d'ombre, le corps ne doit pas être représenté dans une ombre complète, parce qu'il reçoit la *lumière diffuse* formée par les rayons réfléchis sur les molécules de l'air [1]. On doit encore avoir égard aux reflets des corps voisins. Ces diverses questions sont du ressort de la perspective aérienne, et nous avons seulement voulu les indiquer ici.

---

[1] Les expériences les plus précises sur ces divers phénomènes sont dues à Bouguer. Nous avons examiné la question de la dégradation des teintes dans un Mémoire inséré au *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, en 1873, p. 577.

LIVRE SIXIÈME.

SURFACES DÉVELOPPABLES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

Notions sur les enveloppes.

432. Supposons qu'une surface A se meuve en conservant sa forme, ou en se modifiant suivant une loi continue; considérons-la après un temps T et après un temps $T + t$; enfin désignons-la à ces deux instants par A_T et A_{T+t} : si T varie d'une manière continue, t ayant une valeur constante, la courbe d'intersection de A_T avec A_{T+t} engendrera une surface B_t.

Chaque surface A_T contient deux génératrices de la surface B_t, qui sont ses intersections avec A_{T+t} et avec A_{T-t}. Quand l'intervalle t est petit, ces courbes sont peu éloignées l'une de l'autre. Si l'on suppose que t diminue indéfiniment sans devenir nul, la surface B_t tendra vers une certaine surface limite B, sur laquelle les deux courbes d'intersection avec chaque surface A_T seront réunies en une ligne de contact.

Nous voyons que les surfaces A_T sont inscrites [1] dans une même surface B; on dit que cette surface est leur *enveloppe* et qu'elles en sont les *enveloppées*. Les lignes de contact, intersections de deux enveloppées consécutives et génératrices de l'enveloppe, sont appelées *caractéristiques* [2].

433. Un exemple fera bien comprendre ces considérations générales.

Supposons qu'une droite se meuve en restant toujours tangente à une courbe plane χ (*fig.* 229), et considérons-la dans plusieurs de ses positions $m, n, o, p, \ldots$, à des intervalles de temps égaux, dont nous représentons la grandeur par t. Les intersections successives $i, j, k, \ldots$ de ces lignes appartiennent à une courbe, dont chaque point est sur la droite mobile considérée dans deux positions occupées à

---

(1) Ou circonscrites (*voir* la note de l'article 343).

(2) La théorie des enveloppes est due à Monge.

un intervalle de temps t. Si tout le système de ces droites est entraîné dans un mouvement commun de révolution autour d'un axe Az situé dans le plan de la courbe χ, les droites engendreront des cônes, et les intersections successives de ces surfaces seront les cercles décrits par les points $i, j, k, \ldots$, lesquels appartiendront à une surface de révolution qui sera d'autant plus rapprochée de celle dont la méridienne est χ, que l'intervalle t sera plus petit. A la limite les cercles deviendront les parallèles de cette surface, qui sera ainsi l'enveloppe des cônes. Elle touche chacun d'eux le long d'une caractéristique, c'est-à-dire d'un parallèle.

Les cônes que nous venons de considérer sont ceux qui nous ont servi pour les constructions des articles **343** et **356**. On peut encore regarder une surface de révolution comme enveloppe de cylindres circonscrits le long des méridiens, et perpendiculaire à leurs plans (art. **346** et **360**), ou de sphères inscrites le long des divers parallèles (art. **362**). Les raisonnements de l'article **368** montrent que le tore elliptique de la *Pl. XIV* est l'enveloppe des positions d'un ellipsoïde de forme invariable; les caractéristiques sont les méridiens.

434. Si une sphère de rayon constant se meut suivant une loi quelconque, ses intersections consécutives seront de grands cercles, et l'on déterminera facilement l'enveloppe; mais si le centre de la surface est fixe et son rayon variable, deux sphères consécutives ne se couperont pas, et les caractéristiques seront imaginaires ([1]). On voit donc que des surfaces peuvent ne pas avoir d'enveloppe réelle, bien qu'elles forment une série continue.

435. Quand une ligne se meut en conservant sa forme ou en se modifiant d'une manière continue, si elle est toujours tangente à une courbe fixe, cette courbe est dite son *enveloppe*, et la ligne mobile considérée dans ses différentes positions prend par rapport à elle le nom d'*enveloppée*.

On reconnaît, par des considérations analogues à celles de l'article **432**, que, quand une courbe plane se meut dans son plan, elle a une enveloppe lieu de ses intersections consécutives. Cette enveloppe peut d'ailleurs être imaginaire, ainsi qu'il arriverait si les enveloppées étaient des cercles concentriques.

([1]) Si le rayon de la sphère a un maximum ou un minimum, lorsqu'il sera parvenu à cette grandeur, deux sphères consécutives se confondront, et la caractéristique jusque-là imaginaire deviendra une surface qui devra être considérée comme l'enveloppe.

Des surfaces n'ont pas d'enveloppe lorsqu'il en passe un même nombre (non infini) par tous les points de l'espace. Quand, sous le rapport du nombre de surfaces qui passent par un point, l'espace est divisé en régions, la surface qui limite les différentes régions forme l'enveloppe; c'est, en général, une surface nouvelle, mais quelquefois elle se compose de surfaces distinctes appartenant à la série que l'on considère.

Des considérations analogues peuvent être présentées sur les lignes enveloppes; elles montrent que les théorèmes de l'article 435 sont généraux, et que le cercle FEH (*fig.* 215), qui serait l'ombre sur le plan horizontal de l'ellipsoïde $O^{iv}O^{v}$ si on l'éclairait par des rayons verticaux, est bien l'enveloppe des projections horizontales des parallèles.

La courbe *ij*, et celle qui lui est symétrique par rapport à la droite O_1O_2 (*fig.* 218), forment l'enveloppe des cercles qui sont les ombres des parallèles de la surface de révolution. Les considérations qui ont été présentées à l'article **371** montrent que *l'ombre portée par une surface est l'enveloppe des ombres portées par ses génératrices*, et que *le cylindre* (*ou le cône*) *d'ombre d'une surface est l'enveloppe des cylindres* (*ou des cônes*) *d'ombre de ses génératrices.*

On peut ajouter que *le cône d'ombre d'une surface enveloppe est l'enveloppe des cônes d'ombre de ses enveloppées,* car l'intersection des lignes d'ombre de l'enveloppe et d'une enveloppée particulière est un des points de contact de ces surfaces, et leurs cônes d'ombre se touchent le long de la génératrice qui passe en ce point. Le cône d'ombre de l'enveloppe est ainsi touché par celui d'une de ses enveloppées, le long de chacune de ses génératrices.

Notions sur les développantes.

436. *Développantes d'une courbe plane.* Considérons un polygone A, B, C, ..., H, I, inscrit dans une courbe plane (*fig.* 231), et prolongeons-en les côtés. Si par des rotations autour des sommets B, C, D, ... nous amenons la droite indéfinie AB à coïncider successivement avec les autres droites, l'un quelconque M de ses points décrira une série d'arcs de cercle MN, NO, ..., Qx, puis le centre du mouvement passant de F en G, le point s'éloignera par un arc xR.

Eu égard à la grandeur relative des rayons, si l'on prolonge un arc ON, il laissera les arcs contigus NM et OP de côtés différents.

En passant à la limite, on voit que si une droite *am* roule sur une courbe χ (*fig.* 230), c'est-à-dire si elle se meut en restant toujours tangente à cette courbe et sans glisser sur elle, un quelconque *m* de ses points décrira une ligne ω, composée d'une infinité d'arcs de cercle infiniment petits, qui, s'ils étaient prolongés, la traverseraient tangentiellement et dont les centres sont sur la courbe χ. Les rayons de courbure de la ligne ω sont donc les segments *ma*, *nb*, ... de la droite mobile, mesurés jusqu'au point de contact. Cette ligne est une *développante* de la première, et celle-ci prend par rapport à elle le nom de *développée*. La développée d'une courbe plane est à la fois le lieu de ses centres de courbure et l'enveloppe de ses normales.

Les développantes décrites par les différents points de la droite *am* (*fig.* 230) ont évidemment les mêmes normales, et sont à la même distance les unes des autres dans la direction de ces droites. Chacune d'elles rencontre, en général, la développée χ, et a un rebroussement au point commun x; le rayon de courbure de la développante est alors nul, ainsi que cela doit être (art. **94**).

437. La considération des développantes jette du jour sur la question des rayons de courbure des lignes planes en leurs points singuliers.

A chaque point d'inflexion b_1 d'une courbe χ (*fig.* 232) correspond un rebroussement de seconde espèce a_1 sur chaque développante ω (art. **219**). On voit qu'en général le rayon de courbure n'est pas nul en ces points, comme aux rebroussements de première espèce.

L'une des développantes de la courbe χ passe par le point d'inflexion b_1; elle y a une inflexion d'une nature particulière : les rayons de courbure des points voisins sont très-petits, et leur longueur varie très-rapidement; la continuité s'établit entre eux par un rayon nul qui correspond au point b_1 considéré isolément.

Quand une courbe a une branche infinie dont les bras sont d'un même côté de l'asymptote (art. **182**), ses développantes ont un rebroussement de première espèce où le rayon de courbure est infini, et qui, par conséquent, diffère beaucoup des rebroussements où le rayon de courbure est nul.

438. La question des rebroussements ayant une grande importance, nous nous y arrêterons quelques instants.

Une courbe plane qui a un rebroussement peut être considérée comme la projection d'une courbe gauche sur un plan perpendiculaire à l'une de ses tangentes (art. **217**). La trace du plan osculateur est la tangente au rebroussement.

Si le plan osculateur a simplement un contact du second ordre avec la courbe, c'est-à-dire s'il n'a en commun avec elle que trois points réunis en un seul, il la traverse (art. **214**), et les deux bras du rebroussement, qui est alors du *premier ordre,* se trouvent de part et d'autre de la tangente.

Quand le plan osculateur a un contact du troisième ordre avec la courbe, il ne la traverse pas; le rebroussement devient de *second ordre,* et ses deux bras sont d'un même côté de la tangente.

L'ordre du rebroussement s'élève ainsi en même temps que celui du contact de la courbe gauche avec son plan osculateur. Suivant qu'il est impair ou pair, la tangente laisse les deux bras du rebroussement de côtés différents ou d'un même côté.

Les rebroussements de premier et de second ordre sont les rebroussements ordinaires de première espèce et de seconde espèce. Le rayon de courbure des uns est nul; celui des autres a, en général, une grandeur finie.

Quand le contact de la courbe gauche avec son plan osculateur augmente d'une unité, celui de sa projection avec la trace du plan osculateur augmente aussi d'une unité. A un rebroussement du troisième ordre, la courbe a donc avec sa tangente un contact d'un degré plus élevé d'une unité qu'à un rebroussement de second ordre : le rayon de courbure y est donc infini. Il l'est de même aux rebroussements d'ordre plus élevé ([1]).

([1]) Dans une étude complète, il serait nécessaire d'avoir égard à l'ordre de multiplicité du sommet, et si le rebroussement est de seconde espèce à l'ordre de contact des deux bras.

Quand une courbe gauche a un contact du troisième ordre avec l'une de ses tangentes, sa pro-

439. Lorsqu'une courbe ABC (*fig.* 257) a un rebroussement de premier ordre, le rayon de courbure au point correspondant de ses développantes est, en grandeur absolue, un maximum pour celles qui sont du côté de la convexité, telles que *rstu*, et un minimum pour les autres, telles que *mn*. On peut, en ayant égard au signe des rayons, les considérer tous comme à leur maximum ou tous comme à leur minimum. La développante qui passe au point de rebroussement y a un rayon de courbure nul, mais sans changement de signe, et par suite il n'y a pas de rebroussement,

Lorsque les deux bras de la ligne ABC sont resserrés sur la tangente au rebroussement, le rayon de courbure de la développante qui passe au sommet varie avec une extrême rapidité, et cette courbe, même construite avec un grand soin, ne présente aucune singularité apparente.

Quand une courbe a un rebroussement de second ordre, ses développantes en ont un du même ordre au point correspondant; en considérant celle qui passe au point de rebroussement, on reconnaît qu'à un rebroussement de second ordre le rayon de courbure peut être accidentellement nul.

En général, une développée a un rebroussement quand la courbe primitive a un *sommet,* c'est-à-dire un point où le rayon de courbure atteint une valeur maximum ou minimum. Une courbe peut avoir un sommet à un point de rebroussement de second ordre, puisque le rayon de courbure n'y change pas de signe, et alors sa développée a un rebroussement qui est nécessairement du même ordre. Dans le cas ordinaire, à un rebroussement de second ordre sur la courbe primitive, correspond une inflexion sur la développée (art. **437**).

440. La différence de deux rayons CN et FQ (*fig.* 231) est égale à la somme des côtés du polygone compris entre les points C et F; la longueur de l'arc *ab* d'une développée (*fig.* 230) est donc la différence des rayons de courbure qui le touchent à ses extrémités.

Si ces points étaient, tels que *b* et *c*, de côtés différents du rebroussement, la longueur de l'arc serait la somme des longueurs absolues des rayons.

441. *Développantes d'une courbe gauche. Surface des développantes.* Une courbe gauche a, comme celles qui sont planes, une infinité de développantes, *trajectoires* des divers points d'une tangente qui roule sur elle sans glisser. Chaque développante rencontre en général la courbe et a un rebroussement au point commun.

Les développantes peuvent être considérées comme des génératrices curvilignes de la surface décrite par la tangente mobile. La courbe gauche, lieu des

---

jection sur un plan perpendiculaire possède un rebroussement dont le sommet est un point quadruple.

On peut consulter sur ces questions notre *Note sur les singularités élevées des courbes planes* (*Journal de Mathématiques,* 1869).

points de rebroussement, forme sur cette surface une *arête de rebroussement* qui la divise en deux nappes.

Comme cette circonstance est fort importante, nous allons l'étudier d'une autre manière.

442. Nous considérons une courbe gauche projetée sur deux plans rectangulaires, dont l'un, que nous supposons horizontal, lui est osculateur en un point M (*fig.* 238) : sa projection sur l'autre plan est une ligne A′B′, osculatrice en M′ de la ligne de terre (art. **217**).

Nous prenons un second plan vertical xy passant par le point M, et nous le rabattons, après avoir éloigné sa trace en x_1y_1 pour éviter que les figures ne se superposent.

La tangente de la courbe en un point (A, A′) voisin de M rencontre le plan xy au point (α, α') qui est rabattu en α''. Si le point A se rapproche du point M et vient se confondre avec lui, α'' décrira une courbe et viendra coïncider avec M″; la droite α''M″, trace du plan qui contient le point M et la tangente en A, tournera autour de M″ et deviendra la trace x_1y_1 du plan osculateur en M. La ligne courbe α''M″, lieu des traces des tangentes de l'arc (AM, A′M′), est donc tangente en M″ à la droite x_1y_1. On peut faire le même raisonnement pour la ligne M″β'', lieu des traces des tangentes de l'arc (MB, M′B′); d'ailleurs, si la courbe gauche n'a pas d'inflexion en M, les segments curvilignes M″α'' et M″β'' seront d'un même côté de la projetante MM″; donc la trace α''M″β'' de la surface formée par les tangentes à la courbe gauche (AB, A′B′) a un rebroussement de premier ordre, dont la tangente x_1y_1 est la trace du plan osculateur de la courbe.

Si le plan sécant était oblique sur le plan osculateur, la figure serait un peu moins simple, mais les raisonnements et les conclusions resteraient les mêmes; il n'y a d'exception que quand la droite xy est tangente en M, parce qu'alors les points α et β ne sont pas d'un même côté de ce point. Nous voyons d'après cela que la surface des tangentes est telle, que sa section par un plan présente un rebroussement au point où elle rencontre la courbe gauche; cette surface a donc un rebroussement tout le long de cette ligne, sauf toutefois à ses points d'inflexion, ce qui est conforme aux résultats de l'article **438**. En un point M, les tangentes au rebroussement pour les différentes sections sont dans le plan osculateur de la courbe, qui est le *plan de rebroussement* pour le point M.

Toute droite passant par le point de rebroussement d'une courbe plane et située dans son plan peut être regardée comme une sécante sur laquelle deux points d'intersection se sont réunis en un seul, et par conséquent comme une tangente; mais, si l'on considère une droite qui roule sur la courbe, lorsque le point de contact sera arrivé au rebroussement, la droite aura une position déterminée, celle de la tangente au rebroussement, qui a trois points de section confondus, et qui seule présente tous les caractères de tangente à la courbe en ce point.

D'après cela, tous les plans contenant la tangente de la courbe gauche en M (*fig.* 238) sont, sous certains rapports, tangents à la surface des développantes, mais cependant le plan de rebroussement doit être considéré comme le plan tangent en ce point.

443. Si l'on projette une courbe gauche sur un plan quelconque, tous les points de la surface des tangentes, voisins d'un point quelconque M de la courbe (*fig.* 233), se trouveront d'un même côté de sa projection ω, celui de sa convexité. Une ligne gauche présente donc sur la surface de ses tangentes le caractère de contour apparent, par rapport à tout plan de projection, ce qui montre, d'une nouvelle manière, qu'elle forme arête de rebroussement.

Définition, génération et principales propriétés des surfaces développables.

444. *On appelle* surfaces développables *celles qui, supposées flexibles et inextensibles, peuvent être déroulées sur un plan, sans déchirure ni duplicature.*

Quand un polyèdre est formé d'une série de faces planes A, B, C, ..., qui se succèdent (*fig.* 234), après l'avoir ouvert le long d'une arête Q, on peut amener l'une des faces contiguës D dans le plan de la suivante C, par un mouvement de rotation autour de l'arête commune P, puis toutes les deux dans le plan de la troisième B, et développer ainsi toute la surface ([1]). Si, au contraire, les faces planes du polyèdre ne forment pas une seule série, elles seront coupées par d'autres faces, il y aura des angles trièdres, et dans le développement il sera nécessaire d'ouvrir chacun d'eux; la surface sera donc non pas seulement déformée, mais décomposée.

Ainsi un polyèdre développable est celui qui est formé d'une série de faces planes qui se succèdent, et dont par conséquent les arêtes peuvent être regardées comme les intersections consécutives d'un plan mobile, considéré dans diverses positions. Cette proposition, étant indépendante du nombre et de la grandeur des faces, subsistera si on les suppose de plus en plus nombreuses et petites, et enfin à la limite quand le polyèdre sera devenu une surface courbe. *Une surface développable est donc l'enveloppe des positions d'un plan mobile.*

445. Les caractéristiques sont des lignes droites, intersections des plans qui forment les enveloppées particulières. Les surfaces développables sont donc *réglées*, c'est-à-dire qu'elles peuvent être engendrées par le mouvement d'une ligne droite.

Nous avons vu qu'une enveloppée touche l'enveloppe en tous les points de la caractéristique correspondante (art. **432**); une surface développable est donc tangente à un même plan le long de chacune de ses génératrices rectilignes.

([1]) Cette déformation est la même que celle que nous avons expliquée à l'article 117 pour un prisme sans base.

Réciproquement, toute surface réglée qui jouit de cette propriété est l'enveloppe d'un plan mobile, et peut être développée.

446. Chaque face B d'un polyèdre développable contient deux arêtes N et O (*fig.* 234); toutes ces droites se coupent donc deux à deux, et dans le cas général leurs intersections successives forment les sommets d'un polygone *abcd*..., qui, à la limite, devient une courbe enveloppe des génératrices. Nous voyons donc que les surfaces développables sont précisément celles dont nous nous sommes occupés aux articles **441**, **442** et **443**, et qui sont engendrées par une droite toujours tangente à une courbe gauche. Il faut y joindre le cône et le cylindre qui, comme nous l'avons reconnu, sont les limites des polyèdres développables, dont les arêtes sont convergentes vers un même point ou parallèles : ces surfaces n'ont pas d'arête de rebroussement, et l'enveloppe des génératrices se réduit à un point situé à une distance finie ou à l'infini.

447. Une face B du polyèdre développable que nous considérons contient trois sommets *a*, *b* et *c* du polygone formé par les arêtes. On voit, en passant à la limite, que *les plans tangents d'une développable sont osculateurs de son arête*.

Le contour apparent d'une surface développable est formé par les génératrices le long desquelles le plan tangent est perpendiculaire au plan de projection. L'arête de rebroussement étant osculatrice de tous les plans tangents, sa projection a une inflexion au point où elle rencontre la projection de chacune des génératrices du contour apparent (art. **217**) (¹).

448. La propriété que les plans tangents aux surfaces développables ont d'être osculateurs de l'arête de rebroussement donne un moyen de construire le plan osculateur d'une courbe (ω, ω'), en un point donné (M, M') (*fig.* 235).

Nous cherchons les traces horizontales d'un certain nombre de tangentes de la courbe, et nous déterminons ainsi la trace $\gamma\delta$ de la développable dont cette ligne serait l'arête de rebroussement. Le plan osculateur en (M, M') est tangent à la surface tout le long de la génératrice ($M\mu$, $M'\mu'$); sa trace est donc la droite P tangente en μ à la courbe $\gamma\delta$.

Si l'on a des moyens géométriques d'obtenir les tangentes des courbes ω et ω', la seule incertitude du tracé consistera dans la construction de la tangente P. On pourra employer une courbe d'erreur (art. **100**), en ayant soin, au préalable, de déterminer quelques points de la trace $\gamma\delta$ suffisamment éloignés de μ, et ensuite de vérifier le tracé par la construction directe de la trace verticale P'.

Pour faire commodément les opérations, il faut que la partie considérée $\gamma\delta$ de la trace n'ait pas de rebroussement, et par conséquent que la ligne de terre ne rencontre pas la courbe ω' entre les points extrêmes C' et D'. On la déplacerait (art. **49**) s'il en était autrement.

(¹) Ainsi la droite $j'j'_1$ a un contact du second ordre avec la courbe $A'A'_1$ (3ᵉ Partie, art. 948, *fig.* 393).

Nous verrons dans la troisième Partie que l'on peut quelquefois déterminer d'une manière plus précise la position du plan osculateur d'une courbe donnée par ses projections (art. **859-862**).

449. Si l'on coupe un polyèdre développable par un plan contenant une arête O (*fig.* 234), l'intersection se composera de cette droite indéfinie, et d'un polygone dont les sommets seront les traces sur le plan sécant des différentes arêtes M, N, P, Q, ... Les points b et c où les droites N et P rencontrent l'arête O seront deux de ces sommets. De là, et en passant à la limite, on voit que l'intersection d'une développable, avec un plan qui contient une génératrice rectiligne, se compose de cette droite, et d'une courbe qui lui est tangente, au point où elle touche l'arête de rebroussement.

Une courbe peut donc passer sans rebroussement d'une nappe à l'autre en touchant l'arête (1). Nous serions parvenu à la même conséquence, en étudiant le chemin décrit par un point qui se meut sur la génératrice rectiligne, pendant que celle-ci roule sur son enveloppe.

450. Si la développable est algébrique et de l'ordre n, un plan contenant une génératrice la coupera, en général, suivant une courbe de l'ordre $n-1$, qui descendra à l'ordre $n-2$ quand le plan sera tangent, car alors il contiendra deux fois la génératrice de contact. Il suit de là qu'une développable algébrique à arête de rebroussement est au moins du quatrième ordre, car si une telle surface pouvait n'être que du troisième ordre, sa section par un plan tangent serait une droite tangente à la génératrice de contact, c'est-à-dire cette génératrice elle-même. Chaque génératrice rencontrerait donc toutes les autres, et, comme un même plan est tangent tout le long d'une quelconque de ces lignes, la surface serait un plan.

La développable du quatrième ordre est coupée par un plan tangent quelconque suivant une conique (2).

451. Supposons que l'on coupe une développable par deux plans parallèles P et Q (*fig.* 214), et soient A et B les courbes de section. Le cône qui a pour directrices les cercles osculateurs de ces lignes en deux points m et n appartenant à une génératrice G traverse tangentiellement la surface le long de cette droite (3). Toute section faite par un plan dans le cône et la surface développable donnera donc deux courbes osculatrices au point où la génératrice G sera coupée.

Plus le plan sécant que nous pouvons supposer parallèle à P et à Q sera rap-

---

(1) Cette proposition, presque évidente, s'étend à toutes les surfaces qui ont une arête de rebroussement. Nous en avons vu un exemple à l'article 217.

(2) Pour établir l'existence de la développable du quatrième ordre, il suffit d'en donner un exemple. On trouve par un calcul facile que la surface lieu des tangentes à la courbe gauche représentée par les équations $z^2+ax=0$, $zy+b^2=0$, a une équation du quatrième degré.

(3) Il est facile de démontrer que deux cercles situés dans des plans parallèles déterminent un cône dont le sommet est sur la ligne des centres.

proché du sommet du cône, plus le rayon de courbure de la section faite dans la surface sera petit; il sera nul quand le plan passera par le sommet, et par suite ce point est sur l'arête de rebroussement. Comme d'ailleurs la direction des plans P et Q est tout à fait arbitraire, nous pouvons conclure qu'*une surface développable est osculatrice, le long de chacune de ses génératrices, d'une infinité de cônes du second ordre qui ont tous leur sommet au point où cette droite touche l'arête de rebroussement,* et que *les sections faites dans une surface développable par des plans parallèles ont, aux points situés sur une même génératrice, des rayons de courbure proportionnels aux longueurs de cette droite mesurées à partir de l'arête de rebroussement.*

Si deux sections rencontraient la génératrice considérée de côtés différents du point où elle touche l'arête, la concavité des courbes serait tournée en sens contraire.

Principales manières de déterminer les développables et les surfaces réglées en général. Cône directeur.

452. *Trois directrices* A, B et C *déterminent une surface réglée*, car on obtient sans incertitude les génératrices qui passent par un point m d'une directrice A (*fig.* 236), en prenant l'intersection des deux cônes qui ont leur sommet en ce point et respectivement pour directrices les courbes B et C. On dit que la surface est *circonscrite* aux lignes A, B et C.

Les directrices n'ayant entre elles aucune relation nécessaire, il arrivera, en général, que leurs tangentes aux points m, n et p ne seront pas dans un même plan, et par suite que la surface ne sera pas développable (art. **445**). Les surfaces développables forment donc une classe spéciale de surfaces réglées.

Les surfaces réglées qui ne peuvent pas être développées sur un plan sont dites *gauches*. Nous les étudierons plus loin.

453. *Une surface est déterminée quand elle doit être développable, et que la génératrice rectiligne est assujettie à rencontrer deux directrices données* A et B, car le plan mobile dont la surface est l'enveloppe touche toujours les deux courbes; il roule donc sur elles, et cette condition suffit pour fixer ses positions successives.

Si un plan passant par une tangente mT de la directrice A (*fig.* 237) tourne autour de cette droite, il arrivera, en général, que dans un certain nombre de ses positions il touchera la directrice B. Les droites qui vont du point m à chacun des points de contact n et n_1 sont des génératrices de la développable circonscrite aux deux courbes.

454. Le cône qui aurait son sommet en m et la ligne B pour directrice serait tangent à la développable le long des génératrices G et G_1. Cette surface est donc l'enveloppe d'un cône qui a l'une des courbes données pour directrice, et dont le sommet parcourt l'autre courbe.

Chacun de ces cônes est une développable dont toutes les génératrices rencontrent les deux lignes A et B, et si nos raisonnements ne nous ont fait trouver que leur enveloppe, c'est que nous avons supposé que le plan tangent de la surface le long d'une génératrice contenait les tangentes des deux directrices aux points où elle les rencontre, ce qui n'a pas lieu dans le cas d'un cône.

C'est en faisant abstraction des cônes que nous avons dit qu'une développable était déterminée par deux directrices.

Dans les opérations graphiques, on obtient les génératrices G et G_1, en menant par la droite mT des plans tangents au cône qui a son sommet en m et B pour directrice.

455. Si les directrices A et B sont planes (*fig.* 242), on leur mènera des tangentes d'un point T pris arbitrairement sur l'intersection XY de leurs plans, puis, joignant les points de contact deux à deux, on obtiendra des génératrices de la surface circonscrite, car deux tangentes TM et TN peuvent être considérées comme les traces d'un plan tangent à A et à B.

Quand les directrices sont des coniques, à chaque point T correspondent deux tangentes de chaque courbe et quatre génératrices de la surface. Les points M, M_1, N et N_1 sont des points doubles (art. **89**), et les courbes A et B des *lignes doubles* de la développable. Si de chaque point de XY on pouvait mener à l'une des directrices trois, quatre, ... tangentes, l'autre directrice serait sur la développable une ligne triple, quadruple, ..., intersection de trois, quatre, ... parties de cette surface.

456. Quand la directrice A est tangente à l'intersection XY (*fig.* 243), le point de contact M varie seul avec la position de T, l'autre point M_1 est fixe, et les génératrices qui en divergent sont toutes dans le plan Q de la directrice B. Par conséquent, si l'on suppose que la directrice A (*fig.* 242) se meuve dans son plan, au moment où elle sera tangente à XY, la développable circonscrite se décomposera en une autre développable, et un plan, celui de la courbe B, qui pourra d'ailleurs avoir des parties parasites, c'est-à-dire n'être pas entièrement couvert par les droites allant du point M_1 aux différents points de B.

Si la directrice B est du second ordre, lorsque le point T parcourra la droite XY (*fig.* 243), chacun des rayons vecteurs M_1N_1 et M_1N décrira le plan Q, et la développable complète contiendra deux fois ce plan.

La forme de la directrice A est sans influence sur ces résultats; elle peut être plane ou gauche; il suffit qu'elle soit tangente au plan Q.

457. Supposons maintenant que la directrice A coupe l'intersection XY en un point E (*fig.* 244) : lorsque le point T mobile sur XY sera en E, la tangente TN et la génératrice MN seront confondues sur une droite EI. Réciproquement, la génératrice MN ne peut se placer dans le plan Q que si le point M est en E, et alors elle se confond avec la tangente TN : par conséquent, *la directrice plane d'une*

surface développable est touchée par toutes les génératrices qui sont dans son plan.

458. Les droites qui touchent la directrice B en des points n et N, situés de part et d'autre de I et à de petites distances (*fig.* 244), rencontrent la droite XY en deux points t et T, placés l'un dans la concavité de A, l'autre du côté de sa convexité. On ne peut mener du premier aucune tangente à A; du second on en mène deux TM et TM_1 (¹); il passe, par conséquent, deux génératrices de la développable par le point N, et il n'en passe pas par le point n. La directrice B forme donc une ligne double d'un côté de I, tandis qu'elle est parasite de l'autre.

Sur la *fig.* 244, la courbe A rencontre la droite XY en deux points E et F, à chacun desquels correspondent deux points limites. La directrice B est ainsi divisée en quatre arcs IJ_1, J_1J, JI_1 et I_1I : le premier et le troisième sont parasites, les autres utiles et doubles.

Dans le cas de la *fig.* 243, les tangentes menées du point M_1 à la directrice B sont des génératrices, mais cette courbe n'a sur la développable ni arc double, ni arc parasite.

459. La réciproque de la proposition que nous avons établie à l'article précédent est vraie; ainsi, si le point I est l'extrémité d'un arc utile I_1I d'une directrice B, les tangentes aux points voisins n et N auront leurs traces t et T placées de telle manière que de l'une on ne pourra pas mener des tangentes à A, et que de l'autre on en mènera deux : ce qui exige que la tangente de la directrice B en I ait sa trace sur la courbe A.

460. Si les courbes A et B sont gauches, les mêmes dispositions se reproduiront dans les mêmes circonstances, c'est-à-dire chaque fois qu'une génératrice EI sera tangente à une directrice B. Pour le prouver, on substituera à A sa projection sur son plan osculateur en E, et l'on supposera les points N et n infiniment rapprochés de I.

461. En résumé, *quand une surface développable est donnée par deux directrices, chacune de ces lignes est en général divisée en parties parasites et en parties utiles et doubles*. Il suit de là qu'on ne peut pas prendre indifféremment pour directrices d'une surface développable deux courbes quelconques tracées sur elle. Ainsi deux cercles situés dans des plans parallèles étant pris pour direc-

---

(¹) La directrice A peut avoir une forme telle, qu'il soit possible de lui mener des tangentes du point t, mais on en trouverait deux de plus du point T. Le point I serait alors à la limite d'un arc quadruple, par exemple, et d'un arc double. Pour éviter une complication tout à fait inutile dans les problèmes que nous avons à examiner, nous négligerons le cas où la directrice a un degré élevé de multiplicité. Ce degré est d'ailleurs le même sur toute la longueur de la courbe, si l'on a égard aux nappes imaginaires.

Cette restriction conduit à ne considérer, pour directrices, que des coniques, courbes qui n'ont ni rebroussements ni inflexions.

trices, la développable complète est composée de deux cônes, et ces cercles sont les seules directrices qui déterminent exclusivement le système de ces cônes.

462. Nous allons maintenant démontrer que l'arête de rebroussement passe à tout point limite d'un arc utile, et qu'elle y a un rebroussement.

Considérons d'abord deux courbes A et B (*fig.* 240) situées dans un même plan, et supposons qu'elles soient parcourues par deux points M et N mobiles suivant des lois quelconques, mais telles que la vitesse de M soit toujours de même sens, et que celle de N devienne nulle en un point I et change ensuite de signe; concevons enfin qu'on joigne par des droites les positions des deux points aux mêmes instants : l'enveloppe de ces lignes passera par le point I, car la droite correspondante IE rencontre de part et d'autre de I la droite qui la précède et celle qui la suit. Si, de plus, la droite IE est la tangente de B au point limite I (*fig.* 239), elle rencontrera près de ce point, mais d'un même côté, les deux droites entre lesquelles elle se trouve comprise; l'enveloppe aura donc un rebroussement en I.

463. Revenons maintenant à la *fig.* 244 : la tangente de la directrice B au point I rencontre la directrice A, et nous avons vu qu'il résulte de là que le point I est l'extrémité d'un arc utile et double de la courbe B. Par conséquent, si nous projetons sur un plan les deux directrices et les génératrices, nous aurons un système géométrique analogue à celui de la *fig.* 239. La projection de l'arête de rebroussement enveloppe des génératrices a donc un rebroussement, et, comme le plan de projection n'a pas une position déterminée par rapport à cette courbe, elle doit avoir elle-même un rebroussement.

La droite EI, étant une génératrice de la surface, se trouve tangente à l'arête de rebroussement; quand elle est normale à la directrice A, le segment compris entre le point E et l'arête est un maximum ou un minimum.

Nous appellerons *sommets* d'une développable les points qui sont les extrémités des arcs utiles d'une directrice.

464. Un plan assujetti à toucher une droite ne peut prendre qu'un mouvement de rotation autour de cette ligne; elle est le lieu de ses intersections successives, et il n'a d'autre enveloppe qu'elle. Il résulte de là que *les seules développables dont les génératrices puissent rencontrer une même droite sont des cônes ayant leur sommet sur cette ligne.*

465. Une seule directrice suffit pour déterminer une développable, quand on exige que la génératrice la rencontre deux fois. La surface est alors l'enveloppe d'un plan qui roule sur la courbe en la touchant en deux points. Elle se compose, en général, de plusieurs parties distinctes; ainsi l'intersection de deux cônes du second ordre est rencontrée deux fois par les génératrices de chacune de ces surfaces, et, suivant la position initiale du plan bitangent mobile, son enveloppe sera

l'un ou l'autre de ces cônes. On pourrait même, par cette génération, obtenir deux autres cônes ([1]).

466. Si l'on conçoit que les génératrices d'une surface réglée soient transportées parallèlement à elles-mêmes, de manière à passer toutes par un même point choisi arbitrairement, on aura le *cône directeur* de la surface. On peut de même pour un polyèdre développable former une *pyramide directrice,* et alors le parallélisme des arêtes entraîne évidemment celui des faces. Nous concluons de là, en passant à la limite, que les plans tangents d'une surface développable sont respectivement parallèles à ceux de son cône directeur. Si on place le sommet en un point de la surface, le cône la touchera le long de la génératrice qui y passe.

Le cône directeur d'une surface réglée peut être considéré comme ayant pour directrice la section de la surface par un plan situé à l'infini.

Nous dirons que le cône directeur est *simple, double, triple,* ..., suivant que chacune de ses génératrices sera parallèle à une, deux, trois, ... génératrices de la surface.

467. *Une surface réglée est déterminée, quand la génératrice est assujettie à rencontrer deux directrices* A *et* B, *et à être toujours parallèle à l'une des génératrices d'un cône directeur* C (*fig.* 250), car la droite de la surface qui passe par le point m d'une directrice A est l'intersection du cône qui a son sommet au point m et B pour directrice, et du cône directeur transporté parallèlement à lui-même de manière que son sommet soit en m.

Si l'on exige que la surface soit développable, une seule directrice A *et le cône directeur* C (*fig.* 248) *suffisent pour la déterminer,* car, d'après ce que nous avons vu à l'article précédent, elle doit être tangente le long d'une génératrice au cône C transporté parallèlement à lui-même, de manière que son sommet se trouve en un point quelconque de A; elle est donc l'enveloppe d'un cône C′ identique à C, toujours semblablement placé, et dont le sommet parcourt la directrice A.

468. Pour avoir les génératrices G′ et G'_1 qui passent par un point donné m de cette courbe, on mène au cône C des plans tangents parallèles à la tangente de la directrice en m; les génératrices de contact G et G_1 sont parallèles aux droites cherchées. On trouve deux droites quand la tangente mT est du côté de la convexité du cône G′; il n'y en a pas quand la tangente est dans la concavité, et alors le point m est sur un arc parasite. Si le point m était l'extrémité d'un arc utile, la tangente mT serait une génératrice du cône et de la développable, ce que nous avons déjà reconnu par d'autres raisonnements (art. **458**).

Dans le cas où le cône a des inflexions, il pourrait arriver que par une tan-

([1]) Poncelet a démontré que la développable qui a pour directrice double l'intersection de deux surfaces du second ordre se compose de quatre cônes de cet ordre (*Propr. project.*, art. 611-616).

gente MT on pût lui mener plus de deux plans tangents : le point m appartiendrait alors à un arc multiple de la directrice.

469. On peut considérer le cône directeur d'une surface développable comme l'enveloppe des positions d'un plan assujetti à passer par un point fixe et à être successivement parallèle aux divers plans tangents de la surface.

En général, les plans tangents d'une surface transportés tous parallèlement à eux-mêmes, jusqu'à passer par un point fixe, ne sont pas tangents à un même cône; ils n'ont pas d'enveloppe, à moins qu'on ne considère comme telle le point qui leur appartient à tous. Lorsque ces plans sont tangents à un cône, la surface primitive est développable, car un plan qui roulerait sur elle ne pourrait après chaque position en occuper indifféremment plusieurs autres; obligé de rester parallèle au plan qui dans son mouvement toucherait toujours le cône, les positions qu'il doit successivement occuper sont déterminées, et la surface est leur enveloppe.

470. Le cône directeur sert à résoudre, pour les développables, plusieurs problèmes que nous examinerons rapidement.

1° *Plan tangent par un point extérieur.* Si l'on prend le point donné pour sommet du cône, le plan cherché lui sera tangent comme à la développable; sa trace sur un plan quelconque sera donc tangente aux traces des deux surfaces, ce qui permettra de la déterminer. Les tangentes de ces traces en deux points homologues sont parallèles et, en général, elles se confondent pour un certain nombre de couples de points. Une tangente commune dont les points de contact ne seraient pas les traces de génératrices parallèles ne correspondrait pas à un plan satisfaisant aux conditions. On arrive facilement à comprendre les différentes dispositions, en considérant un cône de révolution. Le cône directeur sera identique à cette développable, et l'on devra conduire des tangentes communes à deux cercles : on obtiendra en général quatre droites, dont deux ne seront pas les traces de plans tangents communs.

2° *Plan tangent parallèle à une droite.* On mène au cône directeur des plans tangents parallèles à la droite, et l'on cherche les génératrices de la développable qui sont parallèles aux génératrices de contact. Les plans cherchés passent par ces droites et sont respectivement parallèles aux plans tangents du cône.

3° *Branches infinies des sections planes.* On détermine les génératrices du cône directeur parallèles au plan sécant, et ensuite leurs homologues sur la développable. Les asymptotes sont les intersections des plans tangents le long de ces droites avec le plan sécant.

Ces diverses constructions sont simples quand la détermination du cône directeur ne présente pas de difficulté. Nous aurons l'occasion d'en présenter des applications dans la troisième Partie (art. **970** et suiv.).

471. Nous avons examiné les principales manières de déterminer les surfaces

développables, mais il y en a plusieurs autres : ainsi un plan mobile est quelquefois assujetti à être toujours normal à une courbe; d'autres fois il doit toucher une ou plusieurs surfaces qui remplacent autant de lignes directrices.

Développement des surfaces développables.

472. Considérons un polygone rectiligne *mnop* ... (*fig.* 234) tracé sur un polyèdre développable : si nous supposons qu'on fasse tourner la face A de manière à l'amener dans le plan de la face B, le côté *mn* fera toujours le même angle avec la génératrice N, axe du mouvement. Nous concluons de là, en passant à la limite, que les angles formés par les tangentes d'une courbe tracée sur une surface développable, avec les génératrices des points de contact, ne sont pas altérés par le développement. L'angle compris entre les tangentes de deux lignes qui se coupent conserve également sa grandeur, parce qu'il est la somme ou la différence d'angles qui ne sont pas modifiés. Nous avons déjà établi cette proposition pour le cône et le cylindre (art. **115** et **122**).

473. D'après ce que nous venons de voir, les angles droits que les développantes de l'arête de rebroussement font avec les génératrices restent droits dans le développement; il en résulte que les transformées de ces courbes sont des développantes de la transformée de l'arête de rebroussement.

474. Nous allons maintenant rechercher la relation qui existe entre les rayons de courbure d'une ligne tracée sur une surface développable et ceux de sa transformée par développement.

Les côtés *on* et *op* du polygone *mr* (*fig.* 234) comprennent avant le développement un angle que nous appellerons ω, et après le développement un angle égal à $\widehat{nob} + \widehat{bop}$ ou $\beta + \gamma$. Les trois angles plans ω, β et γ forment un trièdre, et, si nous désignons par N le dièdre dont la droite *on* est l'arête, nous aurons, par la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique,

$$\cos N = \frac{\cos\gamma - \cos\omega\cos\beta}{\sin\omega\sin\beta}.$$

Posant ensuite

$$\varepsilon = 180^\circ - \omega, \quad \varepsilon' = 180^\circ - (\beta + \gamma)$$

et éliminant ω et γ, nous obtenons

$$\cos N = \frac{-\cos(\varepsilon' + \beta) + \cos\varepsilon\cos\beta}{\sin\varepsilon\sin\beta}.$$

Si le polyèdre devient une surface développable, ε et ε' seront les angles de contingence de la courbe dans laquelle se change le polygone considéré, et de sa

transformée (art. **95**); N sera l'angle du plan osculateur de la courbe avec le plan tangent. Les deux plans *nop*, *nob* qui comprennent l'angle N seront l'un osculateur de la courbe en O, l'autre tangent de la surface au même point. Comme d'ailleurs le sinus d'un angle infiniment petit est égal à l'arc qui le mesure, et son cosinus à l'unité, la formule se réduit à

$$\cos N = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

Dans le développement, la longueur d'un arc n'est pas modifiée : les rayons de courbure d'une ligne et de sa transformée sont donc inversement proportionnels aux angles de contingence ε et ε'. En appelant R et R' ces rayons, nous aurons

$$\frac{R}{R'} = \frac{1}{\cos N}.$$

Par conséquent, *le rapport des rayons de courbure en deux points correspondants d'une ligne tracée sur une surface développable et de sa transformée par développement est égal à l'inverse du cosinus de l'angle que forme le plan osculateur de la ligne avec le plan tangent de la surface* ([1]).

475. Si l'angle *nop* avait un de ses côtés confondu avec une arête, l'autre côté tournerait autour de celui-là, et l'angle n'éprouverait aucune modification. Nous voyons ainsi que, quand une courbe tracée sur une surface développable touche une génératrice, son rayon de courbure au point de contact n'est pas altéré dans le développement, ce qui, d'après la formule précédente, exige que l'angle N soit nul, et par suite que le plan osculateur soit tangent à la surface. Le théorème démontré à l'article **216** pour le cône s'étend donc à toutes les surfaces développables.

L'arête de rebroussement étant en tout point tangente à une génératrice, ses rayons de courbure sont les mêmes que ceux de sa transformée.

476. Dans le développement, une ligne double se divise, et les deux rayons de courbure sont déterminés par les inclinaisons du plan osculateur sur les deux plans tangents. Du reste, les considérations que nous venons de présenter ne sont pas applicables aux sommets; ainsi, bien que la courbe B supposée gauche soit tangente en I à la génératrice EI (*fig.* 244), son plan osculateur ne touche pas la développable le long de cette droite : on voit en effet que, des deux éléments infiniment petits qui déterminent ce plan, l'un seulement est sur la surface, l'autre se trouvant sur la partie parasite de la directrice.

477. D'après la formule de l'article **474**, toutes les fois que l'angle N sera

---

([1]) Ce théorème est dû à M. Catalan (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1843).

droit, R′ sera infini, et la transformée de la courbe considérée aura une inflexion. Si le plan osculateur est perpendiculaire à une génératrice, il coupera à angle droit deux plans tangents consécutifs, et la transformée de la courbe aura avec sa tangente un contact du troisième ordre. Nous avons déjà établi ces propositions pour le cône (art. **169**).

478. Une courbe tracée sur une surface développable passe d'une nappe à l'autre avec un rebroussement de premier ordre, à moins qu'elle ne soit tangente à l'arête enveloppe des génératrices. Le rayon R étant nul, R′ le sera également, et la transformée aura, elle aussi, un rebroussement de premier ordre. Si cependant le plan osculateur de la courbe est perpendiculaire au plan tangent, au point où elle rencontre l'arête de rebroussement, cos N sera nul comme R, et la formule ne donne aucune indication sur la grandeur de R′.

Pour voir ce qui arrive, supposons que le plan osculateur soit perpendiculaire au plan tangent de la surface, non pas au sommet du rebroussement, mais à une petite distance de ce point : la courbe ABC (*fig.* 246), transformée par développement de la courbe primitive, aura une inflexion en un point *i* voisin du rebroussement, et le bras BA traversera la tangente BT. Quand le point d'inflexion est très-rapproché de B, le point *i* se trouve sensiblement sur la tangente BT, et le rebroussement, quoique mathématiquement de premier ordre, se présente graphiquement comme de second ordre. Si la courbe tracée sur la surface éprouve des modifications telles, que le point d'inflexion de la transformée se déplace, lorsque ce point sera parvenu en B, le rebroussement sera rigoureusement du second ordre, et il paraîtra l'être jusqu'à ce que l'inflexion *i* soit assez éloignée pour que la partie du bras BC passée de l'autre côté de la tangente se détache de cette ligne.

On voit donc que, quand le plan osculateur de la courbe au point de rebroussement est perpendiculaire au plan tangent de la surface, le rebroussement de la transformée est géométriquement du second ordre, et qu'il paraît avoir les deux bras d'un même côté de la tangente, quand la perpendicularité a lieu près du point de rebroussement.

479. La réunion d'un point d'inflexion à un point de rebroussement élevant l'ordre du rebroussement d'une unité, si deux points d'inflexion *i* et *i′* viennent se confondre en B (*fig.* 247), le rebroussement deviendra du troisième ordre; mais alors le plan osculateur, étant perpendiculaire à deux plans tangents consécutifs, sera perpendiculaire à leur intersection, c'est-à-dire à la génératrice qui passe par le point et à l'arête de rebroussement qui lui est tangente.

Le rebroussement de la transformée est donc du troisième ordre, quand le plan osculateur de la courbe au point de rebroussement est normal à l'arête.

480. Pour faire le développement d'une surface développable, on considère un certain nombre de génératrices assez rapprochées pour que les parties de la sur-

face qu'elles comprennent puissent être regardées comme planes, et on l'assimile ainsi à un polyèdre développable ayant un grand nombre de *facettes*. La construction se fait ensuite facilement : nous en donnerons plus loin un exemple (art. **492**). Dans quelques cas particuliers on peut simplifier les opérations, en ayant égard aux formes spéciales des transformées de certaines courbes.

481. Si l'on développe un polyèdre développable sur le plan d'une face, et sa pyramide directrice sur le plan de la face parallèle, les arêtes homologues des deux surfaces seront évidemment parallèles après le développement, comme elles l'étaient auparavant. Nous voyons donc, en passant à la limite, que, *si l'on développe une surface développable sur son plan tangent le long d'une génératrice, et le cône directeur sur son plan tangent le long de la génératrice parallèle, les génératrices homologues seront encore parallèles après le développement*.

482. Les *lignes géodésiques* d'une surface développable, c'est-à-dire celles dont la longueur entre deux points donnés, sur une même nappe, est un minimum, ont pour transformées des droites; leurs rayons de courbure deviennent donc infinis dans le développement, et par suite, les angles N étant droits, les plans osculateurs sont normaux à la surface.

483. Pendant qu'on déroule une développable, la partie transformée d'une ligne géodésique est droite, et l'un quelconque de ses points décrit une développante de cette courbe. La trajectoire d'un point est donc une développante de l'une quelconque des lignes géodésiques qui passent par ce point. Inversement ces lignes sont les développées de la trajectoire.

Toute ligne peut être décrite de cette manière par un point déterminé du plan de développement de la surface développable enveloppe de ses plans normaux. On voit donc qu'une courbe a une infinité de développées; elle est l'intersection commune de toutes les surfaces développables dont ces lignes sont les arêtes de rebroussement.

Nous n'avons considéré pour une courbe plane qu'une développée, celle qui est dans son plan, mais il y en a, comme on voit, une infinité; elles sont situées sur un même cylindre.

484. Deux surfaces développables flexibles peuvent être appliquées l'une sur l'autre, de manière que leurs génératrices restent droites, toutes les fois que leurs arêtes de rebroussement ont une même transformée plane; car elles ont alors un développement commun que l'on peut ramener à l'une ou l'autre des deux formes primitives.

Deux cônes quelconques sont applicables l'un sur l'autre avec coïncidence des génératrices; il en est de même de deux cylindres. Nous supposons que ces diverses surfaces peuvent être déroulées indéfiniment; sans cela, deux cylindres ne pourraient être complétement appliqués l'un sur l'autre, que si leurs sections droites avaient la même longueur.

Observations sur la distance des génératrices consécutives d'une surface développable.

485. Deux arêtes consécutives d'un polyèdre développable appartiennent à une même face et par conséquent deux génératrices infiniment voisines d'une surface développable sont dans un même plan. D'un autre côté, deux tangentes d'une courbe gauche ne se rencontrent pas, si rapprochés que soient les points de contact. Pour concilier ces résultats, qui semblent contradictoires, nous allons chercher quel est l'ordre de grandeur de la distance de deux tangentes à une courbe gauche, quand l'arc qui sépare les points de contact est infiniment petit; en d'autres termes, quelle est la limite du rapport de cette distance à l'arc.

La *fig.* 204 représente les projections d'une courbe gauche sur trois plans rectangulaires : le premier, que nous supposons horizontal, est parallèle aux droites qui touchent cette ligne en deux points peu éloignés M et N; les deux autres sont l'un parallèle et l'autre perpendiculaire à la tangente au point M.

La droite $(i, i'_1 i')$ est la commune perpendiculaire des deux tangentes; sa longueur $i'i'_1$ est égale à $N''n$, et en traçant la droite $N''M''$ on obtient

$$\overline{i'i'_1} = \overline{M''n}\tang \widehat{nM''N''} = \overline{Mg}\tang \widehat{NMg}\tang \widehat{nM''N''}.$$

Si l'on suppose que le point (N, N') se rapproche du point (M, M'), le plan horizontal de projection tournera autour de la tangente MM'', et le plan osculateur en M sera la limite de ses positions. Le plan $(MM'', M''N'')$ qui contient la tangente en M et le point (N, N'') a la même limite, et par suite l'angle $N''M''n$ devient infiniment petit quand la distance des points considérés est elle-même infiniment petite. Les deux premiers facteurs du second membre de l'équation deviennent également infiniment petits, et en conséquence la distance des deux génératrices est un infiniment petit du troisième ordre ([1]).

Quand deux quantités infiniment petites se trouvent en présence, on doit négliger celle qui est de l'ordre le plus élevé; par conséquent, on peut dire que deux droites qui touchent une courbe gauche en des points infiniment rapprochés se rencontrent; mais si, dans une question relative à une surface développable, autre qu'un cône, il y avait lieu de considérer des infiniment petits de troisième ordre, la distance de deux génératrices consécutives ne serait pas négligeable.

Des considérations de cette nature se présentent assez souvent dans la théorie des lignes et des surfaces courbes. L'angle de contingence d'une courbe est infiniment petit (art. **95**), et par conséquent on le néglige devant des quantités finies;

([1]) Ce théorème est dû à M. Bouquet (*Journal de M. Liouville*, t. XI, 1846).

on dit ainsi que l'angle d'une courbe avec une droite est égal à l'angle de sa tangente avec cette droite, bien qu'il y ait une différence égale à la moitié de l'angle de contingence. Mais il y a beaucoup de questions, telle que celle de la détermination du rayon de courbure, où cet angle ne doit pas être négligé, parce qu'il n'est pas ajouté à une grandeur finie et qu'il intervient par son rapport avec une quantité de même ordre de grandeur.

Lorsque deux courbes se rencontrent sur une développable, l'angle formé par les arcs dont les concavités sont opposées s'accroît, dans le développement de la surface, de la moitié de la somme des augmentations des angles de contingence; mais cette quantité doit être négligée auprès de la grandeur finie de l'angle des courbes, et par suite les transformées comprennent le même angle que les lignes primitives (art. **472**).

Quand on rencontre des difficultés du genre de celle à l'examen de laquelle nous consacrons cet article, on doit toujours rechercher l'ordre de grandeur des différentes quantités que l'on considère: on peut alors remplacer par des propositions rigoureuses des énoncés qui ne paraissent être en contradiction que parce qu'ils sont incomplets. Jusqu'à présent, pour éviter toutes difficultés et toutes objections, nous avons employé la méthode des limites; mais dans la suite de ce Traité, quand, dans une question relative à une surface développable, il n'y aura pas lieu d'avoir égard aux infiniment petits du troisième ordre, nous dirons que deux génératrices consécutives se rencontrent.

486. Pour donner un exemple des circonstances où l'on peut être conduit à considérer des infiniment petits d'ordre différent, nous allons démontrer que *le cône directeur d'une développable en est osculateur le long de la génératrice commune, quand son sommet se trouve en un point de l'arête de rebroussement,* et pour cela nous allons faire voir que les sections faites dans la surface et dans le cône ainsi placé, par un plan perpendiculaire à la génératrice commune, sont osculatrices.

Considérons trois arêtes consécutives *am*, *bn* et *bo* d'un polyèdre développable (*fig.* 205), et coupons-les par un plan P perpendiculaire à *bo* : si nous supposons que la pyramide directrice ait son sommet au point *a*, les arêtes *am* et *an* lui appartiendront, et l'arête parallèle à *bo* sera une droite *ao'* située dans le plan *nbo*. A la limite, les angles *man* et *nbo* seront infiniment petits, ainsi que le segment *ab* compris sur l'arête de rebroussement entre les points de contact des deux génératrices consécutives. Il suit de là que les côtés *mn* et *no* seront infiniment petits du premier ordre, et le segment *oo'* infiniment petit du second, car il est égal à $\overline{ab}\sin\widehat{nbo}$; on doit donc le négliger auprès des longueurs *mn* et *no*, et par conséquent les sections faites dans les deux surfaces par le plan P ont trois points communs infiniment voisins et sont osculatrices.

CHAPITRE II.

SURFACES D'OMBRE ET DE PÉNOMBRE.

Détermination de l'ombre et de la pénombre d'une aire opaque éclairée par une aire lumineuse.

487. Si une aire opaque B (*fig.* 237) arrête les rayons émis par une aire lumineuse A, le cône qui a pour directrice la courbe B et dont le sommet est en un point *m* de la ligne A renferme, au delà de B, les points qui ne reçoivent pas de lumière du point *m*. L'espace compris dans tous les cônes ayant pour directrice la courbe B et pour sommets les différents points de A ne reçoit donc aucune lumière du périmètre de l'aire lumineuse, et à plus forte raison de l'intérieur de cette aire; il est dans l'ombre. L'espace qui n'est contenu que dans quelques cônes se trouve privé d'une partie de la lumière qu'il recevrait sans l'interposition de l'écran B, et est dans la *pénombre*. Nous voyons donc que l'enveloppe de ces cônes, c'est-à-dire la développable circonscrite aux courbes A et B (art. **454**), détermine l'étendue de l'ombre et celle de la pénombre. Elle se divise en deux parties, la *développable externe* et la *développable alterne*, enveloppes respectives des plans qui touchent les deux périmètres en laissant les aires, les unes d'un même côté, et les autres de côtés différents. La première surface limite l'ombre, et la seconde la pénombre.

Détermination de l'ombre d'une ellipse éclairée par un cercle.

488. Nous allons appliquer cette théorie à un exemple très-simple, la détermination de l'ombre d'une ellipse éclairée par un cercle. Nous supposons les plans de ces aires perpendiculaires à la droite qui passe par leurs centres, et par conséquent parallèles entre eux, et, prenant un plan de projection qui leur soit parallèle, nous traçons les périmètres en véritable grandeur (*fig.* 255).

Les tangentes du cercle et de l'ellipse aux points situés sur une même génératrice de la surface d'ombre doivent être dans un même plan et sont par conséquent parallèles. Nous avons d'ailleurs un procédé facile pour déterminer les points d'une ellipse où la tangente est parallèle à une droite donnée (art. **367**); nous pouvons donc tracer les projections des génératrices qui passent par des points

choisis sur le cercle. En construisant un nombre suffisant de ces droites, on détermine leur enveloppe, qui est la projection de l'arête de rebroussement.

489. Si nous concevons que l'ellipse soit remplacée par son cercle osculateur en un point m, la surface d'ombre sera un cône dont le sommet aura la position du point où la génératrice Mm rencontre l'arête de rebroussement (art. **451**).

On obtient par la considération de ce cône

$$g = \frac{Rl}{R - r}, \quad g' = \frac{Rl'}{R - r},$$

en appelant l et g les longueurs d'une génératrice mesurées depuis le cercle jusqu'à l'ellipse et jusqu'à l'arête de rebroussement, l' et g' les projections de ces longueurs sur le plan de l'une des courbes, R le rayon du cercle et r le rayon de courbure de l'ellipse.

Si l'un des rayons de courbure de l'ellipse était égal au rayon du cercle, la longueur g' serait infinie, et la génératrice correspondante serait asymptote de l'arête de rebroussement.

Sur notre figure les données sont telles, que le plus grand rayon de courbure de l'ellipse est plus petit que le rayon du cercle; par suite, l'arête de rebroussement ne s'étend pas à l'infini : la courbe est tout entière d'un même côté des plans des directrices.

Aux points C et C_1 les longueurs l et r atteignent leurs plus petites valeurs, et par suite g' a une valeur minimum. Il en résulte que la projection de l'arête de la surface a des rebroussements aux points I et I_1, où elle est touchée par les génératrices projetées BC, B_1C_1, et que l'arête elle-même possède des rebroussements aux points correspondants, car les génératrices tangentes ne sont pas perpendiculaires au plan de projection (art. **217, 218**). Les points I et I_1 sont par conséquent des sommets (art. **463**). Nous verrons, en effet, qu'une ligne double s'arrête aux points I et I_1, ou plutôt qu'elle y devient parasite.

On reconnaît par des raisonnements analogues que la longueur g est à son maximum sur les génératrices EF et E_1F_1, et que la surface a sur ces droites des sommets J et J_1.

490. Pour bien manifester la forme de la surface, nous l'avons coupée par trois plans parallèles aux plans des directrices, et placés au delà de celui de l'ellipse, de manière à intercepter sur la ligne des centres, à partir du centre de cette courbe, des longueurs égales aux trois huitièmes, aux cinq huitièmes et aux sept huitièmes de sa distance au centre du cercle.

Nous construisons facilement les sections, en portant sur chaque projection d'une génératrice, telle que Mm, et à partir du point m, des longueurs égales aux trois huitièmes, aux cinq huitièmes et aux sept huitièmes du segment Mm compris entre les deux courbes. Nous obtenons ainsi les trois lignes ee_1, kll_1k_1

et pqq_1p_1 : la première ne rencontre pas l'arête de rebroussement; les deux autres la coupent en quatre points. Les tangentes de ces courbes aux points situés sur une même génératrice sont évidemment parallèles.

On peut, à l'aide du cône osculateur que nous avons déjà considéré, obtenir la grandeur du rayon de courbure de l'ellipse aux points qui correspondent aux rebroussements d'une section, ce qui permet de déterminer les génératrices sur lesquelles ils se trouvent; nous ne nous arrêterons pas à cette recherche.

491. Nous avons représenté sur la *fig.* 254 la seconde section dégagée de toutes les constructions. Elle présente deux points doubles d et d_1; le lieu de ces points est une ligne double de la surface qui, vu la symétrie de la figure, se projette sur un segment du grand axe de l'ellipse. Cette intersection de la surface avec elle-même se termine aux points I et I_1, où les points k et l d'une part, k_1 et l_1 de l'autre, se réunissent. D'après ce que nous avons vu à l'article **459**, la ligne double a pour tangentes aux points I et I_1 les génératrices BC et B_1C_1.

On reconnaît par la considération du cône osculateur que, si l'un des plans sécants avait passé aux points I et I_1, le rayon de courbure de la section, aux points correspondants, eût été nul. Comme, d'ailleurs, le rayon de courbure atteint sa valeur minimum aux points situés sur les génératrices BC et B_1C_1, la courbe n'aurait pas eu de rebroussement. Elle eût été analogue à la développante pBq (*fig.* 257), qui forme, comme elle, la transition d'une courbe ayant deux rebroussements et un point double à une courbe qui n'a ni point double ni rebroussement (art. **439**).

L'ombre étant renfermée dans l'intérieur de la développable ne peut pas s'étendre au delà de la courbe d'intersection de la surface avec elle-même. Les segments des génératrices comprises entre cette ligne et l'ellipse appartiennent seuls à la partie de la surface qui limite l'ombre. On voit d'après cela que la première courbe ee_1 est le périmètre de l'ombre qui serait reçue sur le plan de section; que dans la seconde l'ombre n'occupe que la partie dd_1 (*fig.* 254), et enfin que la troisième pqq_1p_1 (*fig.* 255) est étrangère au problème qui nous occupe; elle se trouve au delà de la ligne double qui, comme nous venons de le voir, forme la limite de l'ombre. Il résulte de cela que le périmètre de l'ombre portée par l'ellipse sur un plan peut présenter des angles, mais non des rebroussements.

Une seconde courbe d'intersection de la surface avec elle-même s'étend entre les rebroussements J et J_1, mais elle n'a aucune importance dans la question d'ombre.

492. Nous allons maintenant faire le développement de la surface, en regardant comme planes les facettes comprises entre les génératrices tracées sur la figure : la construction ne pourra avoir que le degré d'exactitude que cette hypothèse comporte.

Nous devons tout d'abord nous donner la distance des plans de l'ellipse et du

cercle qui est restée indéterminée; nous prenons arbitrairement la longueur ST (*fig.* 260), et, portant sur la perpendiculaire SX la projection du segment d'une droite compris entre les deux courbes, nous avons, dans l'hypoténuse du triangle, sa longueur dans l'espace.

Le quadrilatère plan formé par une facette entre le cercle et l'ellipse peut être décomposé en deux triangles; l'un des côtés de chacun d'eux est donné immédiatement, et l'on obtient les deux autres en construisant sur leurs projections des triangles rectangles dont le second côté est ST (*fig.* 260). Ces triangles, placés à la suite les uns des autres, font connaître la position des génératrices sur le développement. Portant ensuite sur chacune de ces lignes, telles que M*m* (*fig.* 259), et à partir du point *m*, des longueurs égales aux trois huitièmes, aux cinq huitièmes et aux sept huitièmes du segment M*m* compris entre les transformées des directrices, on obtient les points qui appartiennent aux transformées des trois sections.

Les transformées du cercle, de l'ellipse et des sections parallèles ont des tangentes parallèles aux points situés sur une même génératrice. Leurs rayons de courbure à ces points sont proportionnels aux rayons de courbure avant le développement, et par suite aux longueurs interceptées sur la génératrice à partir de l'arête de rebroussement (art. **451**).

493. Si nous voulons avoir en véritable grandeur la courbe limite de l'ombre, nous prendrons deux plans coordonnés passant par la ligne des centres et respectivement par les axes de l'ellipse (*fig.* 261 et 262), et, après y avoir placé les projections BB_1 et E'_1E' du cercle, CC_1 et F'_1F' de l'ellipse, nous porterons sur ces droites les projections des points de division des courbes, relevées de la *fig.* 255. Nous pourrons ensuite tracer les projections des diverses génératrices considérées et déterminer la trace horizontale de la surface, qui est précisément la courbe que nous cherchons. Elle s'arrête aux sommets I et I_1, dont nous obtenons la position précise sur les génératrices BC et B_1C_1, en traçant les droites A*c* et Ac_1 qui passent par le centre du cercle, et respectivement par les centres de courbure de l'ellipse pour les points C et C_1 [1]. Ces droites sont les lignes des centres des sections circulaires de deux cônes respectivement osculateurs le long des génératrices BC et B_1C_1.

Les droites ZZ', $Z_1Z'_1$, $Z_2Z'_2$ sont les traces des plans des sections que nous avons construites [2].

---

[1] Si C et F sont deux sommets d'une ellipse qui a son centre en O (*fig.* 256), pour avoir les rayons de courbure en ces points, il suffit d'élever les perpendiculaires F*f* et C*c* à la corde CF : les longueurs cherchées sont respectivement O*f* et O*c*.

[2] Cette surface est représentée, dans la galerie de Géométrie du Conservatoire des Arts et Métiers, par un modèle où les génératrices tracées sur notre épure sont représentées par des fils.

Étude abstraite de la surface examinée dans le paragraphe précédent.

494. Les constructions et les raisonnements que nous venons de présenter sont presque tous applicables à deux courbes quelconques situées dans des plans parallèles et ayant un plan principal commun BB_1 (*fig.* 255); maintenant, en nous appuyant plus complétement sur les propriétés des directrices, nous allons déterminer la nature de la courbe à laquelle appartient la ligne d'ombre IQI_1 (*fig.* 261), et les différentes formes qu'elle peut avoir.

Nous prenons pour axes les droites Ax, Ay et $A'z$ (*fig.* 261 et 262); nous supposons que les directrices sont des coniques ayant leurs axes dans les plans coordonnés : ces axes sont BB_1 et E'_1E' pour la première, CC_1 et F'_1F' pour la seconde; nous appelons α, β, γ et α', β', γ' les coordonnées de deux points des directrices situés sur une même génératrice; enfin nous représentons les longueurs

$$AO,\ AB,\ A'E',\ OC \text{ et } O'F'$$

par

$$a,\quad b,\quad c,\quad b' \text{ et } c'.$$

Nous avons

$$\alpha = 0,\quad \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

$$\alpha' = a,\quad \frac{\beta'^2}{b'^2} + \frac{\gamma'^2}{c'^2} = 1. \tag{2}$$

La condition que les tangentes des courbes aux points considérés soient parallèles donne

$$\frac{c^2}{b^2}\frac{\beta}{\gamma} = \frac{c'^2}{b'^2}\frac{\beta'}{\gamma'}. \tag{3}$$

Enfin la génératrice qui passe par les points considérés a pour équations

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\gamma' - \gamma}(z - \gamma),$$
$$x = \frac{a}{\gamma' - \gamma}(z - \gamma).$$

Pour avoir la trace horizontale de la surface, il faut d'abord faire z nul dans les équations de la génératrice, ce qui donne les relations

$$(\gamma' - \gamma)y = \beta\gamma' - \gamma\beta', \tag{4}$$
$$(\gamma' - \gamma)x = -a\gamma, \tag{5}$$

et ensuite éliminer les quatre variables auxiliaires β, β', γ et γ' entre les équations (1), (2), (3), (4) et (5). On peut faire disparaître successivement β', β et γ'

en prenant respectivement leurs valeurs dans (3), (1) et (5). On obtient ainsi les deux équations

$$(6)\quad \begin{cases} x^2 = \left[\dfrac{b'^2c^4}{b^2c'^4} + \left(1 - \dfrac{b'^2c^2}{b^2c'^2}\right)\dfrac{\gamma^2}{c'^2}\right](x-a)^2, \\ a^2y^2 = b^2\left(1 - \dfrac{b'^2c^2}{b^2c'^2}\right)^2\left(1 - \dfrac{\gamma^2}{c^2}\right)(x-a)^2. \end{cases}$$

Enfin l'élimination de γ^2 donne

$$(7)\quad \frac{a^2}{b^2c'^2 - c^2b'^2}y^2 + \frac{x^2}{c^2} - \frac{(x-a)^2}{c'^2} = 0.$$

La courbe est donc une section conique, et il est facile de voir que dans notre exercice c'est une ellipse. L'un des axes se confond en direction avec l'axe des abscisses; l'autre est parallèle à l'axe des ordonnées. On peut vérifier que la courbe touche les génératrices horizontales aux points I et I_1.

494 *a*. On arrive par des raisonnements très-simples à reconnaître que la courbe PIQ est une ellipse.

Pour mener d'un point quelconque un plan tangent à la développable, on peut considérer ce point comme le sommet de deux cônes respectivement circonscrits aux deux directrices et par suite du second ordre, puis leur mener un plan tangent commun. Deux coniques, traces de ces cônes sur un même plan, ayant quatre tangentes communes, on voit que par un point quelconque passent quatre plans tangents à la développable.

Si le point est pris sur le plan de projection de la *fig.* 261, les quatre plans tangents auront, par rapport à ce plan, des positions symétriques, et leurs traces se confondront deux à deux. Or ces traces sont les tangentes qu'on peut mener du point considéré à la courbe PIQ; leur nombre étant de deux, cette ligne est une conique [1].

495. La développable peut être considérée comme déterminée par l'ellipse horizontale IQI_1 et par l'une des deux premières directrices; alors, en raisonnant comme à l'article **458**, nous trouvons que l'ellipse IQI_1 a deux arcs parasites Ii et I_1i_1, et deux arcs utiles II_1 et ii_1. Les génératrices qui se coupent aux différents points de l'arc ii_1 sont alternes par rapport aux deux premières directrices; elles forment donc la surface de la pénombre. Rien n'indique en effet dans nos formules si la génératrice que l'on considère est alterne ou externe, et par suite l'équation (7) doit représenter la trace horizontale des deux parties de la développable. Nous n'avons pas tracé les génératrices de la surface de la pénombre, par crainte de confusion.

---

[1] Cette démonstration est extraite des feuilles lithographiées du Cours professé à l'École Polytechnique par M. Mannheim.

On peut obtenir la position précise des sommets i et i_1 en traçant des droites par les centres de courbure des directrices pour les points B_1 et C, et pour les points B et C_1. Si les deux courbes étaient des ellipses ou des hyperboles, ces droites seraient distinctes de celles qui nous ont fait connaître la position précise des sommets I et I_1 (art. **493**); mais, la première directrice étant un cercle, les centres de courbure pour les points B et B_1 sont réunis en A, et par suite les sommets sont deux à deux sur les lignes Ac et Ac_1. Du reste, nous allons voir à l'article suivant que, dans tous les cas, les droites Ii et I_1i_1 sont dirigées vers le point A.

496. Nous avons un quadrilatère inscrit II_1i_1i, et un quadrilatère circonscrit GC_1HC, disposés de telle manière que les sommets du premier sont les points de contact des côtés du second; par conséquent, et d'après des théorèmes connus [1] :

Les diagonales Ii_1 et I_1i du premier passent par le point de rencontre O des diagonales du second.

Les points de concours des côtés opposés du premier sont sur la droite BB_1 qui passe par les points de concours des côtés opposés du second : les droites Ii et I_1i_1 convergent donc vers le point A.

La droite BB_1 est la polaire du point O, et par suite la droite CC_1 a son pôle en A.

497. La surface possède une ligne double dans le plan vertical de projection (art. **491**); on la construit de la même manière que celle du plan horizontal, et l'on obtient son équation par de simples permutations dans l'équation (7) :

$$\frac{a^2}{c^2b'^2 - b^2c'^2}z^2 + \frac{x^2}{b^2} - \frac{(x-a)^2}{b'^2} = 0. \tag{8}$$

Avec les données des *fig.* 261 et 262, cette conique est une hyperbole; elle n'a aucune importance dans le problème d'ombre, mais pour la surface, et par rapport aux directrices, elle présente les mêmes particularités que l'ellipse PIQ : ainsi elle a deux arcs utiles $J'J'_1$ et $j'j'_1$; leurs extrémités sont deux à deux sur les droites qui vont du centre A' du cercle aux points f' et f'_1, centres de courbure de l'ellipse aux sommets F' et F'_1.

Les deux directrices sont elles-mêmes des courbes d'intersection des surfaces d'ombre et de pénombre; la *développable complète* a donc *quatre lignes doubles planes et du second degré*.

498. La projection horizontale de l'arête de rebroussement de la surface

---

[1] On trouve ces théorèmes dans les principaux Ouvrages relatifs aux sections coniques, et notamment dans le *Traité des Propriétés projectives* (art. 185 et 186). Le lecteur qui ne les connaîtrait pas peut vérifier, à l'aide de l'équation (7), les relations que nous indiquons.

d'ombre est limitée aux sommets I et I_1 ; pour la pénombre, la projection se terminerait aux points i et i_1. Ces arcs utiles d'une même courbe sont séparés par des parties parasites que l'on peut désirer construire.

Il est facile de tracer la projection horizontale d'une génératrice, dès que l'on connaît les valeurs correspondantes de β et de β'. L'élimination de γ et de γ' entre (1), (2) et (3) donne

$$(9) \qquad \beta'^2 = \frac{c^2 b'^4 \beta^2}{c'^2 b^4 + (c^2 b'^2 - b^2 c'^2)\beta^2}.$$

Dans notre exercice c et b sont égaux, et b'^2 est plus grand que c'^2; il en résulte que, si l'on attribue à β^2 une valeur plus grande que b^2, β'^2 surpassera b'^2, et que les droites déterminées par les couples de valeurs de β et de β' ne seront plus des projections de génératrices.

499. Pour expliquer cette circonstance et montrer comment on peut étendre à ces droites la construction ordinaire, supposons que les directrices, au lieu d'être des ellipses, soient les hyperboles représentées par les équations

$$(1\ bis) \qquad \alpha = 0, \quad \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} = 1,$$

$$(2\ bis) \qquad \alpha' = a, \quad \frac{\beta'^2}{b'^2} - \frac{\gamma'^2}{c'^2} = 1.$$

La condition du parallélisme des tangentes sera exprimée comme précédemment par l'équation (3), et l'élimination de γ et de γ' entre (1 *bis*), (2 *bis*) et (3) fera trouver l'équation (9) qui convient ainsi à la nouvelle développable, de telle sorte que les projections horizontales des deux arêtes de rebroussement forment une seule courbe dans laquelle les arcs utiles pour l'une des surfaces sont parasites pour l'autre.

500. On voit, d'après ce qui précède, que les deux surfaces d'ombre et de pénombre ne forment qu'une même développable; mais nous devons faire observer que leurs développements n'ont entre eux aucune relation de position, et que les lignes doubles y ont des transformées différentes. Cette circonstance se présente toutes les fois que la développable est l'enveloppe de plans formant des séries distinctes.

Observations sur la développable circonscrite à deux sections coniques situées dans des plans parallèles.

501. Nous avons vu que la développable représentée sur les *Pl. XXVI* et *XXVII* avait quatre lignes doubles du second degré, situées dans les plans (BB_1, E'_1E'), (CC_1, F'_1F') et dans les deux plans de projection. Nous appellerons ces courbes

première, deuxième, troisième et *quatrième directrices,* et nous les désignerons par Δ, Δ', Δ'' et Δ''' : la surface peut être déterminée par deux quelconques d'entre elles.

Nous allons présenter quelques observations sur cette développable, mais auparavant nous devons donner aux résultats que nous avons obtenus une extension importante.

502. *Deux coniques situées dans des plans parallèles ont un système de diamètres conjugués parallèles.* Pour prouver ce théorème, concevons que l'on transporte l'une des courbes parallèlement à elle-même dans le plan de la seconde, de manière que les centres coïncident, et qu'on la fasse ensuite passer par tous les états de grandeur, en restant semblable à elle-même : il y aura un moment où elle touchera en deux points la courbe restée invariable. Le diamètre passant par ces points et celui qui est parallèle aux tangentes communes sont évidemment conjugués dans les deux coniques, ce qui démontre le lemme énoncé.

On obtiendra toujours un double contact réel quand l'une des lignes sera une ellipse; mais lorsqu'elles seront toutes les deux des hyperboles, si leurs asymptotes sont croisées, c'est-à-dire si, lorsqu'elles seront amenées à être concentriques, les deux asymptotes de l'une ne sont pas dans le même angle des asymptotes de l'autre (*fig.* 249), elles auront dans cette position deux points communs réels R et S, et deux seulement. Alors, quelque grandeur que l'on suppose à l'une d'elles, dans l'un ou dans l'autre angle de ses asymptotes, les rencontres R et S ne se changeront pas en contacts, car il n'y a pas d'autres rencontres qui puissent se réunir à elles : les courbes considérées n'ont donc pas de diamètres conjugués parallèles.

503. Deux coniques Δ et Δ' étant données dans des plans parallèles, si nous prenons pour plans coordonnés celui de l'une d'elles et les plans de leurs diamètres conjugués parallèles, les calculs des articles **494** et suivants seront entièrement applicables à la développable circonscrite, car les équations fondamentales (1), (2), (3), (4) et (5) ne supposent nullement que les axes soient rectangulaires. La surface a donc, outre Δ et Δ', deux lignes doubles du second degré Δ'' et Δ''', situées dans les plans des diamètres conjugués parallèles des directrices données, ayant leurs centres sur la ligne des centres de ces courbes, et telles que, pour chacune d'elles, le diamètre conjugué avec cette droite est parallèle aux plans de Δ et Δ'. Toutes les relations graphiques que nous avons établies, et notamment celles de polarité, subsistent.

Lorsque les directrices Δ et Δ' sont des hyperboles ayant leurs asymptotes croisées, les plans des diamètres conjugués parallèles sont imaginaires, et les courbes Δ'' et Δ''' n'existent plus.

504. Quand deux coniques situées sur un plan se touchent en deux points, la droite qui passe par le point de concours des tangentes communes et par le milieu

de la corde de contact contient les centres des deux courbes, et les diamètres qui lui sont conjugués dans l'une et dans l'autre sont parallèles à la corde de contact. Le système des diamètres conjugués parallèles est donc tel, que deux de ces droites se confondent en direction.

Cette proposition va nous permettre d'établir que la développable n'a pas de point double en dehors des lignes Δ, Δ', Δ'' et Δ'''.

Nous considérons sur cette surface un point double étranger aux directrices Δ et Δ' qui sont situées dans des plans parallèles; nous appelons ce point S, et nous désignons par G et G_1 les deux génératrices qui s'y croisent : un cône ayant son sommet en S et Δ' pour directrice sera tangent à la développable le long de G et de G_1, et sa trace sur le plan de Δ sera une conique Δ'_1, homothétique à Δ' et tangente à Δ aux points de cette courbe qui appartiennent à G et à G_1; les coniques Δ et Δ'_1 auront donc un double contact, et par suite leurs diamètres conjugués parallèles seront tels, que deux de ces lignes seront confondues en direction. Le plan qui passe par ce diamètre commun, et par le diamètre de Δ' qui lui est parallèle, contient la ligne des centres de Δ'_1 et de Δ', et par suite le sommet S du cône. Mais deux diamètres conjugués de Δ'_1 sont respectivement parallèles à deux diamètres conjugués de Δ'; le plan dont nous venons de parler est donc l'un des deux plans qui sont déterminés par les diamètres conjugués parallèles de Δ et de Δ', et, comme il contient le point S, on voit que ce point appartient à Δ'' ou à Δ'''.

Les quatre coniques Δ, Δ', Δ'' et Δ''' sont ainsi les seules lignes doubles de la développable, et par suite les seules lignes qui, prises pour directrices, déterminent la surface sans addition de nappes étrangères. Cette propriété justifie l'expression de *directrices* par laquelle nous les désignons (art. **461**).

505. On déduit sans difficulté de l'équation (7) l'abscisse n du centre L de la troisième directrice Δ'', et les longueurs p et q des moitiés de ses diamètres conjugués parallèles aux axes AOx et ABy (*fig.* 261) :

$$n = \frac{ac^2}{c^2 - c'^2}, \quad p^2 = \frac{a^2 c^2 c'^2}{(c^2 - c'^2)^2}, \quad q^2 = \frac{c^2 b'^2 - b^2 c'^2}{c^2 - c'^2}. \tag{10}$$

On peut, d'après ces équations, étudier les variations de forme de la troisième directrice, dans différentes hypothèses faites sur les deux premières, mais nous ne nous arrêterons pas à cette discussion, et nous supposerons que la surface est donnée par les directrices Δ et Δ''. Alors, résolvant les équations (10) par rapport à a, b' et c', nous aurons pour déterminer la seconde directrice Δ' les relations

$$a = n - \frac{p^2}{n}, \quad b'^2 = \frac{p^2 b^2 + q^2 n^2 - p^2 q^2}{n^2}, \quad c'^2 = c^2 \frac{p^2}{n^2}. \tag{11}$$

L'équation (8) de la quatrième directrice devient, lorsqu'on y porte les va-

leurs (11) de a, b'^2 et c'^2,

$$\frac{p^2b^2 + q^2n^2 - p^2q^2}{c^2q^2} z^2 + \frac{q^2 - b^2}{b^2} x^2 + 2nx + p^2 - n^2 = 0. \tag{12}$$

506. Ces équations permettent de reconnaître la nature des coniques Δ' et Δ''' dans les différents cas qui peuvent se présenter. Nous n'examinerons que les principaux.

507. Quand la troisième directrice Δ'' passe par les points B et B_1 (*fig.* 261), la valeur de b'^2 est nulle, et la deuxième directrice se réduit à une droite; la surface est alors formée de deux cônes du second degré dont les sommets F' et F'_1 ont pour coordonnées a, 0 et $\pm c'$ (*fig.* 263), les longueurs a et c' étant données par les équations (11). Ces deux points F' et F'_1 sont les seuls de la deuxième directrice qui soient utiles.

En faisant b' nul dans l'équation (8), on trouve que la quatrième directrice se réduit comme la seconde à la ligne des sommets.

508. Si la troisième directrice, restant invariable de forme, se transporte parallèlement à elle-même, de manière que son centre parcoure l'axe des abscisses, dans deux positions la surface présentera des particularités remarquables.

Quand Δ et Δ'' sont concentriques, n est nul, et l'on voit par les équations (11) que a, b' et c' ont des valeurs infinies : la seconde directrice Δ' est donc transportée à l'infini. L'équation (12) de Δ''' devient alors

$$\left(1 - \frac{b^2}{q^2}\right)\frac{z^2}{c^2} + \left(1 - \frac{q^2}{b^2}\right)\frac{x^2}{p^2} = 1.$$

On voit que cette conique a le même centre que Δ et Δ'', et que les traces des plans de deux directrices sur le plan de la troisième forment, pour celle-ci, un système de diamètres conjugués.

En faisant différentes hypothèses sur les signes des carrés b^2, c^2, p^2 et q^2, on reconnaît que les trois coniques concentriques sont nécessairement deux ellipses et une hyperbole ou trois hyperboles.

Quand les directrices données sont une ellipse et une hyperbole, la troisième conique peut être imaginaire, et alors, comme son plan est réel, la surface elle-même est imaginaire (art. **506**).

509. Lorsque la troisième directrice Δ'' touche le plan de la première, n^2 est égal à p^2, et l'on reconnaît par les équations (11) que Δ' se confond avec Δ. La surface de la pénombre est alors aplatie, et forme deux fois le plan de la courbe Δ, qui n'est plus une ligne double de la développable proprement dite, mais une simple section plane n'ayant de remarquable que d'être du second degré. On voit d'ailleurs par l'équation (12) que la quatrième directrice se trouve, comme

la seconde, tangente au plan de la première. Ces résultats pouvaient être prévus d'après les considérations présentées à l'article **456**.

510. Si l'on donne les troisième et quatrième directrices, c'est-à-dire deux courbes quelconques du second degré, ayant leurs centres sur la droite d'intersection de leurs plans, on trouvera deux autres directrices Δ et Δ', situées dans des plans parallèles aux diamètres des courbes données, conjuguées avec la droite des centres, et dont la position précise sera fixée par les relations de polarité que nous avons établies; ainsi les points A et O (*fig.* 241) seront les centres de Δ et de Δ', si la polaire de A par rapport à Δ'' passe par O, et si la polaire de O par rapport à Δ''' passe par A. Alors on aura

$$\mathrm{LK} = \mathrm{LO} + \mathrm{OK} = \frac{\overline{\mathrm{LP}}^2}{\mathrm{LA}} + \frac{\overline{\mathrm{KG}}^2}{\mathrm{AK}}$$

ou bien

$$n_1 = \frac{p^2}{n} + \frac{p'^2}{n_1 - n},$$

en posant

$$\mathrm{LP} = p, \quad \mathrm{KG} = p', \quad \mathrm{LK} = n_1, \quad \mathrm{LA} = n.$$

Résolvant l'équation par rapport à l'abscisse inconnue n [1], on trouve,

$$n = \frac{p^2 - p'^2 + n_1^2 \pm \sqrt{(p^2 - p'^2 + n_1^2)^2 - 4p^2 n_1^2}}{2n_1}.$$

Les deux valeurs de n sont les abscisses des points A et O; la position des plans de Δ et Δ' est donc déterminée.

Le seul cas auquel nous nous arrêterons est celui où les valeurs de n sont imaginaires, parce que nous avons examiné dans la discussion précédente la disposition de la surface, quand les plans des directrices Δ et Δ' sont réels.

La quantité soumise au radical est essentiellement positive quand p^2 est négatif, et aussi quand p'^2 est négatif, car on reconnaît facilement que l'on peut y faire permuter p^2 avec p'^2. Les plans des deux premières directrices Δ et Δ' ne peuvent donc devenir imaginaires que quand les deux dernières Δ'' et Δ''' rencontrent le diamètre suivant lequel se coupent leurs plans.

En mettant l'équation précédente sous la forme

$$n = \frac{p^2 - p'^2 + n_1^2 \pm \sqrt{[n_1^2 - (p' + p)^2][n_1^2 - (p - p')^2]}}{2n_1},$$

on reconnaît que les valeurs de n sont imaginaires lorsque l'on a

$$n_1 < p + p'; \quad n_1 > \pm (p - p'),$$

[1] n représente la même longueur que dans les articles précédents, mais avec un signe contraire, parce que l'origine des abscisses a été transportée du point A, qui est inconnu, au centre L de Δ''.

ce qui exige que les points de rencontre P et Q, H et G soient alternes. Dans ce cas, la développable n'a pas d'autre ligne double que les directrices Δ et Δ'' ([1]).

511. *Relations entre les segments interceptés sur les génératrices.* Nous allons maintenant étudier les relations qui existent entre les longueurs des segments interceptés sur une génératrice par les quatre directrices.

La génératrice qui passe par le point (M, M') (*fig.* 261 et 262), dont les coordonnées sont β et γ, rencontre la troisième directrice en un point u dont l'abscisse At est la valeur de x donnée par la première des deux équations (6) (art. **494**). Par conséquent, si nous posons

$$R^2 = \frac{b'^2 c^4}{b^2 c'^4} + \left(1 - \frac{b'^2 c^2}{b^2 c'^2}\right)\frac{\gamma^2}{c'^2},$$

nous aurons

$$\overline{At} = R^2(\overline{At} - a)^2,$$

d'où

$$\overline{At} = \frac{aR}{R - 1}.$$

Ag est l'abscisse du point où la même génératrice rencontre la directrice Δ'''; nous aurons donc, par de simples permutations de lettres,

$$\overline{Ag} = \frac{aR'}{R' - 1},$$
$$R'^2 = \frac{c'^2 b^4}{c^2 b'^4} + \left(1 - \frac{c'^2 b^2}{c^2 b'^2}\right)\frac{\beta^2}{b'^2}.$$

Portant dans cette dernière équation la valeur de β^2 prise dans l'équation (1), et posant

(13) $$\lambda = \frac{b^2 c'^2}{b'^2 c^2},$$

([1]) Si l'on a deux coniques Δ et Δ' (*fig.* 264), situées dans deux plans P et Q qui se coupent suivant une droite XY, on peut concevoir que l'on fasse une déformation homologique ou perspective relief, dans laquelle cette ligne s'éloigne à l'infini. Les plans P_1 et Q_1, homologues de P et de Q, seront parallèles, et la développable circonscrite aux courbes Δ_1 et Δ'_1 transformées de Δ et de Δ', aura, outre Δ_1 et Δ'_1, deux lignes doubles planes et du second degré qui pourront être imaginaires. La développable circonscrite à Δ et Δ' jouit donc de la même propriété.

Les pôles A et O de XY sont homologues des centres de Δ_1 et Δ'_1; les diamètres conjugués parallèles de ces dernières coniques ont pour homologues sur P et Q les droites qui passent par les points A et O, et qui se rencontrent en des points g et h de XY, tels que l'un quelconque soit le pôle des droites qui vont des points A et O à l'autre.

Les points g et h sont réciproques dans le système des deux coniques Δ et Δ'. Les droites Ag et Og d'une part, Ah et Oh de l'autre, déterminent les plans des directrices Δ'' et Δ'''.

Le tétraèdre formé par les plans des quatre lignes doubles a ses sommets aux points g, h, A et O; deux quelconques d'entre eux sont réciproques pour les coniques dont les plans se coupent suivant la droite sur laquelle ils se trouvent.

on trouve

$$R' = \lambda R.$$

Les expressions R et R′ sont affectées des deux signes; dans la disposition adoptée sur nos figures, elles sont positives pour les génératrices qui appartiennent à la surface de l'ombre et négatives pour celles de la surface de la pénombre, car les abscisses At et Ag des traces de l'une des premières droites sont plus grandes que a, et pour une des dernières ces mêmes longueurs sont plus petites que a. La formule (13) fait connaître leur rapport λ sans ambiguïté de signe.

Portant la valeur de R′ dans l'expression de Ag, on obtient

$$\overline{Ag} = \frac{a\lambda R}{\lambda R - 1}.$$

On trouve ensuite

$$\overline{Ot} = \frac{aR}{R-1} - a = \frac{a}{R-1},$$

$$\overline{Og} = \frac{a\lambda R}{\lambda R - 1} - a = \frac{a}{\lambda R - 1}.$$

On déduit enfin de ces expressions, et de celle qui a été obtenue précédemment pour At,

$$\frac{Ag}{Og} : \frac{At}{Ot} = \lambda.$$

512. Lorsque l'on établit des relations entre des segments faits sur une même droite, pour que les formules conviennent à la figure, quelle que soit la disposition relative de ses parties, il est nécessaire de regarder un segment comme changeant de signe chaque fois que l'ordre dans lequel ses extrémités se présentent est interverti. Afin d'appliquer facilement cette règle, on prend pour *origine* d'un segment le point représenté par la première des deux lettres qui servent à le désigner, et on le regarde comme étant positif ou négatif suivant qu'à partir de son origine il est dirigé dans un même sens convenu ou en sens contraire. Sur notre figure cette direction sera celle que nous avons adoptée pour les abscisses positives. Dans la formule qui précède, les segments ont leur origine au point A ou au point O : ils sont tous positifs.

D'après ce que nous venons de dire, Ag est égal à $-g$A; nous aurons donc, en changeant les signes des segments,

$$\frac{gA}{gO} : \frac{tA}{tO} = \lambda.$$

Ici les segments sont négatifs; mais, quand il n'entre dans une formule que des rapports de segments ayant une même origine, on peut ne pas s'inquiéter du signe de chacun d'eux et considérer un rapport comme positif ou négatif, sui-

vant que ses deux segments sont dirigés dans le même sens ou en sens contraire à partir de leur extrémité commune.

513. Les segments de la droite Mg sont proportionnels à leurs projections sur Ax; nous avons donc

$$\frac{gM}{gm} : \frac{uM}{um} = \lambda. \tag{14}$$

Enfin la même équation continuera de subsister si les différentes lettres représentent les points de la génératrice qui sont sur les quatre directrices, au lieu de leurs projections horizontales.

L'expression $\frac{gM}{gm} : \frac{uM}{um}$ est le *rapport anharmonique* des quatre points g, u, M et m situés en ligne droite : c'est le *rapport des distances du premier point aux deux derniers, divisé par le rapport des distances du second à ceux-là*. Le théorème exprimé par l'équation (14) consiste donc en ce que, *dans la développable circonscrite à deux coniques, le rapport anharmonique des quatre points où une génératrice quelconque rencontre les quatre directrices est constant.*

L'équation (13) montre que, quand les directrices Δ et Δ' sont de même genre, le rapport constant λ est positif; il est égal à l'unité lorsque ces courbes sont semblables, et l'on reconnaît facilement, d'après l'équation (14), que les points g et u se réunissent. La surface est alors composée de deux cônes, et chaque génératrice coupe les deux plans de Δ'' et de Δ''' en un seul point qui remplace ces deux coniques.

514. On rencontre souvent, dans les recherches géométriques, des systèmes de quatre points g, u, M, m dont le rapport anharmonique λ est égal à l'unité négative : on dit alors que la division est *harmonique*, ou que les deux premiers points sont *conjugués harmoniques* des deux autres.

515. On déduit de l'équation (14)

$$\lambda = \frac{gM \times um}{gm \times uM} = \frac{gM \times um}{(gu + um)(um + mM)} = \frac{gM \times um}{gu \times mM + um(gu + um + mM)},$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{gu \times mM}{gM \times um} + 1,$$

et enfin

$$\lambda' = 1 - \frac{1}{\lambda}, \tag{15}$$

en posant

$$\frac{gu}{gM} : \frac{mu}{mM} = \lambda'. \tag{16}$$

On obtient par des transformations analogues

$$\lambda'' = \frac{1}{1 - \lambda}, \quad \frac{gm}{gu} : \frac{Mm}{Mu} = \lambda''.$$

λ' et λ'' sont deux nouveaux rapports anharmoniques des points de division. Quatre points en ligne droite déterminent ainsi trois rapports anharmoniques distincts, qui ont entre eux des relations simples.

516. Si nous portons les valeurs (11) de b'^2 et de c'^2 (art. **505**) dans l'expression (13), et la quantité ainsi obtenue pour λ dans l'équation (15), nous aurons

$$\lambda' = q^2 \frac{p^2 - n^2}{b^2 p^2}.$$

Quand n est nul, la valeur de λ' se réduit à $\frac{q^2}{b^2}$; et nous savons que Δ, Δ'' et Δ''' sont alors concentriques et que Δ' est à l'infini (art. **508**). Lorsque le point m s'éloigne, le rapport $\frac{mu}{m\text{M}}$ converge vers l'unité et atteint cette limite quand la directrice à laquelle il appartient est à l'infini. On a donc, dans le cas qui nous occupe,

$$\frac{gu}{g\text{M}} = \frac{q^2}{b^2}.$$

Cette relation, qu'il est facile d'obtenir directement, montre que, *dans la développable circonscrite à deux coniques concentriques, les segments interceptés par les trois directrices sur une génératrice sont dans un rapport constant.*

Le rapport de gu à gM (*fig.* 261) est le même que celui de tu à AM. Les directrices Δ'' et Δ étant d'ailleurs devenues concentriques, les longueurs tu et AM sont les abscisses des points u et M de ces courbes, mesurées sur la droite diamétrale commune Ay; donc, *si l'on considère les points où une génératrice rencontre deux directrices, leurs abscisses sur le diamètre commun seront dans un rapport constant.*

517. *Groupes de génératrices.* Considérons quatre points M, N, R et S situés sur la première directrice Δ (*fig.* 255), et disposés de manière à former les sommets d'un quadrilatère ayant ses côtés parallèles aux diamètres conjugués parallèles de Δ et Δ' : par ces points passent huit génératrices qui se croisent aux points m, n, r et s placés d'une manière analogue sur Δ'. Ces génératrices sont

Mm,	Nn,
Ss,	Rr,
Nr,	Ms,
Rn,	Sm.

Les quatre d'entre elles qui appartiennent à la surface de la pénombre ont été tracées par exception.

518. Nous regarderons ces huit droites comme formant un *groupe*, et appartenant à deux *systèmes* différents. Chaque génératrice de l'un des systèmes rencontre celles de l'autre qui dépendent du même groupe en des points qui sont

sur les quatre directrices. Deux génératrices ne se rencontrent jamais, lorsqu'elles dépendent de groupes différents ou d'un même système dans un groupe.

Les huit génératrices d'un groupe appartiennent évidemment à un hyperboloïde.

519. Dans un exercice graphique, on ne peut obtenir des points des directrices inconnues qu'en opérant sur des groupes de génératrices. Il est donc intéressant de savoir comment les quatre points d'un même groupe sont disposés sur les deux coniques Δ'' et Δ'''.

Les quatre points M, N, R et S ont des ordonnées égales en grandeur absolue; le groupe auquel ils appartiennent peut être considéré comme déterminé par le carré y^2 de cette ordonnée; par conséquent, si l'on attribue à y^2 la valeur $\overline{M'A'}^2$ (*fig.* 262), chacune des équations (6) de l'article **494** sera celle d'une ligne passant par les quatre points u, u_1, v et v_1 (*fig.* 261), traces horizontales des génératrices du groupe dont nous nous occupons. La première équation représente deux droites vv_1 et uu_1 parallèles à l'axe Ay; la seconde, deux droites vu_1 et uv_1 qui se croisent en O. En les divisant l'une par l'autre, on obtient une troisième équation qui détermine deux droites dirigées vers le point A.

Les quatre points g', g'_1, k' et k'_1, traces des génératrices du groupe sur le plan de Δ''', sont également placés de telle manière, que les droites qui les joignent deux à deux convergent les unes vers le point A', les autres vers le point O', et les dernières vers le point à l'infini où les traces des plans de Δ et de Δ' se rencontrent.

520. Les quatre sommets I, I_1, i et i_1, situés sur Δ'', satisfont aux relations que nous venons d'indiquer, et déterminent un groupe qui correspond à la valeur o de y^2. Ce groupe ne contient que quatre génératrices, et par suite il n'a que deux points sur les autres directrices : B et B_1 sur Δ, C et C_1 sur Δ', H' et G' sur Δ'''.

Une disposition analogue existe pour les sommets placés sur Δ'''.

La considération des groupes simples permet de reconnaître le nombre des sommets de la surface, dans les différentes hypothèses que l'on peut faire sur les directrices Δ et Δ'. Nous remarquerons que, quand la développable a des sommets sur l'une de ces deux courbes, telle que Δ', les tangentes en ces points doivent être des génératrices (art. **457**), et, comme elles sont parallèles au plan de Δ, les points où elles rencontrent cette directrice sont à l'infini, et elles sont par conséquent parallèles à ses asymptotes. Elles forment d'ailleurs évidemment un groupe simple.

521. *Discussion du nombre des sommets.* Nous distinguerons six dispositions principales.

1° Quand les directrices Δ et Δ' sont des ellipses situées d'une manière quelconque dans des plans parallèles, les plans des diamètres conjugués parallèles

sont réels, et contiennent des groupes simples qui déterminent quatre sommets sur chacune des directrices Δ'' et Δ'''; mais il n'y en a pas sur les premières Δ et Δ', parce qu'aucune d'elles n'a d'asymptotes : la surface a donc en tout huit sommets réels (*fig.* 255).

2° Quand la première directrice Δ est une ellipse, et la seconde Δ' une hyperbole, les plans des diamètres conjugués parallèles sont encore réels, mais l'un de ces diamètres Nn (*fig.* 253) ne rencontre pas l'hyperbole, et le groupe simple correspondant est imaginaire avec les sommets qu'il contient sur Δ'''. D'un autre côté, la première directrice Δ porte quatre sommets aux points I, I_1, i et i_1 où la tangente est parallèle à l'une des asymptotes de l'hyperbole Δ' : la surface a donc huit sommets sur les directrices Δ et Δ'' [1].

3° Lorsque les directrices Δ et Δ' sont des hyperboles, si dans le système des diamètres conjugués parallèles les diamètres transverses sont sur la même droite (*fig.* 252), il y a un groupe simple réel dans leur plan Oy, et par suite quatre sommets sur la directrice Δ'' qu'il contient. Il y en a quatre autres I, I_1, i et i_1 sur l'hyperbole Δ' pour laquelle l'angle des asymptotes est le plus petit : la surface a donc encore huit sommets.

4° Les directrices Δ et Δ' étant toujours des hyperboles, si les diamètres transverses dans le système des diamètres conjugués parallèles ne sont pas sur la même droite, la surface pourra être imaginaire (*fig.* 265); lorsqu'elle sera réelle, les deux groupes contenus dans les plans Non, Mom des diamètres conjugués parallèles (*fig.* 266) seront imaginaires, mais ceux formés par les tangentes des premières directrices réciproquement parallèles aux asymptotes seront réels, et la surface aura huit sommets placés quatre à quatre sur Δ et Δ'.

5° Lorsque les diamètres conjugués parallèles des hyperboles Δ et Δ' sont imaginaires (*fig.* 249), on ne peut plus former que des *groupes incomplets* contenant chacun quatre génératrices, telles que MM', MN', NM' et NN'. Les directrices Δ'' et Δ''' sont imaginaires, et la surface a seulement quatre sommets I, I_1, J et J_1 placés sur les directrices Δ et Δ', et dépendant de groupes simples formés chacun de quatre génératrices.

Dans ce cas la surface n'est plus composée de deux parties distinctes; elle peut être déroulée sur un plan par un même développement.

6° Si les plans des directrices Δ et Δ' sont imaginaires, la surface sera donnée par deux lignes doubles Δ'' et Δ''', ayant leurs centres sur la droite d'intersection de leurs plans, et telles que leurs points de rencontre avec ces lignes soient réels et alternes (art. 510). On pourra alors mener à chaque courbe deux tangentes de

[1] Quand deux coniques sont concentriques, leurs diamètres conjugués communs en direction sont les diagonales du parallélogramme formé par les tangentes de l'une parallèles aux asymptotes de l'autre. Nous nous sommes servi de cette propriété, dont la démonstration est facile, pour l'établissement des *fig.* 252, 253 et 266.

l'un des points où l'autre perce son plan. La développable aura ainsi deux sommets sur chacune des directrices réelles.

522. Telles sont les dispositions différentes que la surface présente quand deux directrices sont des coniques à centre situées dans des plans parallèles ([1]). On doit distinguer deux grandes variétés. Dans la première, la surface se divise en deux parties ayant chacune son arête de rebroussement distincte; elle a quatre lignes doubles réelles, dont deux portent quatre sommets. Quatre des huit sommets sont sur une partie de l'arête de rebroussement, et les quatre autres sur l'autre. Les groupes ordinaires se composent de huit génératrices, et les groupes simples de quatre.

Dans la seconde variété, la surface ne se divise pas en deux parties. Elle a deux lignes doubles dont chacune porte deux sommets. Les groupes ordinaires se composent de quatre génératrices, et les groupes simples de deux.

Enfin, la surface peut être imaginaire.

Détermination générale des surfaces d'ombre et de pénombre. — Développable circonscrite à deux surfaces du second degré.

523. *Considérations générales.* L'exercice auquel sont consacrées les *Pl. XXIV, XXV, XXVI* et *XXVII* montre comment on peut résoudre les problèmes graphiques qui se rattachent à la détermination de l'ombre d'une aire opaque éclairée par une aire lumineuse. Il sera souvent nécessaire de couper la développable par des plans, pour obtenir des points de sa courbe d'intersection avec elle-même. L'ombre sera indéfinie quand la surface n'aura pas de ligne double du côté de l'aire opaque, et quand elle en aura une dont la partie utile s'étendra à l'infini.

524. La surface générale de l'ombre ne sera pas modifiée si l'on remplace les aires par des corps dont les surfaces lui soient inscrites. L'ombre d'un corps opaque éclairé par un corps lumineux est donc limitée par l'enveloppe des positions d'un plan qui se meut en les touchant toujours, et les laissant d'un même côté. On trouve par un raisonnement analogue que, si les corps étaient de côtés différents du plan mobile, l'enveloppe formerait la surface de la pénombre.

([1]) Lorsque les directrices données ne sont pas dans des plans parallèles, les points M, N, R et S d'un même groupe (*fig.* 264) sont les sommets d'un quadrilatère dont les côtés convergent deux à deux vers les points g et h (art. 510, note), et dont les diagonales se croisent au pôle A de XY.

Quand l'une des courbes Δ et Δ' ne rencontre pas la droite XY, sa transformée est une ellipse, et la surface a huit sommets; mais si les deux directrices coupent XY, et si les points de section sont alternes (*fig.* 267), les transformées seront des hyperboles ayant la disposition indiquée sur la *fig.* 249, et alors la surface n'aura que deux lignes doubles Δ et Δ', et quatre sommets I, I_1, J et J_1. Enfin, si les coniques étaient disposées comme il est indiqué sur la *fig.* 251, la perspective leur donnerait les positions relatives indiquées sur la *fig.* 265, et la surface serait imaginaire.

Il arrive quelquefois que la développable complète se compose de deux cônes; mais, en général, elle a une arête de rebroussement, et sa détermination exige des tracés très-longs. On peut obtenir des génératrices en menant des plans tangents communs à deux cylindres respectivement circonscrits aux surfaces et parallèles à une même direction arbitraire, et en joignant par des droites les points où un même plan touche les deux surfaces. Pour avoir un résultat de quelque exactitude, il faut répéter cette opération un assez grand nombre de fois.

525. *Surfaces du second degré inscrites dans la développable circonscrite à deux coniques.* Nous allons rechercher si des surfaces du second degré peuvent être inscrites dans la développable qui est représentée dans les *Pl. XXIV, XXVI* et *XXVII.* Nous conserverons les notations de l'article **494**.

Pour qu'un plan

$$(1) \qquad \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = 1$$

soit tangent à la développable, il faut qu'il contienne les tangentes des directrices Δ et Δ', en deux points d'une même génératrice ; les équations de ces tangentes sont

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\beta}{b^2}y + \frac{\gamma}{c^2}z = 1, \\ x = 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{\beta'}{b'^2}y + \frac{\gamma'}{c'^2}z = 1, \\ x = a. \end{array}\right.$$

En exprimant que ces droites se confondent avec les traces du plan (1) sur les plans de Δ et de Δ', on trouve quatre équations qui, en vertu de la relation (3) de l'article **494**, se réduisent aux trois suivantes :

$$(2) \qquad \mathrm{A} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{b'^2}{b^2}\frac{\beta}{\beta'}\right), \quad \mathrm{B} = \frac{\beta}{b^2}, \quad \mathrm{C} = \frac{\gamma}{c^2}.$$

Considérons maintenant une surface du second degré, ayant son centre sur l'axe $\mathrm{A}x$, et dans laquelle cet axe et les diamètres parallèles aux autres axes $\mathrm{A}y$ et $\mathrm{A}'z$ (*fig.* 261 et 262) forment un système de diamètres conjugués. Son équation sera

$$(3) \qquad \frac{(x-u)^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} + \frac{z^2}{\nu^2} = 1.$$

En cherchant la condition pour que le plan (1) touche cette surface, on trouve [1]

$$\mathrm{A}^2(\lambda^2 - u^2) + \mathrm{B}^2\mu^2 + \mathrm{C}^2\nu^2 + 2\mathrm{A}u - 1 = 0$$

---

[1] On calcule l'équation générale du plan tangent à la surface (3), et l'on exprime que ce plan se confond avec (1); on obtient ainsi trois équations de condition, on en déduit les coordonnées du point de contact et l'on porte leurs valeurs dans l'équation (3).

On peut encore éliminer une des variables entre les équations (1) et (3) et exprimer que l'équation que l'on obtient est décomposable en deux facteurs du premier degré, car alors le plan coupe la surface suivant deux droites.

et, remplaçant A, B et C par leurs valeurs (2),

$$\frac{\mu^2}{b^4}\beta^2 + \frac{\nu^2}{c^4}\gamma^2 + (\lambda^2 - u^2)\frac{b'^4}{a^2 b^4}\frac{\beta^2}{\beta'^2} - 2\frac{b'^2}{a^2 b^2}(\lambda^2 - u^2 + au)\frac{\beta}{\beta'} + \frac{\lambda^2 - u^2 + 2au}{a^2} - 1 = 0.$$

Cette équation exprime que la surface (3) est tangente en un point au plan qui touche la développable le long de la génératrice considérée. Une seule des variables auxiliaires, par exemple β, suffit pour déterminer cette droite; les valeurs correspondantes de γ et de β' sont données par les équations (1) et (9) des articles **494** et **498**.

Éliminant γ et le carré de β', nous trouvons

$$(4)\qquad M\beta^2 + P = N\frac{\beta}{\beta'},$$

en posant

$$\frac{1}{b^2}\left[\frac{\mu^2}{b^2} - \frac{\nu^2}{c^2} + (\lambda^2 - u^2)\frac{c^2 b'^2 - b^2 c'^2}{a^2 b^2 c^2}\right] = M,$$

$$2\frac{b'^2}{a^2 b^2}(\lambda^2 - u^2 + au) = N,$$

$$\frac{\lambda^2 - u^2}{a^2}\left(\frac{c'^2}{c^2} + 1\right) + 2\frac{u}{a} + \frac{\nu^2}{c^2} - 1 = P.$$

Élevons l'équation (4) au carré, portons-y la valeur de β'^2 prise à l'article **498**, et ordonnons,

$$M^2\beta^4 + \left[2MP - \frac{N^2}{c^2 b'^4}(c^2 b'^2 - b^2 c'^2)\right]\beta^2 + \left[P^2 - N^2\frac{b^4 c'^2}{b'^4 c^2}\right] = 0.$$

Pour que la surface du second degré soit touchée par tous les plans tangents de la développable, il faut que cette équation soit satisfaite quel que soit β, et par suite que les coefficients des trois termes soient nuls, ce qui exige que M, N et P soient égaux à zéro. Nous avons ainsi trois équations; en les résolvant par rapport à λ^2, μ^2 et ν^2, on trouve

$$(5)\qquad \lambda^2 = u^2 - au, \quad \mu^2 = \frac{a-u}{a}b^2 + \frac{u}{a}b'^2, \quad \nu^2 = \frac{a-u}{a}c^2 + \frac{u}{a}c'^2.$$

A toute grandeur de u correspondent des valeurs pour λ^2, μ^2 et ν^2, et par conséquent tout point de l'axe des abscisses est le centre d'une surface du second degré inscrite dans la développable, et ayant d'ailleurs des diamètres conjugués parallèles à nos axes coordonnés.

526. Quand u est nul, on trouve

$$\lambda^2 = 0, \quad \mu^2 = b^2, \quad \nu^2 = c^2.$$

La surface du second degré se réduit alors à la directrice Δ. La valeur a de u fait de même trouver la seconde directrice Δ'. Enfin, si l'on donne à u la valeur (10) de l'abscisse n du centre de Δ'' (art. **505**), on obtient pour λ^2 et μ^2 les valeurs de p^2 et de q^2, et ν^2 devient nul. Ainsi donc chacune des coniques lignes doubles de la développable représente une surface du second ordre inscrite, qui se distingue des autres en ce qu'un de ses trois diamètres conjugués est nul.

Si le centre de la surface inscrite parcourt l'axe des abscisses, à chacune de ses coïncidences avec le centre de l'une des lignes doubles, un des carrés λ^2, μ^2 et ν^2 changera de signe, et la surface passera d'un genre à un autre. Quand le centre sera à l'infini, μ^2 et ν^2 changeront de signe simultanément.

Une directrice regardée comme une surface aplatie inscrite dans la développable est une aire plane limitée à la courbe et située du côté de sa concavité, ou du côté de sa convexité, suivant qu'on la rattache à l'une ou à l'autre des deux séries dont elle forme la transition. Ainsi la directrice Δ est l'aire contenue dans le cercle, ou toute la surface de son plan sauf le cercle, suivant qu'on la considère comme le dernier des ellipsoïdes qui ont leur centre à gauche du point A, ou comme le premier des hyperboloïdes qui ont leur centre entre les points A et O ([1]).

527. Pour toute valeur de l'abscisse u, la surface du second degré inscrite dans la développable représentée sur les *fig.* 261 et 262 est réelle. Nous allons rechercher si cela tient à une disposition spéciale des directrices Δ et Δ', ou s'il en est toujours ainsi. Les équations (5) permettent de résoudre facilement cette question.

Pour qu'une valeur de u détermine une surface inscrite réelle, il suffit que l'un des trois carrés λ^2, μ^2, ν^2 soit positif. L'abscisse a de Δ' peut être regardée comme positive, et par suite λ^2 sera positif lorsque u sera négatif, et lorsqu'il sera positif et plus grand que a. Ainsi donc tout point de l'axe des abscisses autre que ceux du segment AO (*fig.* 261) est le centre d'une surface réelle du second degré inscrite dans la développable, quelles que soient les coniques directrices Δ et Δ'.

Il nous reste à examiner ce qui arrive lorsque l'on suppose à l'abscisse u des valeurs comprises entre o et a.

Si Δ est une ellipse, le premier terme de chacune des valeurs de μ^2 et de ν^2 sera positif, et, comme b'^2 et c'^2 ne peuvent être négatifs simultanément (car nous éloignons le cas où Δ' serait imaginaire), nous voyons que l'un au moins des carrés μ^2 et ν^2 sera positif. On arriverait au même résultat, et par les mêmes raisonnements, si Δ' était une ellipse.

([1]) M. Dupin a le premier reconnu que les coniques qui forment les transitions des différents genres dans les séries de surfaces du second degré doivent être considérées comme des surfaces aplaties (*Développements de Géométrie*, p. 270).

Quand Δ et Δ' sont des hyperboles placées de manière que leurs diamètres transverses se correspondent (*fig.* 252), deux carrés tels que b^2 et b'^2 ou c^2 et c'^2 sont positifs, et la valeur correspondante pour μ^2 ou ν^2 est également positive.

Enfin si Δ et Δ' sont des hyperboles placées de manière que leurs diamètres transverses ne se correspondent pas, deux carrés tels que b'^2 et c^2 seront négatifs; après avoir mis leur signe en évidence, on trouve que les conditions pour que μ^2 et ν^2 soient positifs sont

$$u < \frac{ab^2}{b^2+b'^2}, \quad u > \frac{ac^2}{c^2+c'^2},$$

ou (art. **505**)

$$u < \mathrm{AK}, \qquad u > \mathrm{AL},$$

en désignant, comme sur la *fig.* 261, par A, K et L les centres de Δ, de Δ''' et de Δ''. Dans nos hypothèses, les points K et L sont sur le segment AO.

Si AK est plus petit que AL, aucun des points du segment KL ne sera le centre d'une surface réelle du second ordre inscrite dans la développable; mais si AK est plus grand que AL, un au moins des carrés μ^2 et ν^2 sera positif, quel que soit u. On a dans ce cas

$$\frac{ab^2}{b^2+b'^2} > \frac{ac^2}{c^2+c'^2},$$

d'où

$$\frac{c^2}{b^2} < \frac{c'^2}{b'^2}.$$

Cette inégalité signifie que les angles des asymptotes des deux directrices Δ et Δ' n'empiètent pas l'un sur l'autre (*fig.* 266). Nous avons vu que la développable est réelle quand cette condition est satisfaite, et imaginaire lorsqu'elle ne l'est pas (art. **521**, 4°).

En résumé, *quand deux coniques sont situées dans des plans parallèles, tout point de la droite qui passe par leurs centres est le centre d'une surface réelle du second degré inscrite dans la développable qui leur est circonscrite, lorsque cette développable est elle-même réelle* (¹).

Quand la développable circonscrite aux coniques Δ et Δ' est imaginaire, les équations (3) et (5) représentent encore une série de surfaces du second ordre; mais ces surfaces n'ont pas d'enveloppe (art. **434**). La discussion précédente comprend implicitement, pour la position des centres des surfaces réelles, les résultats relatifs à ce cas.

(¹) Les génératrices de la développable circonscrite sont divisées homographiquement par les lignes de contact des surfaces du second ordre inscrites. Ce théorème, plus général que celui de l'article 513, peut lui-même recevoir une extension importante.

Voir notre Ouvrage sur les *Surfaces réglées tétraédrales symétriques*, premier Mémoire, art. 39, 70, etc.

Les formules que nous avons obtenues supposent que les directrices Δ et Δ' ne sont pas des hyperboles ayant leurs asymptotes croisées, car alors les plans coordonnés seraient imaginaires. Plusieurs des théorèmes que nous obtiendrons sont indépendants de l'existence de ces plans et par conséquent généraux, mais pour donner plus de précision à notre étude, nous la restreignons au cas où les quatre lignes doubles sont réelles. Nous indiquerons plus loin comment on peut obtenir des formules applicables au cas où les plans de deux lignes doubles sont imaginaires (art. **536**).

528. La première des équations (5) montre que le centre de chacune des directrices Δ et Δ' est le pôle du plan de l'autre par rapport à la surface inscrite. Les pôles de Δ'' et de Δ''' par rapport à la même surface sont à l'infini, dans des directions déterminées et indépendantes de l'abscisse u. Ainsi les plans des lignes doubles ont les mêmes pôles par rapport à toutes les surfaces du second ordre inscrites. Il est d'ailleurs facile de voir que le pôle de l'un quelconque des plans est l'intersection des trois autres plans.

Nous allons maintenant rechercher quelle relation existe entre les pôles d'un plan, autre que ceux des lignes doubles, par rapport aux surfaces inscrites.

La surface étant donnée par l'équation (3), l'équation du plan polaire d'un point (x', y', z') sera

$$\frac{x'-u}{\lambda^2}(x-u)+\frac{y'}{\mu^2}y+\frac{z'}{\nu^2}z=1.$$

D'après cela, on trouve facilement, pour déterminer les coordonnées x', y' et z' du pôle d'un plan quelconque

$$Ax+By+Cz=1,$$

les formules

$$x'-u=\frac{A\lambda^2}{1-Au},\quad y'=\frac{B\mu^2}{1-Au},\quad z'=\frac{C\nu^2}{1-Au},$$

et, remplaçant λ^2, μ^2 et ν^2 par leurs valeurs (5),

$$x'=u\frac{1-Aa}{1-Au},$$
$$y'=\frac{B}{1-Au}\left[\frac{u}{a}(b'^2-b^2)+b^2\right],$$
$$z'=\frac{C}{1-Au}\left[\frac{u}{a}(c'^2-c^2)+c^2\right].$$

En éliminant u entre la première de ces équations et chacune des deux autres, on obtient les équations de la ligne des pôles du plan par rapport aux surfaces

du second ordre inscrites dans la développable

$$\frac{B}{a}\left(\frac{b'^2}{Aa-1}+b^2\right)x'+y'=Bb^2,$$
$$\frac{C}{a}\left(\frac{c'^2}{Aa-1}+c^2\right)x'+z'=Cc^2 \quad (^1).$$

Nous voyons que *les pôles d'un plan quelconque par rapport à toutes les surfaces du second ordre inscrites dans la développable sont en ligne droite* ([2]). *La trace de cette droite sur le plan d'une directrice et par rapport à cette courbe est le pôle de la trace du plan.*

529. Si nous portons les valeurs (5) dans l'équation (3), nous aurons l'équation générale des surfaces du second degré inscrites dans la développable

$$(6) \qquad \frac{(x^2-u)^2}{u^2-au}+\frac{ay^2}{u(b'^2-b^2)+ab^2}+\frac{az^2}{u(c'^2-c^2)+ac^2}=1.$$

Nous allons chercher les points où une surface inscrite rencontre les directrices Δ et Δ'. Si nous remplaçons successivement x, y, z par o, β, γ et par a, β', γ', l'équation (6) nous donnera

$$\frac{\beta^2}{u(b'^2-b^2)+ab^2}+\frac{\gamma^2}{u(c'^2-c^2)+ac^2}+\frac{1}{u-a}=0,$$
$$\frac{\beta'^2}{u(b'^2-b^2)+ab^2}+\frac{\gamma'^2}{u(c'^2-c^2)+ac^2}-\frac{1}{u}=0.$$

L'élimination de γ^2 et de γ'^2 entre ces équations et les équations (1) et (2) (art. **494**), qui représentent les courbes Δ et Δ', donne

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned}\beta^2&=\frac{c'^2b^2}{c^2b'^2-b^2c'^2}\left(\frac{u}{u-a}b'^2-b^2\right),\\ \beta'^2&=\frac{c^2b'^2}{c^2b'^2-b^2c'^2}\left(b'^2-\frac{u-a}{u}b^2\right).\end{aligned}\right.$$

Ces équations déterminent les ordonnées des points où la surface considérée coupe les directrices Δ et Δ' de la développable; en éliminant u entre elles, nous aurons la relation qui existe entre les ordonnées des points des deux courbes qui appartiennent à une même surface inscrite. Cette élimination, qui est très-facile, conduit à l'équation (9) de l'article **498**; lorsque nous l'avons établie, nous considérions simplement les ordonnées des points de Δ et de Δ' qui sont sur une même

---

([1]) Chacune de ces deux équations représente, sur l'un des plans coordonnés qui contiennent la ligne des centres, le lieu des pôles de la trace du plan considéré par rapport aux traces des surfaces inscrites.

([2]) M. Poncelet [*Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques*, p. 39 (*Journal de Crelle*, t. IV)].

génératrice, mais les variables β et β' n'y entrant qu'au carré, elle exprime la relation qui existe entre les ordonnées des points de ces courbes qui appartiennent à un groupe, car tous les points d'un groupe sur Δ ou sur Δ' ont les mêmes ordonnées en grandeur absolue (art. **519**). Les huit points où les directrices Δ et Δ' coupent une surface inscrite dépendent donc d'un groupe, et les huit droites qui forment ce groupe ayant chacune deux points sur une surface du second ordre, et lui étant d'ailleurs tangentes, en sont des génératrices. Ainsi donc *chaque surface du second ordre inscrite dans la développable la coupe suivant huit droites* (*réelles ou imaginaires*) *qui composent un groupe;* réciproquement *les huit droites d'un même groupe déterminent un hyperboloïde inscrit dans la développable.*

Si l'on veut connaître la position du centre de l'hyperboloïde d'un groupe déterminé, il faut résoudre l'une ou l'autre des équations (7); elles donneront la même valeur pour u, car les carrés β^2 et β'^2 doivent avoir entre eux la relation établie par l'équation (9) de l'article **498**.

Dans notre exercice, les hyperboloïdes des groupes réels ont tous leur centre sur le segment LK de l'arc Ax (*fig.* 261).

530. Nous allons maintenant chercher l'équation de la développable, en la considérant comme l'enveloppe des surfaces représentées par l'équation (6). Si l'on ordonne cette équation par rapport au paramètre variable u, on obtient

$$(8) \qquad Au^3 + Bu^2 + Cu + D = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned}
A &= \frac{c'^2 - c^2}{a} y^2 + \frac{b'^2 - b^2}{a} z^2 - \frac{(b'^2 - b^2)(c'^2 - c^2)}{a^2}(2x - a),\\
B &= \frac{(b'^2 - b^2)(c'^2 - c^2)}{a^2} x^2 + (2c^2 - c'^2)y^2 + (2b^2 - b'^2)z^2\\
&\quad - \frac{b'^2 c^2 + b^2 c'^2 - 2b^2 c^2}{a}(2x - a),\\
C &= \frac{b'^2 c^2 + b^2 c'^2 - 2b^2 c^2}{a} x^2 - ac^2 y^2 - ab^2 z^2 - b^2 c^2 (2x - a),\\
D &= b^2 c^2 x^2.
\end{aligned}$$

Si l'on attribue à x, y et z les valeurs des coordonnées d'un point déterminé de l'espace, suivant sa position, l'équation (8) aura une ou trois racines réelles, et, comme une enveloppée correspond à chaque valeur réelle de u (art. **527**), on voit que l'espace se trouve partagé en deux régions : trois enveloppées passent par chaque point d'une région, et une seule par chaque point de l'autre. Les deux régions sont séparées par une surface en tout point de laquelle passent trois enveloppées dont deux sont confondues en une seule. Cette surface est par conséquent le lieu des intersections successives des enveloppées, c'est-à-dire l'enveloppe. Les

points d'une enveloppée particulière qui appartiennent à la développable sont donc tels, que leurs coordonnées satisfont à la fois à l'équation (8) et à sa dérivée

$$3Au^2 + 2Bu + C = 0, \tag{9}$$

lorsque l'on donne à u la valeur qui convient à l'enveloppée. Les équations (8) et (9) représentent donc une caractéristique, et si l'on élimine entre elles le paramètre variable u, on aura la surface lieu de ces courbes, ou l'enveloppe.

Éliminant d'abord u^3 entre l'équation (8) et l'équation (9) multipliée par u, on obtient

$$Bu^2 + 2Cu + 3D = 0.$$

L'élimination de u^2 entre cette équation et l'équation (9) donne

$$u = \frac{BC - 9AD}{6AC - 2B^2}.$$

Portant enfin cette valeur de u dans l'équation (9), on trouve pour représenter la développable l'équation du huitième degré

$$27A^2D^2 - 18ABCD - B^2C^2 + 4B^3D + 4C^3A = 0. \tag{11}$$

Un raisonnement très-simple pouvait faire prévoir que la surface est du huitième ordre : si on la coupe par un plan contenant une génératrice, la section sera composée de cette droite et d'une courbe qui la rencontrera aux quatre points (réels ou imaginaires) où elle coupe les lignes doubles, et au point où elle touche l'arête. Ce dernier doit compter pour trois, parce que la courbe y a un rebroussement et que la génératrice est la tangente du rebroussement. La section est donc formée d'une droite et d'une courbe qui a sept points (réels ou imaginaires) communs avec elle, et qui, par conséquent, est du septième degré. En général, une développable algébrique de l'ordre n a sur chacune de ses génératrices $(n-4)$ points doubles ou plutôt des points multiples représentant $(n-4)$ points doubles.

Les deux équations (8) et (9) qui représentent une caractéristique sont du second degré en x, y et z, et ne contiennent ces deux dernières coordonnées qu'à la seconde puissance. Les projections des caractéristiques sur les plans coordonnés qui se coupent suivant l'axe des abscisses sont donc des courbes du second ordre [1].

531. Nous avons vu que chaque point de la développable appartient à trois enveloppées dont deux sont réunies en une seule ; la troisième est l'hyperboloïde

---

[1] Voir le *Mémoire* déjà cité *sur la théorie des polaires réciproques*, p. 37.

du groupe dont dépend la génératrice qui passe au point considéré. Les hyperboloïdes des groupes sont donc les seules enveloppées qui traversent la développable : les autres n'ont en commun avec elle que leur caractéristique. Ces hyperboloïdes sont aussi les seules enveloppées qui touchent la développable dans la partie voisine de l'arête de rebroussement, car les huit points de rencontre des génératrices de deux groupes consécutifs sont sur l'intersection des hyperboloïdes de ces groupes : en d'autres termes, les huit points où les génératrices d'un groupe rencontrent l'arête de rebroussement appartiennent à la caractéristique de l'hyperboloïde de ce groupe. Les trois enveloppées qui passent par un de ces points sont confondues en une seule, et par suite leurs coordonnées satisfont à l'équation (8), à sa première dérivée (9) et à sa seconde dérivée

$$3Au + B = 0 \tag{12}$$

lorsque l'on donne à u une certaine valeur; et si l'on élimine entre elles trois le paramètre variable u, on aura les équations de l'arête qui est l'enveloppe des caractéristiques, comme elle est l'enveloppe des génératrices rectilignes, ainsi que nous le savons déjà.

Le système des équations (9) et (10) équivaut à celui des équations (8) et (9); il suffit donc d'éliminer u entre (9), (10) et (12). On trouve pour représenter l'arête de rebroussement les deux équations du quatrième degré

$$B^2 - 3AC = 0, \quad C^2 - 3BD = 0. \tag{13}$$

Les hyperboloïdes des groupes ont pour limites les directrices qui portent les sommets [1]. Les caractéristiques des autres surfaces du second ordre inscrites dans la développable se succèdent sans se rencontrer.

Sur la *fig.* 261, l'ellipse, trace horizontale de l'hyperboloïde d'un groupe, serait tangente aux projections des génératrices de ce groupe, et aussi aux génératrices de la développable situées dans le plan horizontal, car elles touchent, comme les autres, toutes les surfaces inscrites.

532. L'équation (11) représente, outre la surface, les parties parasites des directrices, car, sous le rapport analytique, elles sont inséparables des parties utiles. C'est ainsi qu'à l'article **494** nous avons trouvé pour trace horizontale de

---

[1] Puisqu'il ne passe par un point de l'espace que trois enveloppées, les sommets ne peuvent appartenir à quatre de ces surfaces réunies en une seule, et par suite une troisième différentiation ne les ferait pas connaître. Quand on indique ce procédé pour déterminer les points de rebroussement de l'arête d'une enveloppe, on suppose que chaque caractéristique ne touche cette arête qu'en un point, tandis que sur la surface que nous examinons chaque caractéristique est tangente à l'arête en huit points qui donnent naissance aux sommets en se réunissant deux à deux sur des directrices que l'on doit considérer comme les caractéristiques d'hyperboloïdes aplatis.

la développable l'ellipse PIQ tout entière (*fig.* 261). D'après cela, si un plan sécant rencontre des arcs parasites, la section aura des points isolés. La courbe et ces points forment, en général, un système géométrique indécomposable; mais la séparation peut être faite quand le plan sécant est celui d'une directrice.

La trace de la surface sur le plan d'une ligne double se présente de deux manières différentes : tantôt on trouve, outre une conique PIQ (*fig.* 261), quatre tangentes qui se croisent deux à deux aux points C, C_1, B, B_1, H et G, traces des autres directrices; tantôt on obtient une conique (BB_1, $E'E'_1$) et quatre tangentes imaginaires qui passent deux à deux par les traces réelles π et π_1 d'une autre directrice. La section par le plan vertical BB_1 comprend ainsi, outre le cercle Δ, les points π et π_1 (*fig.* 262), comme il est facile de le vérifier par les formules précédentes.

533. Nous avons reconnu (art. **509**) que, quand la troisième directrice Δ'' est tangente au plan de la première Δ, celle-ci se confond avec Δ', et que la surface se décompose en deux fois leur plan et en une développable plus simple : a est alors nul, et l'on reconnaît, d'après la première des équations (5), que λ^2 est égal à u^2; d'où il résulte que les surfaces inscrites sont toutes tangentes entre elles et au plan des deux directrices réunies, et que l'origine est le point de contact.

Si l'on veut avoir dans ce cas l'équation de la développable, il faut, dans les expressions de A, B et C (art. **530**), remplacer a, b'^2, c'^2 par leurs valeurs (11) (art. **505**), et supposer ensuite n égal à p. On obtient alors

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{c^2}{p}y^2 + \frac{q^2-b^2}{p}z^2 + 2\frac{q^2-b^2}{p^2}c^2x,\\
B &= -\frac{q^2-b^2}{p^2}c^2x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 - 2\frac{q^2-2b^2}{p}c^2x,\\
C &= C'c^2x, \quad C' = \frac{q^2-2b^2}{p}x - 2b^2,\\
D &= b^2c^2x^2.
\end{aligned}$$

En portant dans l'équation (11) les valeurs de D et de C, on obtient pour la développable, après avoir supprimé un facteur x^2, l'équation du sixième degré

$$(14) \quad 27A^2b^4c^2x^2 - 18ABC'b^2c^2x - B^2C'^2c^2 + 4B^3b^2 + 4C'^3Ac^4x = 0.$$

Les équations (13) de l'arête de rebroussement deviennent

$$B^2 - 3AC'c^2x = 0, \quad C'^2c^2 - 3Bb^2 = 0;$$

la deuxième est du second degré.

Quand l'abscisse est nulle, l'équation (14) se divise en deux

$$C'^2c^2 - 4Bb^2 = 0, \quad B^2 = 0.$$

La première donne la directrice Δ, et la seconde ou deux fois les asymptotes de Δ qui sont des génératrices de la surface, ou deux fois le point de contact de Δ'' si Δ est une ellipse ([1]).

534. Considérons maintenant une deuxième surface du second ordre inscrite dans la développable, et appelons λ', μ', ν' les valeurs de λ, μ, ν qui la concernent et u_1 la distance de son centre au centre de la première surface inscrite : nous aurons

$$(5\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda'^2 &= (u+u_1)^2 - a(u+u_1),\\ \mu'^2 &= b^2 - \frac{u+u_1}{a}(b^2-b'^2),\\ \nu'^2 &= c^2 - \frac{u+u_1}{a}(c^2-c'^2). \end{aligned}\right.$$

Si les deux surfaces inscrites sont données, les six équations (5) et (5 *bis*) feront connaître les paramètres a, b, c, b' et c' de la développable et l'abscisse u qui détermine la position de l'origine des coordonnées, c'est-à-dire du centre de la première directrice Δ.

Les deux premières des équations (5) et (5 *bis*) donnent u et a. On trouve, en éliminant a et résolvant,

$$(6)\qquad u = \frac{\lambda'^2 - \lambda^2 - u_1^2 \pm \sqrt{[u_1^2-(\lambda+\lambda')^2][u_1^2-(\lambda-\lambda')^2]}}{2u_1}\ ([2]).$$

Les deux valeurs de u font connaître les centres des directrices Δ et Δ'; leur différence est l'abscisse a. En portant l'une d'elles dans les équations (5) et (5 *bis*), on déterminera les demi-diamètres b, c, b' et c' des directrices Δ et Δ'. Si l'on employait l'autre valeur, on trouverait pour b et c les longueurs déjà obtenues pour b' et c', et réciproquement.

La seule relation qu'aient entre elles deux surfaces du second ordre inscrites dans la développable que nous considérons (celle dont deux lignes doubles sont dans des plans parallèles) est que les plans diamétraux conjugués avec la ligne des centres soient parallèles; donc, toutes les fois que cette condition sera satisfaite pour deux surfaces du second ordre, les formules que nous avons trouvées détermineront complétement la développable circonscrite ([3]).

([1]) La développable n'est que du quatrième degré quand les directrices données sont des coniques tangentes à une même droite (art. 456). Il est facile de voir par la déformation homologique que cette disposition correspond au cas où les deux directrices Δ et Δ' situées dans des plans parallèles sont des paraboles.

([2]) Cette équation est identique avec celle de l'article 510, eu égard aux notations et au signe de n (*voir* la première note de cet article).

([3]) Si nous faisons une perspective relief du système que nous venons d'étudier, nous aurons deux surfaces du second ordre placées d'une manière quelconque dans l'espace et une développable circon-

535. En discutant les équations (5) (art. **525**), on reconnaît qu'il y a deux séries d'ellipsoïdes inscrits dans la développable représentée sur les *fig.* 261 et 262. Deux ellipsoïdes d'une même série se rencontrent avec pénétration, et si l'un d'eux est lumineux et l'autre opaque, il y a deux ombres sans pénombre. Suivant celle des deux surfaces qui est lumineuse, la limite des ombres est formée par l'ellipse Δ' ou par les arcs utiles de l'ellipse Δ''. Quand les ellipsoïdes n'appartiennent pas à la même série, ils sont entièrement extérieurs l'un à l'autre et il se forme une pénombre.

Les deux surfaces directrices considérées à l'article précédent étant supposées être des ellipsoïdes, les deux valeurs de u données par l'équation (6) seront réelles quand il y aura pénétration entre les surfaces et quand elles ne se rencontreront

---

scrite ayant quatre lignes doubles planes du second ordre, et telles, que le point d'intersection des plans de trois d'entre elles soit, par rapport aux deux surfaces inscrites, le pôle du plan de la quatrième. Une infinité de surfaces du deuxième degré seront inscrites dans la même développable; comme d'ailleurs les pôles d'un plan quelconque, par rapport aux surfaces inscrites du système primitif, sont en ligne droite, quel que soit le plan qui s'éloigne à l'infini dans la déformation homologique, les centres des surfaces inscrites transformées seront également en ligne droite.

Du reste, pour qu'il fût rigoureusement démontré par ces raisonnements que la développable circonscrite à deux surfaces du second degré a toujours quatre lignes doubles planes et du second ordre, il faudrait établir que les transformées homologiques de deux surfaces du premier système n'ont entre elles aucune relation nécessaire; mais cela nous écarterait de notre route, et d'ailleurs le théorème dont il s'agit est assez connu depuis les travaux de M. Poncelet (*Journal de Crelle,* t. IV, p. 37).

On peut, par la théorie des polaires réciproques, déduire des propositions que nous avons obtenues pour la développable circonscrite à deux surfaces du second degré d'autres propositions pour la courbe d'intersection de deux surfaces de ce degré. Nous nous bornerons à quelques observations.

La courbe d'intersection C_4 de deux surfaces du second ordre appartient à une infinité de surfaces de cet ordre qui forment une série continue. S'il y a pénétration, quatre cônes δ, δ', δ'' et δ''' font partie de cette série : chacun d'eux est la transition d'une suite d'hyperboloïdes à une nappe, à une suite de surfaces dépourvues de génératrices rectilignes. Deux des cônes δ'' et δ''' ont quatre génératrices tangentes à C_4; les surfaces de la série comprises entre eux sont des hyperboloïdes à une nappe ayant huit génératrices tangentes à C_4. Les deux autres cônes δ et δ' n'ont pas de génératrices tangentes à C_4; les surfaces comprises entre eux sont des hyperboloïdes à une nappe dont aucune génératrice ne touche C_4. Entre δ' et δ'', et entre δ''' et δ, la série comprend des surfaces dépourvues de génératrices rectilignes; chacune de ces deux suites commence et finit ordinairement par des hyperboloïdes à deux nappes; mais, lorsqu'un cône de transition est un cylindre, des ellipsoïdes succèdent aux hyperboloïdes à une nappe.

Quand les surfaces se coupent avec arrachement, la série ne contient que deux cônes, et par suite elle se divise en deux parties seulement. L'une comprend des surfaces du second ordre dépourvues de génératrices rectilignes, l'autre des hyperboloïdes à une nappe ayant quatre génératrices tangentes à C_4. Chacun des deux cônes a deux génératrices tangentes à C_4.

Les génératrices d'un hyperboloïde tangentes à la courbe appartiennent en nombre égal aux deux systèmes de génération rectiligne. Les tangentes de C_4 sont ainsi réparties en groupes. Dans le cas général, chacune d'elles en rencontre quatre autres, et la développable osculatrice de C_4 a quatre lignes doubles distinctes : elle est par suite du huitième ordre (art. 530). (*Voir* sur la développable osculatrice d'une courbe du quatrième ordre, intersection de deux surfaces du second ordre, les théorèmes, 23 24 et 25 dans la Communication faite par M. Chasles à l'Académie des Sciences les 17 et 24 février 1862.)

pas (art. **510**). Les ellipsoïdes appartiendront, dans le premier cas, à la même série, et dans le second aux deux séries distinctes.

Le second cas se présente seul dans les applications; si l'on opère graphiquement, on prendra pour plans coordonnés les plans des diamètres conjugués parallèles des sections diamétrales qui sont conjuguées avec la ligne des centres. Les tangentes communes des sections contenues dans chacun des plans coordonnés seront les quatre génératrices d'un groupe simple; elles donneront par leurs croisements la position et les longueurs des diamètres conjugués parallèles des directrices Δ et Δ'. Ces courbes étant ainsi déterminées, on continuera l'épure comme aux articles **488-493**.

Pour avoir la courbe de contact ou caractéristique d'un ellipsoïde, on choisira divers points sur une directrice; on fera passer par chacun d'eux un plan contenant les deux génératrices qui s'y croisent; on déterminera la courbe suivant laquelle il coupe l'ellipsoïde, et enfin les points où cette courbe est touchée par les génératrices.

536. Si la développable est déterminée par les directrices Δ'' et Δ''', en plaçant l'origine au centre de Δ'', et désignant par α'', β'', γ'' et α''', β''', γ''' les coordonnées de deux points de ces courbes situés sur une même génératrice, nous aurons

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\alpha''^2}{p^2} + \dfrac{\beta''^2}{q^2} = 1, \\ \gamma'' = 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(\alpha''' - n_1)^2}{p'^2} + \dfrac{\gamma'''^2}{r'^2} = 1, \\ \beta''' = 0. \end{array}\right.$$

Des calculs analogues à ceux de l'article **525** font ensuite trouver, pour déterminer les diamètres conjugués d'une surface du second degré inscrite, les équations

$$\lambda^2 = v^2 + \frac{p'^2 - p^2 - n_1^2}{n_1} v + p^2,$$

$$\mu^2 = q^2 \frac{n_1 - v}{n_1}, \qquad \nu^2 = r'^2 \frac{v}{n_1},$$

dans lesquelles n_1 et v sont les abscisses du centre de Δ''' et du centre de la surface inscrite.

A l'aide de ces formules on peut établir l'équation d'une surface du second degré inscrite dans la développable, en fonction du paramètre v; puis les équations des caractéristiques, de la développable et de son arête de rebroussement [1].

---

[1] D'après le théorème de l'article 451, l'arête de rebroussement est sur une surface réglée dont les génératrices passent par les centres de courbure des points correspondants de Δ et de Δ'. Lorsque la première courbe est un cercle, comme sur la *Pl. XXIV*, cette surface devient un cône ayant pour sommet le centre du cercle et pour directrice la développée de Δ'.

M. Ernest Lebon a trouvé des équations simples pour l'arête de rebroussement dans le cas général

537. *Cas où les surfaces inscrites sont concentriques. Surfaces homofocales.* Si une développable est déterminée par deux coniques concentriques Δ et Δ'', nous prendrons pour axes coordonnés l'intersection de leurs plans, et les diamètres qui dans chacune d'elles sont conjugués avec cette droite; puis désignant par α, β, γ et α'', β'', γ'' les coordonnées de deux points de ces courbes situées sur une même génératrice, nous aurons

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\beta^2}{b^2}+\dfrac{\gamma^2}{c^2}=1, \\ \alpha=0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\alpha''^2}{p^2}+\dfrac{\beta''^2}{q^2}=1, \\ \gamma''=0. \end{array}\right.$$

La seconde directrice Δ' est à l'infini; la quatrième Δ''' est concentrique avec les premières, et située dans le plan des axes des abscisses et des ordonnées z (art. **508**).

Les tangentes des directrices, aux points considérés de ces courbes, situés sur une même génératrice, ont pour équations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\beta}{b^2}y+\dfrac{\gamma}{c^2}z=1, \\ x=0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\alpha''}{p^2}x+\dfrac{\beta''}{q^2}y=1, \\ z=0; \end{array}\right.$$

étudié aux articles 494 et suivants. Nous indiquerons la marche qu'il a suivie et les résultats qu'il a obtenus.

La projection d'une génératrice de la développable sur le plan de Δ''' est donnée par l'équation

$$x=\frac{a(z-\gamma)}{\gamma'-\gamma},$$

que l'on peut écrire

$$x=Az+P.$$

L'intersection d'un point de cette droite avec celle qui lui est infiniment voisine donne, pour l'ordonnée z_0 d'un point de l'arête,

$$z_0=-\frac{\dfrac{dP}{d\gamma}+\dfrac{dP}{d\gamma'}\dfrac{d\gamma'}{d\gamma}}{\dfrac{dA}{d\gamma}+\dfrac{dA}{d\gamma'}\dfrac{d\gamma'}{d\gamma}}.$$

En portant cette valeur de z_0 dans les équations d'une génératrice, on détermine les coordonnées x_0 et y_0 du point considéré de l'arête de rebroussement, en fonction de la variable indépendante γ. Calculant ensuite les équations des deux cônes qui ont pour directrice l'arête et pour sommets les centres A et O de Δ et de Δ'', on trouve

$$\left[(\lambda-1)\frac{x}{\alpha}\right]^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{y}{b'}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\lambda\frac{z}{c'}\right)^{\frac{2}{3}}=0,$$

$$\left[(\lambda-1)\frac{x-a}{\alpha}\right]^{\frac{2}{3}}-\left(\lambda\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=0,$$

λ ayant la valeur indiquée à l'article 511.

comme d'ailleurs ces tangentes doivent se couper sur l'axe des ordonnées y, intersection des plans des directrices données, nous avons la relation

$$\beta/b^2 = \beta''/q^2. \tag{2}$$

Pour qu'un plan

$$Ax + By + Cz = 1 \tag{3}$$

soit tangent à la développable, il faut qu'il contienne les tangentes dont les équations sont ci-dessus, et par conséquent que l'on ait

$$A = \frac{\alpha''}{p^2}, \quad B = \frac{\beta}{b^2}, \quad C = \frac{\gamma}{c^2}.$$

Considérons maintenant une surface du second degré, ayant son centre à l'origine, et trois diamètres conjugués dirigés suivant les axes. Son équation sera

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} + \frac{z^2}{\nu^2} = 1. \tag{4}$$

La condition pour que le plan (3) touche cette surface est exprimée par l'équation (art. **525**, note)

$$A^2\lambda^2 + \beta^2\mu^2 + C^2\nu^2 = 1.$$

En portant les valeurs trouvées pour A, B et C, on obtient

$$\frac{\lambda^2}{p^4}\alpha''^2 + \frac{\mu^2}{b^4}\beta^2 + \frac{\nu^2}{c^4}\gamma^2 = 1.$$

Enfin l'élimination des variables auxiliaires α'' et γ à l'aide des équations (1) et (2) donne

$$\left(\frac{q^2\lambda^2}{p^2b^2} - \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2}\right)\beta^2 - \left(\frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{\nu^2}{c^2} - 1\right)b^2 = 0.$$

Pour que la surface (4) soit inscrite dans la développable, il faut que cette équation soit satisfaite, quel que soit β : de là résultent deux équations de condition entre λ^2, μ^2 et ν^2, et par suite on peut se donner arbitrairement l'un des diamètres conjugués de la surface inscrite.

On peut prendre pour équations de condition deux quelconques des trois ci-dessous; la première est obtenue directement, les deux autres résultent de la combinaison de celles que l'on trouve :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{\nu^2}{c^2} = 1, \\ &\left(1 - \frac{q^2}{b^2}\right)\frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{\mu^2}{b^2} = 1, \\ &\left(1 - \frac{b^2}{q^2}\right)\frac{\nu^2}{c^2} + \frac{\mu^2}{q^2} = 1. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Nous avons vu, à l'article **508**, que les carrés des demi-diamètres conjugués de la conique Δ''' sont

$$\frac{p^2}{1-\frac{q^2}{b^2}}, \quad \frac{c^2}{1-\frac{b^2}{q^2}};$$

il résulte donc des équations (5) que les demi-diamètres conjugués des surfaces inscrites sont les coordonnées de coniques qui seraient décrites sur les diamètres conjugués des directrices dirigés suivant les intersections de leurs plans.

Si l'on suppose nul l'un des demi-diamètres λ, μ ou ν, on trouve que les deux autres sont égaux à ceux de la conique dont le plan est conjugué avec la direction du premier; les trois directrices doivent donc être considérées comme des surfaces inscrites aplaties, ainsi que nous l'avons déjà remarqué dans le cas où deux de ces courbes sont dans les plans parallèles (art. **526**).

538. Si nous portons dans l'équation (4) les valeurs de μ^2 et de ν^2 données par les relations (5) en fonction de λ^2, nous aurons l'équation générale des surfaces du second degré, inscrites dans la développable,

$$(6) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{p^2y^2}{b^2p^2-(b^2-q^2)\lambda^2}+\frac{p^2z^2}{c^2(p^2-\lambda^2)}=1.$$

Si maintenant on ordonne l'équation (6) par rapport à λ^2, on trouve

$$(7) \qquad A\lambda^6+B\lambda^4+C\lambda^2+D=0,$$

en posant

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} A &= -c^2\frac{b^2-q^2}{p^4}, \\ B &= \frac{b^2-q^2}{p^4}c^2x^2-\frac{c^2}{p^2}y^2-\frac{b^2-q^2}{p^2}z^2+\frac{2b^2-q^2}{p^2}c^2, \\ C &= -\frac{2b^2-q^2}{p^2}c^2x^2+c^2y^2+b^2z^2-b^2c^2 \\ D &= b^2c^2x^2. \end{aligned}\right.$$

Chaque valeur de λ^2 détermine une surface du second ordre inscrite; il passe donc par un point de l'espace une ou trois surfaces inscrites. Tous les raisonnements de l'article **530** sont par conséquent applicables à la développable que nous étudions, et l'équation (11) de cet article la représentera, si l'on y regarde les lettres A, B, C et D comme remplaçant les expressions (8).

Quand les deux directrices données se rencontrent, b^2 est égal à q^2, A est nul, et l'équation (11) réduite à deux termes se divise dans les deux suivantes :

$$B^2=0, \quad C^2-4BD=0.$$

La première donne deux fois les plans tangents communs, et la seconde les

deux cylindres circonscrits aux coniques. Les équations (5) montrent que dans ce cas μ^2 est toujours égal à la valeur commune de b^2 et de q^2, et par suite que toutes les surfaces du second degré inscrites sont bitangentes. Ces résultats étaient faciles à prévoir.

539. Les équations de la caractéristique d'une surface inscrite en fonction de ses demi-axes sont très-simples. On les obtient facilement en considérant cette courbe comme le lieu des points de contact des plans tangents à la développable, avec une surface du second ordre inscrite.

Les coordonnées du point de contact du plan (3) avec la surface (4) sont

$$x = \mathrm{A}\lambda^2, \quad y = \mathrm{B}\mu^2, \quad z = \mathrm{C}\nu^2;$$

portant pour A, B et C les valeurs trouvées à l'article **537**, et éliminant α'' et γ à l'aide des relations (1) et (2), on obtient

$$x^2 = \frac{\lambda^4}{p^2}\left(1 - \frac{q^2}{b^2}\beta^2\right), \quad y^2 = \frac{\mu^4}{b^4}\beta^2, \quad z^2 = \frac{\nu^4}{c^2}\left(1 - \frac{\beta^2}{b^2}\right).$$

Enfin l'élimination de β^2 entre ces équations prises deux à deux donne

$$\frac{p^2x^2}{\lambda^4} + \frac{q^2y^2}{\mu^4} = 1, \quad \frac{b^2y^2}{\mu^4} + \frac{c^2z^2}{\nu^4} = 1,$$
$$\frac{b^2p^2x^2}{(b^2-q^2)\lambda^4} - \frac{c^2q^2z^2}{(b^2-q^2)\nu^4} = 1.$$

La construction des projections des caractéristiques peut faire le sujet d'un exercice graphique intéressant.

L'élimination de λ, μ et ν entre deux des trois équations que nous venons de trouver, et deux des équations de condition (5), donnerait l'équation de la développable que nous avons obtenue d'une autre manière.

540. Si une développable doit être circonscrite à deux surfaces concentriques du second degré, on prendra pour axes coordonnés les diamètres conjugués communs en direction ([1]), et l'on aura deux systèmes de valeurs de λ^2, μ^2 et ν^2 qui satisferont aux équations (5); on obtiendra ainsi quatre équations distinctes, à l'aide desquelles on pourra déterminer les quantités b^2, c^2, p^2 et q^2. Les coniques directrices seront alors connues.

541. A l'article **508**, nous avons obtenu la développable circonscrite à deux coniques concentriques, en considérant la surface déterminée par les courbes

([1]) On démontre par des raisonnements analogues à ceux de l'article 502 que deux surfaces concentriques du second degré ont un système de diamètres conjugués communs en direction. Ces lignes, que Monge a appelées *droites diamétrales conjuguées communes*, sont toujours réelles. On peut consulter sur cette question un Mémoire de M. Chasles (*Correspondance sur l'École Polytechnique*, tome II, page 319).

(BB_1, $E'E'_1$) et PIQ (*fig.* 261 et 262), et transportant la seconde parallèlement à elle-même, jusqu'à ce que son centre L, glissant sur la droite Ax, coïncidât avec le centre A de la première. Tant que ces deux points sont distincts, le plan de la conique (CC_1, $F'F'_1$) ou Δ' est parallèle à celui de (BB_1, $E'E'_1$); mais, lorsque le point L est confondu avec A, aucune différence essentielle n'existe dans la position des deux directrices Δ et Δ'', et il n'y a pas de raison pour que le plan de Δ' qui est à l'infini soit considéré comme parallèle au plan de l'une plutôt qu'à celui de l'autre, ou même au plan de la troisième conique Δ''' devenue concentrique avec les deux premières.

542. Lorsque la trace d'une surface réglée sur un plan situé à l'infini est une conique double, le cône directeur ayant cette ligne pour directrice (art. **466**) est double et du second ordre.

Quand nous disons que la développable circonscrite à deux coniques concentriques possède une conique double à l'infini, il faut comprendre que, si l'on coupe cette surface par un plan quelconque, et que l'on éloigne le plan parallèlement à lui-même, la section se composera de deux parties que l'on peut concevoir distinctes, et qui se rapprocheront indéfiniment l'une de l'autre, et toutes deux d'une conique dont l'espèce variera suivant la direction du plan. Il ne s'agit d'ailleurs ici que d'un rapprochement relatif aux dimensions de la courbe, et à l'éloignement du plan sécant, car l'écartement des traces de deux droites parallèles reste invariable quand le plan se transporte parallèlement à lui-même.

543. Les équations d'une génératrice de la développable sont

$$x = \frac{\alpha''}{\gamma}(\gamma - z), \quad y - \beta = \frac{\beta'' - \beta}{\gamma}(\gamma - z).$$

Si nous plaçons le sommet du cône directeur à l'origine, nous aurons les équations de sa génératrice, en supprimant le terme constant dans les équations qui précèdent :

$$\gamma x + \alpha'' z = 0, \quad \gamma y + (\beta'' - \beta) z = 0.$$

Pour avoir l'équation du cône directeur, il faut éliminer les variables auxiliaires β, γ, α'' et β'' entre ces équations, celles des directrices (1) et la relation (2), qui établit la correspondance entre les points de ces courbes situés sur une même génératrice; on obtient

$$(9) \qquad \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Quand les coefficients des trois termes sont de même signe, le cône n'a de réel que son sommet, et la développable est imaginaire; c'est-à-dire que les surfaces représentées par l'équation (6) n'ont pas d'enveloppe, bien qu'elles forment toujours une série continue. On peut d'ailleurs supposer que le terme constant de

l'équation (9) avait d'abord une valeur déterminée, qui s'est progressivement réduite à o; le sommet réel du cône se présente donc comme un ellipsoïde évanouissant ayant des diamètres conjugués dirigés suivant les axes coordonnés, et proportionnels aux longueurs p, $\sqrt{q^2 - b^2}$ et $\sqrt{-c^2}$. La section de cet ellipsoïde (ou de tout autre ellipsoïde homothétique) par un plan, est une courbe semblable à la conique double située à l'infini dans un plan parallèle à celui-là.

544. On déduit des équations (5)

$$\mu^2 - \nu^2 = \lambda^2 \frac{c^2 - b^2 + q^2}{p^2} + b^2 - c^2, \quad \lambda^2 - \mu^2 = \lambda^2 \frac{p^2 - q^2 + b^2}{p^2} - b^2.$$

Quand les deux surfaces directrices sont *homofocales*, c'est-à-dire quand leurs sections principales sont situées dans les mêmes plans et ont les mêmes foyers, les axes coordonnés sont rectangulaires, et les binômes $\mu^2 - \nu^2$ et $\lambda^2 - \mu^2$ devant avoir les mêmes valeurs pour deux grandeurs différentes de λ^2, il faut que l'on ait

$$(10) \qquad c^2 - b^2 + q^2 = 0, \quad p^2 - q^2 + b^2 = 0.$$

Les équations ci-dessus se réduisent alors à

$$\mu^2 - \nu^2 = q^2, \quad \lambda^2 - \mu^2 = -b^2,$$

d'où

$$\lambda^2 - \nu^2 = -c^2.$$

Les trois binômes $(\mu^2 - \nu^2)$, $(\lambda^2 - \mu^2)$ et $(\lambda^2 - \nu^2)$ qui déterminent la position des foyers des sections principales ont donc des valeurs indépendantes des grandeurs des axes, et, par suite, toutes les surfaces du second degré inscrites dans la développable sont homofocales.

En vertu des relations (10), l'équation (9) devient

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

et par conséquent le cône directeur se réduit à son sommet qui se présente comme une sphère évanouissante. On voit d'après cela, conformément aux considérations que nous avons présentées à l'article **543**, que *des surfaces du second ordre homofocales sont inscrites dans une même développable, qui a pour une de ses lignes doubles un cercle imaginaire dans un plan situé à l'infini et de direction indéterminée* [1].

Réciproquement la ligne double située à l'infini n'est semblable à un cercle, quelle que soit la direction de son plan, que quand l'ellipsoïde évanouissant (9) est une sphère, ce qui exige que les axes soient rectangulaires et que les équa-

---

[1] M. Chasles, *Résumé d'une théorie des surfaces du second ordre homofocales* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*; 1860).

tions (10) soient satisfaites. Par conséquent, *deux surfaces du second ordre sont homofocales, quand leur développable circonscrite a pour une de ses lignes doubles un cercle imaginaire situé à l'infini, dans un plan de direction indéterminée.*

CHAPITRE III.

SURFACES D'ÉGALE PENTE.

Définition et principales propriétés.

545. *Une surface est d'égale pente, quand ses plans tangents rencontrent sous une même inclinaison un plan fixe que l'on suppose horizontal.*

Les plans également inclinés à l'horizon que l'on peut faire passer par un point sont tous tangents à un cône qui est de révolution : *une surface d'égale pente est donc développable* (art. **469**).

De ce qu'une développable et son cône directeur ont leurs plans tangents respectivement parallèles, on conclut qu'une développable est d'égale pente quand son cône directeur est de révolution; que, pour une telle surface, les génératrices sont les lignes de plus grande pente des plans tangents; que par suite elles rencontrent normalement la trace horizontale, et que cette courbe est ainsi une développante de l'arête de rebroussement et de sa projection horizontale; enfin que le contour apparent d'une surface d'égale pente sur un plan vertical est formé par l'ensemble des génératrices parallèles à ce plan.

L'arête de rebroussement d'une surface d'égale pente rencontre sous un même angle toutes les génératrices du cylindre qui la projette sur un plan horizontal : c'est une ligne géodésique de ce cylindre ou une *hélice générale*. Réciproquement toute développable dont l'arête est une ligne géodésique d'un cylindre quelconque a ses plans tangents également inclinés sur un plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre.

Une surface d'égale pente est déterminée quand on connaît l'angle sous lequel elle rencontre l'horizon et une directrice (art. **467**).

Le cône directeur d'une surface d'égale pente étant toujours facile à construire, on résout aisément pour cette surface les divers problèmes que nous avons examinés à l'article **470**.

L'aire d'une portion finie d'une surface d'égale pente, terminée par une courbe

quelconque soumise ou non à la loi de continuité, est à sa projection horizontale dans le rapport du rayon au cosinus de l'inclinaison constante des plans tangents. La quadrature de cette surface peut ainsi être ramenée à celle de la quadrature d'une courbe plane. Cette propriété, qui résulte de la définition même de la surface d'égale pente, n'appartient évidemment à aucune autre (¹).

546. Nous avons vu que les génératrices d'une surface développable sont parallèles à celles de son cône directeur, et que le parallélisme subsiste après le développement de ces deux surfaces (art. **481**). Nous savons d'ailleurs qu'il est très-facile de développer un cône de révolution (art. **167**). D'après cela, quand on a fait le développement d'une surface d'égale pente en se servant de deux directrices, et par une construction analogue à celle qui a été exposée à l'article **492**, on peut vérifier par le développement du cône la direction de diverses génératrices. Lorsque l'on connaît une section horizontale, les génératrices devant rester normales à cette ligne dans le développement seront tangentes à des cercles décrits successivement des points obtenus sur sa transformée, avec des rayons égaux aux arcs sensiblement rectilignes dans lesquels elle aura été divisée. On pourra donc faire le développement d'après celui du cône, sans considérer une seconde directrice.

Les raisonnements de l'article **167** montrent que deux génératrices d'un cône de révolution dont les projections sur un plan perpendiculaire à l'axe comprennent un angle α font, après le développement de cette surface, un angle égal à $\alpha \frac{\mathrm{S}a}{\mathrm{S}'a'}$ (*fig.* 104) ou à $\alpha \cos\varepsilon$, en appelant ε l'angle des génératrices avec le plan horizontal. Cette formule s'étend à toutes les développables dont le cône directeur est de révolution, c'est-à-dire aux surfaces d'égale pente; elle peut servir à vérifier la position de quelques génératrices sur le développement.

Exercices.

547. On rencontre souvent les surfaces d'égale pente dans les terrassements. Nous n'avons pas voulu choisir des exemples qui auraient exigé des explications techniques; ceux que nous présentons, bien que très-simples, suffiront pour montrer comment les problèmes relatifs à ces surfaces peuvent être résolus.

Ier EXEMPLE. — *Excavation faite dans un terrain horizontal, avec talus réglés à la pente de* 45°. (*Fig.* 272.)

548. On propose de représenter une excavation dont l'ouverture sur le terrain horizontal XY est l'ellipse (AB, A'B'), et dont le fond est établi sur le plan horizontal *xy* : les talus sont réglés à la pente uniforme de 45° sur l'horizon.

(¹) MONGE, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, § VIII.

Nous prenons sur la directrice des points de division arbitraires, mais symétriquement placés par rapport aux axes, et nous obtenons immédiatement les projections horizontales des génératrices qui passent par ces points, en traçant des normales à l'ellipse.

Les talus étant inclinés à 45°, si, à partir de la directrice, nous portons sur la projection de chaque génératrice une longueur égale à la distance qui sépare les deux plans horizontaux, nous aurons la trace de la développable sur le plan xy. Cette courbe *abpqcdqpa* possède des points doubles p et q situés sur l'axe AB, et des rebroussements aux points a, b, c et d où elle rencontre la développée de l'ellipse, projection de l'arête de rebroussement.

Nous obtenons les projections verticales des génératrices, en relevant sur les droites XY et xy les points des projections horizontales qui sont sur l'ellipse et sur la courbe *abcd*.

549. Une courbe a autant de rebroussements que sa projection, quand aucune de ses tangentes n'est une projetante (art. **218**). Toutes les génératrices d'une surface d'égale pente étant inclinées sur le plan horizontal, leur enveloppe doit avoir autant de rebroussements que sa projection sur ce plan, c'est-à-dire un pour chaque point de la directrice horizontale, où le rayon de courbure atteint une valeur maximum ou minimum. Dans notre exercice la directrice est une ellipse, et nous avons quatre points de rebroussement. Ceux qui correspondent aux sommets C et D, où le rayon de courbure est un maximum, sont trop éloignés pour avoir pu être placés sur la figure; les deux autres sont (I, I′) et (J, J′).

550. Le lieu des points doubles (p, p') et (q, q') est une ligne double qui devient parasite aux sommets (I, I′) et (J, J′) de la développable. Pour déterminer la nature de cette courbe, nous remarquons que l'un quelconque de ses points m' se projette au point m où la normale correspondante Mm de l'ellipse rencontre l'axe AB.

L'ellipse directrice ayant pour équation

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

une normale Mm est représentée par

$$y - \beta = \frac{a^2\beta}{b^2\alpha}(x - \alpha).$$

En faisant y nul, on trouve pour l'abscisse du point m

$$x = \alpha - \frac{b^2}{a^2}\alpha, \tag{2}$$

et l'on a pour déterminer la distance des points M et m l'équation

$$\overline{Mm}^2 = \frac{b^4\alpha^2}{a^4} + \beta^2.$$

Mais en appelant i la cotangente de l'angle que les génératrices de la développable font avec le plan horizontal, et z l'ordonnée verticale du point m', on obtient

$$\overline{Mm}^2 = i^2 z^2,$$

et par conséquent

$$(3) \qquad i^2 z^2 = \frac{b^4\alpha^2}{a^4} + \beta^2.$$

L'élimination de α^2 et de β^2 entre (1), (2) et (3) donne pour équation de la ligne double

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{i^2 z^2}{b^2} = 1.$$

Cette courbe est donc une ellipse, dont les sommets (E, E′) et (F, F′) sont aux foyers de la directrice. Dans notre exercice i est égal à 1, et par suite le demi-axe O′O″ est égal à b ou OC.

La surface a dans le plan vertical CD une seconde ligne double dont on peut déduire l'équation de la précédente, par de simples permutations de lettres : c'est une hyperbole qui a le même centre que les deux ellipses AB et E′F′. Un de ses sommets est au point O‴ où se rencontrent les génératrices A′I′ et B′J′. La longueur OH ou OG de son demi-axe non transverse est égale à OE et à OF.

La première ligne double limite l'étendue que l'on peut donner à l'excavation; celle qui est dans le plan CD n'a pas d'importance dans la question qui nous occupe.

551. Si l'ellipse horizontale AB était la base d'une plate-forme élevée en remblai sur le plan XY, avec des talus inclinés à 45°, les génératrices de la surface auraient les mêmes projections horizontales, mais elles seraient inclinées en sens opposé; ces droites prolongées détermineraient par leurs intersections deux arcs doubles qui appartiendraient l'un à l'ellipse E′F′, l'autre à l'hyperbole contenue dans le plan CD. Le premier est symétrique de I′J′ et limite la hauteur que l'on peut donner au remblai.

La développable complète a donc trois lignes doubles concentriques qui sont des coniques. Les génératrices sont d'ailleurs parallèles deux à deux, et le cône directeur est de révolution; il en résulte que la surface possède, à l'infini, une quatrième ligne double qui est également une conique. Cette développable est une variété de celle que nous avons étudiée aux articles **508** et **537**.

II[e] EXEMPLE. — *Excavation faite dans un terrain incliné, avec talus réglés à une inclinaison donnée.* (*Fig.* 273.)

552. On propose de représenter une excavation dont l'ouverture sur le plan incliné XY est l'ellipse (AB, A′B′), et dont le fond est établi sur le plan horizontal xy : les talus sont réglés à une pente uniforme qui est donnée.

La surface est l'enveloppe des positions d'un cône de révolution dont les génératrices ont une pente connue, et dont le sommet parcourt la directrice (art. **467**) : sa trace sur le plan xy est l'enveloppe des traces du cône.

Nous prenons sur la directrice AB des points de division placés d'une manière symétrique par rapport aux axes, puis, menant par la projection verticale B′ de l'un d'eux une droite B′G ayant la pente donnée, nous obtenons la longueur LG du rayon du cercle, trace horizontale du cône lorsque son sommet est au point (B, B′). Nous trouvons de la même manière que le rayon de la trace est KF lorsque le sommet est au point (A, A′), et nous pourrions construire ainsi les rayons pour toutes les positions considérées du cône; mais, comme ils sont évidemment proportionnels aux hauteurs du sommet au-dessus du plan xy, c'est-à-dire aux ordonnées de la ligne XY, nous pouvons tracer une droite fg dont les ordonnées seront les rayons cherchés. Nous en obtenons deux points f et g en portant les longueurs KF et LG en Kf et Lg (1). La trace horizontale de la surface est l'enveloppe des cercles décrits des points de division de l'ellipse comme centres, avec les ordonnées correspondantes de la ligne fg pour rayons.

553. Le point c où le cercle dont le centre est C touche l'enveloppe appartient à la génératrice Cc de la développable et peut servir à la tracer. Si l'on veut apporter plus de précision dans la construction, on mènera par la tangente CT de la directrice un plan tangent au cône dont le sommet est (C, C′) (art. **468**).

Nous avons fait l'opération en prenant le plan $x_1 y_1$ pour plan horizontal. Les points de contact m et n appartiennent l'un à la génératrice cherchée, l'autre à la génératrice de la nappe extérieure que nous négligeons, parce qu'elle ne présente aucun intérêt dans la question spéciale qui nous occupe.

Si le point T était sur le cercle, la tangente de la directrice au point (C, C′) serait une génératrice du cône et de la développable, et ce point serait un sommet (art. **468**). Quand la tangente (CT, XY) est moins inclinée que les génératrices du cône, le point T est dans le cercle, et le point C′ appartient à un arc parasite de la courbe. Dans le cas où la tangente la plus inclinée de la directrice ferait avec

(1) L'axe (AB, A′B′) de l'ellipse est une ligne de plus grande pente du plan XY. Il résulte des symétries qu'introduit cette disposition, que les génératrices issues des sommets A et B sont parallèles au plan vertical, et qu'on peut obtenir les points f et g, en prenant les longueurs Kf et Lg égales à Ka' et Lb'.

le plan horizontal un angle plus grand que celui des génératrices du cône, la surface n'existerait pas : cela n'arrivera jamais quand la directrice sera fermée, car elle aura alors des tangentes horizontales.

554. On voit, par la construction que nous avons exposée, que sur une surface d'égale pente les deux génératrices Cm et Cn, qui se croisent en un même point C de la directrice, font des angles égaux avec cette courbe dans l'espace et en projection horizontale.

Sur la *fig.* 273, l'enveloppe des cercles n'a ni points doubles, ni rebroussements, ce qui montre que le plan xy ne rencontre pas l'arête de la développable.

Étude de la surface d'égale pente circonscrite à une conique, dans le cas où l'un des axes de cette courbe est une ligne de plus grande pente de son plan.

555. D'après la position que nous supposons à la directrice Δ, nous pouvons la représenter par les équations

$$(1)\qquad \gamma = m\alpha, \quad \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1.$$

La génératrice qui passe par le point considéré appartient au cône directeur, placé de manière à avoir son sommet à ce point, et par suite les coordonnées de l'un quelconque des points de cette droite satisfont à l'équation du cône

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = i^2(z-m\alpha)^2.$$

i est la cotangente de l'angle que les plans tangents de la surface font avec l'horizon. Cette équation, ordonnée par rapport à α et à β, devient

$$(2)\qquad (1-m^2i^2)\alpha^2 + \beta^2 + 2(mi^2z - x)\alpha - 2y\beta + x^2 + y^2 - i^2z^2 = 0.$$

La développable étant l'enveloppe des positions du cône, la génératrice ne cesse pas de lui appartenir, quand son sommet éprouve un déplacement infiniment petit sur la directrice (art. **432**). Nous pouvons donc différentier l'équation (2) en y considérant x, y et z comme constantes. Nous obtenons ainsi l'équation

$$(1-m^2i^2)\alpha + (mi^2z - x) + (\beta - y)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

qui devient, lorsqu'on y introduit la valeur de $\frac{d\beta}{d\alpha}$ déduite de l'équation (1),

$$(3)\qquad (b^2 - a^2 + a^2m^2i^2)\alpha\beta - b^2y\alpha - a^2(mi^2z - x)\beta = 0\,(^1),$$

---

(1) Nous avons employé le Calcul différentiel, parce qu'il conduit directement à l'équation (3) du plan

556. Pour avoir l'équation de la surface, il faudrait éliminer α et β entre les équations (1), (2) et (3) ; mais, si nous cherchons seulement son intersection avec un plan donné, nous pourrons commencer par introduire les relations qui sont établies par l'équation de ce plan entre les variables x, y et z.

Les plans

$$(4) \qquad y = 0, \quad mi^2 z - x = 0$$

doivent couper la développable suivant des lignes faciles à déterminer, car pour chacun d'eux les équations (2) et (3) perdent un de leurs termes, et la seconde peut être réduite au premier degré par la suppression d'un facteur commun.

557. En faisant y nul dans les équations (2) et (3) pour chercher l'intersection de la surface avec le premier des plans (4), on obtient

$$(5) \qquad (1 - m^2 i^2)\alpha^2 + \beta^2 + 2(mi^2 z - x)\alpha + x^2 - i^2 z^2 = 0,$$

$$(6) \qquad (b^2 - a^2 + a^2 m^2 i^2)\alpha - a^2(mi^2 z - x) = 0,$$

et l'élimination de β et de α entre (1), (5) et (6) donne

$$(7) \quad (b^2 + a^2 m^2 i^2)x^2 - 2a^2 mi^2 xz + (a^2 - b^2)i^2 z^2 + b^2(b^2 - a^2 + a^2 m^2 i^2) = 0.$$

La symétrie de la figure montre que les génératrices se rencontrent deux à deux dans le plan vertical AB (*fig.* 273). La conique (7), trace de la surface sur ce plan, est donc une ligne double : nous l'appellerons Δ''.

La développable étant circonscrite à deux courbes du second ordre Δ et Δ'' a deux autres directrices planes et de cet ordre; et comme les premières, représentées par les équations (1) et (7), sont concentriques, l'une des deux autres Δ''' a le même centre qu'elles, et la dernière Δ' se trouve à l'infini (art. **508**). Nous pourrions nous servir des théories du Chapitre II pour déterminer la directrice Δ''', mais il est plus simple de continuer à traiter la question directement.

558. Pour obtenir l'intersection de la surface par le second des deux plans (4), nous portons dans les équations (2) et (3) la valeur de z déduite de l'équation de ce plan ; il vient

$$(1 - m^2 i^2)\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta y - \frac{1 - m^2 i^2}{m^2 i^2} x^2 + y^2 = 0,$$

$$(b^2 - a^2 + a^2 m^2 i^2)\beta - b^2 y = 0.$$

L'élimination de α et de β entre ces deux équations et l'équation (1) donne

$$(8) \qquad \frac{x^2}{a^2 m^2 i^2} + \frac{y^2}{b^2 - a^2 + a^2 m^2 i^2} = 1.$$

---

des deux génératrices qui passent au point considéré (C, C') (*fig.* 273); mais on peut l'établir sans son secours, en exprimant analytiquement les constructions de la figure.

La section de la surface par le second des deux plans (4) est donc une courbe du deuxième ordre, concentrique avec la directrice Δ, comme nous avons reconnu que cela devait être. Appelant a''' et b''' les longueurs des demi-axes de sa projection horizontale, et m''' la tangente de l'angle de son plan avec l'horizon, nous avons, d'après la seconde des équations (4) et l'équation (8),

$$(9) \qquad m''' = \frac{1}{mi^2}, \qquad a'''^2 = a^2 m^2 i^2, \qquad b'''^2 = b^2 - a^2 + a^2 m^2 i^2.$$

Si l'on résout ces équations par rapport à m, a et b, on trouvera les mêmes expressions, avec permutation des lettres qui représentent les constantes des deux coniques; il y a donc réciprocité entre elles, et par suite celle que nous venons de déterminer, Δ''', est une ligne double comme Δ.

On déduit des équations (9)

$$a'''^2 - b'''^2 = a^2 - b^2.$$

Les coniques projections horizontales des directrices Δ et Δ''' ont donc les mêmes foyers. Il est d'ailleurs facile de voir, à l'aide de l'équation (7), que ces points sont les extrémités du segment de la droite AB (*fig.* 273) qui forme la projection horizontale de Δ''; d'où il suit que ce sont les foyers de ce segment considéré comme une ellipse aplatie.

559. Nous pouvons maintenant faire les tracés nécessaires à la détermination des lignes doubles et à la représentation générale de la surface.

Les données sont l'ellipse directrice (AB, A′B′) que nous appelons Δ (*fig.* 274 et 275), et l'angle de la développable avec l'horizon. De chacun des points A′ et B′ nous menons deux droites faisant cet angle avec la ligne de terre XY : ces lignes sont évidemment des génératrices, et la diagonale C′O′D′ du parallélogramme A′C′B′D′ qu'elles forment est la trace verticale du plan de la directrice Δ'''. Les points C′ et D′ sont des sommets de cette courbe, et leurs projections horizontales C et D des sommets de sa projection. Comme d'ailleurs la ligne Δ''' a, sur le plan horizontal, les mêmes foyers F et F_1 que l'ellipse AB, elle se trouve complétement déterminée et facile à tracer : c'est une hyperbole, parce que les sommets C et D sont en dedans des foyers; nous aurions une ellipse s'ils étaient au delà, et enfin, si les points C et D se confondaient avec F et F_1, la développable se composerait de deux cônes ayant leurs sommets l'un en C′ et l'autre en D′.

Les directrices Δ et Δ''' étant de genres différents, Δ'' est nécessairement une ellipse (art. **508**).

Il est inutile de dire que les foyers auraient pu se trouver sur l'axe Oy.

560. La droite PQ est l'intersection des plans des directrices Δ et Δ'''; par conséquent, si des points P et Q nous menons des tangentes à l'hyperbole, ces droites

seront des génératrices de la surface, et leurs points de contact I, I_1, i et i_1 seront des sommets (art. **458**). Nous pouvons obtenir leur position en employant la construction ordinaire des tangentes à l'hyperbole par un point extérieur. De Q et de F comme centres, avec des rayons égaux à OB et à CD, nous décrivons des arcs de cercle qui se coupent en l et en l_1; les droites Fl et Fl_1 passent respectivement par i et i_1, et leurs segments il et $i_1 l_1$ sont égaux à iF_1 et $i_1 F_1$ (1).

Les points M et N, où une même génératrice rencontre l'ellipse et l'hyperbole, sont tels, que les tangentes correspondantes se rencontrent en un point de l'axe PQ (art. **455**). On a par suite entre leurs ordonnées β et y la relation (2)

$$\frac{b^2}{\beta} = \frac{b'''^2}{y}.$$

Le rapport de β à y est donc constant, et par suite les ordonnées des points M et N sont entre elles comme les ordonnées des points connus Q et i. En conséquence, après avoir pris sur l'ellipse des points de division arbitraires, mais symétriquement placés par rapport aux axes, on peut obtenir par une construction de lignes proportionnelles les ordonnées des points de l'hyperbole qui leur correspondent, ce qui suffit pour les déterminer sur cette courbe que nous supposons tracée avec soin. On relève ensuite les points de l'ellipse sur A'B', ceux de l'hyperbole sur C'D', et l'on trace les deux projections de toutes les génératrices considérées. Nous les avons arrêtées aux courbes Δ et Δ'''.

Conformément à une observation que nous avons présentée à l'article **554**, les deux génératrices qui se rencontrent en un point quelconque de l'une des directrices font des angles égaux avec la tangente de cette ligne dans l'espace et en projection horizontale.

Deux génératrices, issues des points M et R symétriquement placés par rapport à AB, se rencontrent dans le plan vertical dont cette ligne est la trace; mais leur croisement ne peut pas se dessiner sur la projection verticale, parce qu'elles y sont représentées par une même droite. Pour construire la directrice Δ'' qui est une ellipse, il faut relever sur le plan vertical les points de rencontre des projections horizontales des génératrices avec la droite AB.

561. Les verticales ge et $g_1 e_1$ relevées des foyers F et F_1 touchent l'ellipse Δ'' (art. **558**). Les côtés du parallélogramme A'C'B'D' sont des génératrices situées dans le plan de cette directrice; elles lui sont donc tangentes (art. **457**), et leurs points de contact sont des sommets de la surface.

On sait que, *dans un pentagone circonscrit à une conique, deux diagonales qui ne*

---

(1) On peut aussi remarquer que la perpendiculaire à AB menée par le point C rencontre l'arc Fl_1F_1 au point σ où passe la droite Qi_1.

(2) Cette formule peut être déduite immédiatement de la seconde équation de l'article 558; elle est identique avec celle que nous avons obtenue à l'article 516.

partent pas d'un même angle se croisent en un point situé sur la droite qui joint le cinquième angle au point où le côté opposé touche la courbe ([1]).

D'après ce théorème, nous pouvons déterminer la position exacte des sommets, en considérant le pentagone formé par cinq des six tangentes que nous connaissons, par exemple le pentagone $g_1 e_1$D'B'C'. La figure montre la construction pour les sommets J'_1 et j' : les deux autres sont sur les diamètres qui passent par ces points ([2]).

562. Les quatre points M, M_1, R et R_1, placés sur l'ellipse Δ d'une manière symétrique par rapport aux axes, appartiennent à un groupe composé des huit génératrices

MN,	MN_1,
M_1N_1,	NM_1,
RS_1,	RS,
SR_1,	R_1S_1.

Chaque droite de l'un des systèmes rencontre trois droites de l'autre système à distance finie, et est parallèle à la quatrième.

Les génératrices issues des points M et R symétriquement placés sur Δ se coupent en des points (v, v') et (u, u') tels, que les droites qui y touchent Δ″ se rencontrent en un point de l'intersection (AB, A'B') des plans de Δ et de Δ″, celui où les tangentes de Δ en M et en R vont se croiser (art. **455**). La corde $u'v'$ est donc parallèle au diamètre de Δ″, conjugué avec A'B'.

Les tangentes de Δ aux points P et Q sont parallèles; les tangentes de Δ″ aux points (k, k') et (k_1, k'_1) qui leur correspondent sont donc aussi parallèles, et par suite les droites A'B' et C'D' sont diamétrales conjuguées dans l'ellipse Δ″. Les quatre points u', v', u'_1 et v'_1 de cette conique qui appartiennent à un groupe sont les sommets d'un parallélogramme dont les côtés sont respectivement parallèles à A'B' et à C'D'.

Ces résultats sont conformes à ceux des articles **508** et **519**.

Nous avons directement la longueur $k'k'_1$, mais les extrémités G et G_1 du diamètre conjugué étant sur des arcs parasites ne nous sont pas données par la construction. Pour les obtenir, nous traçons un demi-cercle sur $k'k'_1$, et nous supposons qu'il se transforme dans l'ellipse Δ″ (art. **514**). Prenant sur cette courbe un point bien déterminé tel que J', nous cherchons le point J'_2 qui lui correspond sur le cercle, puis considérant le point G_2, extrémité du diamètre perpendiculaire à $k'k'_1$, nous le ramenons en G sur O'B' par une parallèle à J'_2J'.

[1]) M. Brianchon, *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XIII, p. 301. — M. Poncelet, *Propriétés projectives*, art. 212.

([2]) La position précise des sommets est déterminée par une seconde construction que nous expliquerons dans le Livre relatif à la courbure des surfaces (art. 864).

563. Quand la développable doit faire avec l'horizon le même angle que le plan de la directrice Δ, le produit mi est égal à l'unité, et l'on voit par les équations (9) que les courbes Δ et Δ‴ se confondent. Leur plan fait deux fois partie de la développable complète, car le cône directeur mobile le touche toujours le long d'une certaine génératrice, et cette droite occupe les mêmes positions lorsque le sommet parcourt la partie supérieure et la partie inférieure de la courbe.

D'après ce que nous avons vu aux articles **456** et **509**, la directrice Δ″ doit être tangente au plan des deux autres réunies, et en effet, la droite dans laquelle les droites diamétrales conjuguées O′B′ et O′D′ se confondent est nécessairement une asymptote de cette conique.

564. Lorsque le plan de la directrice Δ est horizontal, ce qui est le cas de la *fig.* 272, l'équation (7) de Δ″ se réduit à

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{i^2z^2}{b^2}=1.$$

Nous avons déjà obtenu cette équation à l'article **550**.

On remarquera que les foyers de l'ellipse directrice AB ou Δ peuvent encore être regardés comme les foyers des projections des deux autres coniques Δ″ et Δ‴, lignes doubles de la développable, car ce sont les extrémités du segment de AB sur lequel se projette l'ellipse E′O″F′ ou Δ″ (*fig.* 272), et la différence de leurs distances à un point quelconque de la droite indéfinie CD, projection de l'hyperbole Δ‴, est constante.

565. Les équations (5) de l'article **537** permettent de reconnaître la nature des diverses surfaces du second degré inscrites dans une des surfaces d'égale pente que nous avons étudiées. On trouve des grandeurs infinies pour les trois axes de l'une des inscrites.

Nous avons vu (art. **408**) que tous les points d'un plan situés à l'infini sont sur une droite; il en résulte que le lieu des points de l'espace situés à l'infini est coupé suivant une droite par un plan quelconque, et que par conséquent c'est un plan. La surface inscrite qui a tous ses points à l'infini est aplatie dans ce plan : c'est la directrice Δ′.

Étude générale de la surface d'égale pente circonscrite à une conique.

566. Nous n'avons encore étudié la surface d'égale pente circonscrite à une conique que dans le cas où l'un des axes de cette courbe est dans la direction de la ligne de plus grande pente de son plan. Il n'est pas nécessaire de faire cette restriction pour que la développable soit une variété de celle qui a quatre lignes doubles planes et du second degré, car, le cône directeur étant de révolution, la surface est circonscrite à une seconde conique située à l'infini.

La trace complète de la développable sur le plan d'une ligne double comprend, outre cette courbe, quatre de ses tangentes. Dans les calculs précédents nous avons pu faire disparaître ces droites; ainsi, à l'article **558**, après avoir supprimé le dernier terme de l'équation (3), nous avons rejeté un facteur α et enlevé ainsi les solutions qui correspondent à la valeur nulle de cette variable auxiliaire, c'est-à-dire les génératrices tangentes de la ligne double, car l'équation (2) et la seconde des équations (4) déterminent ces droites, lorsque l'on suppose α nul et par suite β égal à $\pm b$. De même, à l'article **557**, nous avons éloigné un facteur commun β. Enfin à l'article **494**, dans le calcul qui a fait trouver la seconde des équations (6), nous avons supprimé un facteur γ^2 qui correspondait au groupe simple situé dans le plan horizontal. Ainsi donc, si nos calculs ont conduit facilement aux résultats, c'est que, par suite de la symétrie du système géométrique considéré, un facteur représentant les génératrices tangentes s'est trouvé mis en évidence, et a été rejeté. Cette symétrie ne se présente plus d'elle-même dans le problème qui va nous occuper.

Nous savons que, quand une des lignes doubles est à l'infini, les trois autres sont concentriques, et que les traces des plans de deux quelconques d'entre elles sur celui de la troisième sont deux diamètres conjugués de celle-ci; mais il y a dans la question une donnée nouvelle, la pente des génératrices, et nous ne pouvons pas prévoir son influence sur la position des lignes doubles, ce qui serait nécessaire pour que le facteur qu'il faut supprimer pût être mis en évidence. Ce sont les résultats du calcul qui devront nous fixer à cet égard.

567. Nous représentons la conique directrice Δ par les équations

$$A\alpha^2 + 2C\alpha\beta + B\beta^2 = 1, \tag{1}$$

$$\gamma = M\alpha + N\beta. \tag{2}$$

Si nous désignons, comme précédemment, par i la cotangente de l'inclinaison constante des génératrices sur le plan horizontal, l'équation du cône directeur placé de manière à avoir son sommet au point considéré de la directrice sera

$$(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 = (Z - M\alpha - N\beta)^2 i^2,$$

ou, en ordonnant,

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &(1 - M^2 i^2)\alpha^2 - 2MNi^2\alpha\beta + (1 - N^2 i^2)\beta^2 \quad + 2(MZi^2 - X)\alpha \\ &\qquad\qquad + 2(NZi^2 - Y)\beta + X^2 + Y^2 - i^2 Z^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Différentiant l'équation (3) et remplaçant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ par sa valeur déduite de l'équa-

tion (1), on obtient

$$(4)\quad \begin{cases} [C(1-M^2i^2)+AMNi^2]\alpha^2+[B(1-M^2i^2)-A(1-N^2i^2)]\alpha\beta \\ -[C(1-N^2i^2)+BMNi^2]\beta^2+[C(MZi^2-X)-A(NZi^2-Y)]\alpha \\ \qquad -[C(NZi^2-Y)-B(MZi^2-X)]\beta=0. \end{cases}$$

Le système des équations (1), (3) et (4) représente la développable, enveloppe des positions du cône.

568. La direction des axes horizontaux n'est pas déterminée; nous pouvons donc établir une relation entre les coefficients A, B, C, M, N et la pente de la surface. Nous posons

$$(5)\qquad C(1-M^2i^2)+AMNi^2=0.$$

Cette équation fixe l'orientation des axes horizontaux, par rapport à la conique directrice.

569. Nous coupons la surface par le plan

$$(6)\qquad C(MZi^2-X)-A(NZi^2-Y)=0.$$

En vertu des relations (5) et (6), l'équation (4) perd deux de ses termes; on peut diviser les autres par β, et il reste

$$(7)\quad \begin{cases} [B(1-M^2i^2)-A(1-N^2i^2)]\alpha-[C(1-N^2i^2)+BMNi^2]\beta \\ \qquad -[C(NZi^2-Y)-B(MZi^2-X)]=0. \end{cases}$$

La courbe d'intersection est représentée par l'équation (6) et par celle qui doit résulter de l'élimination de α et de β entre les équations (1), (3) et (7). Il est facile de prévoir que nous allons trouver une courbe du second ordre, car le facteur supprimé β a entraîné avec lui quatre génératrices tangentes; on peut, en effet, vérifier que, la relation (5) étant satisfaite, l'intersection des plans (2) et (6) a pour projection horizontale l'axe des abscisses, d'où il résulte que les points de la directrice Δ pour lesquels l'ordonnée β est nulle appartiennent au plan sécant (6), et que les génératrices qui passent à ces points sont situées dans ce plan.

570. Nous introduisons d'abord dans les équations (3) et (7) les valeurs des expressions MNi^2 et (NZi^2-Y) prises dans les équations (5) et (6). Nous obtenons ainsi

$$(8)\quad \begin{cases} (1-M^2i^2)(A\alpha^2+2C\alpha\beta)+(1-N^2i^2)A\beta^2+2(MZi^2-X)(A\alpha+C\beta) \\ \qquad +A(X^2+Y^2-i^2Z^2)=0, \end{cases}$$

$$(9)\quad [A(1-N^2i^2)-B(1-M^2i^2)](A\alpha+C\beta)+(C^2-AB)(MZi^2-X)=0.$$

Pour éliminer α, nous portons dans l'équation (8) les valeurs des binômes $(A\alpha^2+2C\alpha\beta)$ et $(A\alpha+C\beta)$ déduites respectivement des équations (1) et (9),

et ensuite dans l'équation (1) la valeur de α obtenue par l'équation (9). Ces substitutions donnent

$$[A(1-N^2i^2)-B(1-M^2i^2)]^2\beta^2-2(C^2-AB)(MZi^2-X)^2$$
$$+[(1-M^2i^2+A(X^2+Y^2-i^2Z^2)][A(1-N^2i^2)-B(1-M^2i^2)]=0,$$
$$[A(1-N^2i^2)-B(1-M^2i^2)]^2\beta^2-(C^2-AB)(MZi^2-X)^2$$
$$+\frac{A}{C^2-AB}[A(1-N^2i^2)-B(1-M^2i^2)]^2=0.$$

En retranchant la première de ces équations de la seconde, β disparaît, et l'on obtient après quelques réductions

$$(10)\left\{\begin{aligned}&\frac{(C^2-AB)^2}{A}(MZi^2-X)^2+[A(1-N^2i^2)-B(1-M^2i^2)]\\&\times[A(1-N^2i^2)-\frac{C^2}{A}(1-M^2i^2)-(C^2-AB)(X^2+Y^2-i^2Z^2)]=0.\end{aligned}\right.$$

L'intersection de la surface du second ordre représentée par cette équation, avec le plan (6), est une conique concentrique avec la directrice, et, comme elle, ligne double de la développable. Éliminant Z entre les équations (6) et (10), nous trouvons, pour représenter la projection horizontale de la conique, l'équation

$$(11)\left\{\begin{aligned}&\frac{(C^2-AB)^2(NX-MY)^2}{(CM-AN)^2}+\frac{A(1-N^2i^2)-B(1-M^2i^2)}{A}\\&\times\left\{A(1-N^2i^2)-\frac{C^2}{A}(1-M^2i^2)-(C^2-AB)\left[X^2+Y^2-\frac{(CX-AY)^2}{(CM-AN)^2i^2}\right]\right\}=0.\end{aligned}\right.$$

Si nous avions éliminé d'abord β, nous aurions trouvé deux équations complètes du second degré en α, et l'élimination de cette variable nous aurait donné une équation du quatrième degré en X, Y et Z, dont il aurait fallu extraire la racine pour avoir (10). L'opération aurait donc été peu praticable. Cela tient à ce que, sur la projection horizontale de la directrice Δ, les quatre points d'un même groupe sont les sommets d'un parallélogramme oblique; de sorte que, les axes étant rectangulaires et celui des abscisses correspondant aux deux points d'un groupe simple ($\beta=0$) par suite de l'orientation que nous avons donnée aux axes horizontaux (art. **568**), chaque groupe ordinaire est caractérisé par une valeur de β^2, mais non par une valeur de α^2. Nous nous trouvons ainsi, en éliminant d'abord α, dans les mêmes circonstances qu'aux articles **494** et **557**.

571. Il faut maintenant rechercher les conséquences de l'équation (5) pour la position des axes coordonnés.

En rapportant la directrice Δ aux axes de sa projection horizontale et à la verticale de son centre, nous pourrons la représenter par les deux équations

$$(12)\qquad \frac{\alpha'^2}{a^2}+\frac{\beta'^2}{b^2}=1,\quad \gamma=m\alpha'+n\beta'.$$

Si nous appelons φ l'angle dont il faut faire tourner les axes horizontaux pour les faire coïncider avec ceux du système auquel se rapportent les équations (1), nous aurons

$$\alpha' = \alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi, \quad \beta' = \alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi.$$

Portant ces valeurs dans les équations (12), et égalant leurs coefficients à ceux des équations (1) et (2), on trouve

$$(13)\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A} = \dfrac{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}{a^2b^2}, \quad \mathrm{C} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2b^2}\sin\varphi\cos\varphi, \quad \mathrm{B} = \dfrac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}{a^2b^2} \\ \mathrm{M} = m\cos\varphi + n\sin\varphi, \quad \mathrm{N} = -m\sin\varphi + n\cos\varphi. \end{array}\right.$$

Introduisant enfin ces expressions dans l'équation de condition (5), on obtient, toutes réductions faites,

$$(14)\quad a^2mni^2\operatorname{tang}^2\varphi - [a^2(1 - m^2i^2) - b^2(1 - n^2i^2)]\operatorname{tang}\varphi - b^2mni^2 = 0.$$

Il existe donc deux valeurs pour l'angle φ qui détermine la position de la projection horizontale de l'intersection du plan de la ligne double représentée par les équations (6) et (11), avec le plan de la directrice Δ; le produit de leurs tangentes est égal à $-\frac{b^2}{a^2}$, et par suite les droites déterminées dans le plan de Δ sont deux diamètres conjugués de cette conique, comme nous savons que cela doit être.

572. On peut vérifier les formules que nous avons obtenues en y supposant n nulle, ce qui nous ramène au cas étudié dans le paragraphe précédent.

Les deux valeurs de φ données par l'équation (14) sont 0 et 90°.

En faisant $\varphi = 0$ dans les équations (13), on obtient

$$\mathrm{A} = \frac{1}{a^2}, \quad \mathrm{C} = 0, \quad \mathrm{B} = \frac{1}{b^2}, \quad \mathrm{M} = m, \quad \mathrm{N} = 0.$$

L'équation (6) du plan de la courbe devient

$$\mathrm{Y} = 0.$$

Enfin l'équation (10) se réduit à l'équation (7) de l'article **557**.

Opérant de la même manière sur la valeur 90° de φ, on obtient la seconde des équations (4) de l'article **556** et l'équation (8) de l'article **558**. Nous trouvons donc tous les résultats des calculs plus simples du paragraphe précédent, et nous nous serions dispensé de les établir directement si nous n'avions pas fait du cas qu'ils concernent le sujet d'un de nos principaux exercices graphiques.

Les équations que nous venons d'obtenir résolvent complétement la question. Nous aurions pu faire disparaître de l'équation (4) le troisième et le cinquième

terme, au lieu du premier et du quatrième : le facteur supprimé eût alors été α; mais, eu égard à la symétrie qui existe jusque-là dans les formules, nous eussions obtenu un système d'équations équivalent à celui des équations (5), (6) et (10).

573. Pour rendre les différentes coniques comparables entre elles, il faut les rapporter à un même système d'axes, qui sera naturellement celui des équations (12). Cela revient à faire tourner les axes horizontaux de l'angle $-\varphi$, et par conséquent nous avons entre les anciennes coordonnées et les nouvelles, que nous indiquons par des minuscules, les relations

$$(15) \qquad X = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad Y = -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \quad Z = z.$$

Ces valeurs et celles des coefficients données par les équations (13) doivent être portées dans les équations (6) et (11). La substitution dans l'équation (6) donne pour l'équation du plan de la conique

$$(16) \qquad a^2(mi^2z - x)\operatorname{tang}\varphi - b^2(ni^2z - y) = 0.$$

Quelle que soit celle des deux valeurs de l'angle φ que l'on considère, le plan représenté par l'équation (16) contiendra la droite dont les équations sont

$$mi^2z - x = 0, \quad ni^2z - y = 0, \quad nx - my = 0.$$

Cette ligne est donc l'intersection des plans des deux directrices Δ'' et Δ'''; mais elle est évidemment perpendiculaire à la trace horizontale du plan de Δ, dont l'équation est, d'après (12),

$$mx + ny = 0;$$

par conséquent, *l'intersection des plans de deux lignes doubles est perpendiculaire à la trace horizontale du plan de la troisième.*

574. Nous allons maintenant transformer l'équation (11) de la projection horizontale de la ligne double; nous en éliminons d'abord i^2 à l'aide de l'équation de condition (5), pour que les constantes soient indépendantes les unes des autres, et que les réductions dont l'équation définitive est susceptible se présentent d'elles-mêmes :

$$\frac{(C^2 - AB)^2(NX - MY)^2}{CM - AN} + \frac{C(M^2 - N^2) - (A - B)MN}{M} \times \left[A + \frac{CN}{M} - (C^2 - AB)\left(X^2 + Y^2 - \frac{M}{C}\frac{(CX - AY)^2}{(CM - AN)}\right)\right] = 0.$$

Introduisant les valeurs (13) et (15) et réduisant séparément les diverses expres-

sions qui figurent dans l'équation, nous obtenons

$$\frac{(nx-my)^2}{a^2b^2(ma^2\sin\varphi - nb^2\cos\varphi)} + \frac{(a^2-b^2)mn}{a^2b^2(m\cos\varphi + n\sin\varphi)}$$
$$\times\left[\frac{mb^2\cos\varphi + na^2\sin\varphi}{a^2b^2(m\cos\varphi + n\sin\varphi)} + \frac{x^2+y^2}{a^2b^2} - \frac{(a^2x\sin\varphi - b^2y\cos\varphi)^2(m\cos\varphi + n\sin\varphi)}{a^2b^2(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi(ma^2\sin\varphi - nb^2\cos\varphi)}\right] = 0.$$

Ordonnant par rapport aux variables et réduisant, on trouve

$$\frac{nx^2}{\cos\varphi} - \frac{my^2}{\sin\varphi} = \frac{mn(a^2-b^2)}{m\cos\varphi + n\sin\varphi}.$$

Cette équation montre que les projections des trois coniques, lignes doubles de la développable, ont les mêmes axes en direction. Si nous appelons a_1 et b_1 les demi-axes de la conique représentée par l'équation que nous venons d'obtenir et considérée comme une ellipse, nous aurons

$$(17) \qquad a_1^2 = \frac{m(a^2-b^2)}{m+n\,\mathrm{tang}\,\varphi}, \quad b_1^2 = -\frac{n(a^2-b^2)\,\mathrm{tang}\,\varphi}{m+n\,\mathrm{tang}\,\varphi},$$

d'où

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2.$$

Les coniques projections horizontales des trois lignes doubles sont homofocales (¹).

575. Pour représenter graphiquement la surface, les données étant l'inclinaison des génératrices, la projection horizontale de la directrice Δ et son plan, on commencera par déterminer les quatre génératrices qui sont tangentes à cette courbe. Comme elles ont une inclinaison connue, et qu'elles sont dans un plan donné, on peut construire des droites qui leur soient parallèles, et on les trace ensuite comme tangentes à Δ. On obtient ainsi sur le plan horizontal un parallélogramme circonscrit à la projection de Δ, et analogue à kQk_1P (*fig.* 274) ou à A′C′B′D′ (*fig.* 275). Deux des sommets de ce parallélogramme appartiennent à la projection de Δ″, et les deux autres à la projection de Δ‴. Les diagonales sont les traces des plans de ces courbes sur celui de Δ.

Cette construction fait défaut lorsque la surface n'a pas de sommets sur Δ, car alors on ne peut pas mener à cette directrice des tangentes ayant l'inclinaison donnée. Dans ce cas, pour avoir les traces des plans de Δ″ et de Δ‴, on peut calculer les valeurs de tang φ à l'aide de l'équation (14).

(¹) Les théorèmes établis aux articles 573 et 574 ont attiré l'attention de M. Cremona, qui en a donné des démonstrations très-ingénieuses fondées sur les principes de la Géométrie moderne (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1865, p. 271).

576. Dans l'épure que nous présentons, afin de donner une certaine symétrie à la figure et de simplifier les constructions, nous avons supposé que le plan de Δ coupait les plans verticaux passant par les axes de la projection horizontale de cette conique, suivant des droites ayant l'inclinaison des génératrices : les points de Δ situés dans ces plans verticaux sont alors évidemment des sommets de la développable.

D'après l'hypothèse admise, nous avons

$$m^2 = n^2 = \frac{1}{i^2};$$

d'ailleurs, nous pouvons supposer que l'on a choisi le sens des ordonnées positives de manière que m et n soient de même signe.

Les équations (14) et (17) deviennent

$$(14\ bis) \qquad \tan\varphi = \mp \frac{b}{a},$$

$$(17\ bis) \qquad a_1^2 = a(a \pm b), \quad b_1^2 = b(b \pm a).$$

577. La projection horizontale de la directrice donnée est l'ellipse $\mathrm{I}i\mathrm{I}_1 i_1$ (*fig.* 286); on détermine les axes des projections horizontales des autres coniques par les constructions faciles qu'indiquent les équations (17 *bis*) : nous n'avons pas conservé ces constructions sur la figure. La projection de la seconde ligne double Δ'' est l'ellipse $\mathrm{B_1DABA_1}$; celle de la troisième Δ''', l'hyperbole $\mathrm{JABB_1A_1}n_1$.

Les coefficients m et n étant égaux, la trace horizontale du plan de Δ est la droite $\mathrm{P_1OP}$, qui fait avec l'axe des abscisses un angle de -45° : l'intersection des plans des directrices Δ'' et Δ''' se projette, par conséquent, sur la perpendiculaire $\mathrm{D_1OD}$ (art. **573**). Les projections $\mathrm{AA_1}$ et $\mathrm{BB_1}$ des deux autres arêtes du trièdre formé par les plans des lignes doubles sont construites par les relations qu'indiquent les équations (14 *bis*). Les droites $\mathrm{AA_1}$, $\mathrm{BB_1}$ et $\mathrm{DD_1}$, prises deux à deux, forment des systèmes de droites diamétrales conjuguées des courbes.

En déterminant avec soin les extrémités A, $\mathrm{A_1}$, D et $\mathrm{D_1}$ des diamètres conjugués de l'hyperbole Δ''', on trouve qu'ils sont en projection sur l'ellipse Δ''; de même les extrémités B et $\mathrm{B_1}$ du diamètre $\mathrm{BB_1}$ conjugué de $\mathrm{DD_1}$ pour la directrice Δ'' sont, en projection, sur l'hyperbole Δ'''. On peut vérifier à l'aide des formules de l'article **576** ces diverses coïncidences; elles résultent de symétries introduites dans la surface par les hypothèses de cet article. D'après cela, les projections horizontales des diamètres conjugués des directrices, dirigés sur les arêtes du trièdre formé par les plans de ces courbes, sont $\mathrm{CC_1}$ et $\mathrm{GG_1}$ pour l'ellipse Δ, $\mathrm{DD_1}$ et $\mathrm{BB_1}$ pour l'ellipse Δ'', $\mathrm{AA_1}$ et $\mathrm{DD_1}$ pour l'hyperbole Δ'''.

Les points D et $\mathrm{D_1}$, étant sur l'intersection des plans de Δ' et de Δ'', sont dans

l'espace, comme en projection, les extrémités d'un diamètre de l'ellipse Δ'' et d'un diamètre non transverse de l'hyperbole Δ'''.

Les traces horizontales des plans de Δ' et de Δ'' sont les droites $P''_1 P''$ et $P'''_1 P'''$ respectivement perpendiculaires à $A_1 A$ et à $B_1 B$.

578. Nous prenons trois plans verticaux auxiliaires respectivement perpendiculaires aux plans des trois coniques : leurs lignes de terre sont $P_1 x$, $P''_1 x''$ et $P'''_1 x'''$. Nous établissons la trace $P_1 K$ du plan de Δ sur le premier plan auxiliaire : l'angle $KP_1 x$ est une des données du problème ([1]); nous obtenons ensuite la trace de chacun des plans de Δ'' et de Δ''' sur le plan vertical qui lui est perpendiculaire, en cherchant la projection d'un point pris sur son intersection avec le plan de Δ (art. **59**). Ainsi la trace $P''_1 K''$ du plan de Δ'' passe par la projection Γ_2 du point (G, Γ_1) de la droite $(OB, P_1 K)$, et la trace $P'''_1 K'''$ du plan de Δ''' passe par la projection π_2 du point (π, π_1) de la droite $(OA, P_1 K)$.

Il faut maintenant établir les projections des arêtes du trièdre formé par les plans des directrices et de ces courbes elles-mêmes sur le plan vertical de l'épure, qui est celui des grands axes des ellipses II_1 et ADA_1 : cette construction est un simple changement de plan de projection (art. **59**). Nous déterminons le point G' qui correspond à (G, Γ_2), nous traçons $O'G'$ et nous relevons les points B, B_1 et G_1 en B', B'_1 et G'_1. Nous plaçons ensuite la nouvelle projection π' du point (π, π_1), nous traçons $O'\pi'$, et nous relevons les points A, C, C_1 et A_1 en A', C', C'_1 et A'_1. Nous établissons d'une manière analogue la droite $O'D'$, projection de l'arête $(OD, P''_1 K'')$, en opérant sur un point de cette ligne, et nous relevons les points D et D_1 en D' et D'_1. On pourrait obtenir par la même construction des points appartenant aux courbes, mais il vaut mieux remarquer que nous avons des couples de diamètres conjugués : $C'C'_1$ et $G'G'_1$ pour la projection de Δ, $D'D'_1$ et $B'B'_1$ pour la projection de Δ'', et enfin $A'A'_1$ et $D'D'_1$ pour la projection de Δ'''. A l'aide de ces diamètres, on détermine facilement la projection verticale de chaque ligne double.

Deux génératrices de la surface sont parallèles à chaque génératrice du cône directeur; il y a donc quatre génératrices parallèles au plan vertical; elles forment sur ce plan le contour apparent de la développable (art. **545**). Les projections verticales des lignes doubles sont par conséquent inscrites dans un même parallélogramme, et de là résultent entre ces coniques diverses relations à l'étude desquelles nous ne nous arrêterons pas.

Les directrices Δ et Δ'' percent respectivement le plan de Δ''' aux points C, C_1

([1]) Si, pour achever de déterminer le plan de Δ, on donnait, non son angle avec le plan horizontal, mais la tangente *m* de l'inclinaison de sa trace sur le plan vertical de l'épure, on construirait l'angle KP_1X, comme nous l'avons expliqué à l'article 58.

Nous n'avons pas à nous donner la pente des génératrices; elle résulte de la position du plan de Δ, conformément aux relations que nous avons admises à l'article 576.

et D, D_1 (1); les droites CD, C_1D_1, DC_1 et D_1C forment donc un groupe simple : ce sont des génératrices tangentes à Δ''', et leurs points de contact j, j_1, J_1 et J sont des sommets de la développable.

Les droites (AB, A′B′), (A_1B_1, $A'_1B'_1$), (BA_1, $B'A'_1$) et (B_1A, B'_1A') sont de même des génératrices tangentes à Δ; elles déterminent les quatre sommets (I, I′), (I_1, I'_1), (i_1, i'_1) et (i, i'). Les deux dernières sont parallèles au plan vertical, et par suite leurs projections sur ce plan forment deux des côtés du quadrilatère circonscrit dont nous venons de parler; les droites $B'A'_1$ et B'_1A' sont donc tangentes à la projection de Δ''' en A'_1 et en A′, et à la projection de Δ'' en B′ et en B'_1; le diamètre D'_1D', respectivement conjugué à A'_1A' et à B'_1B', est par conséquent parallèle à $B'A'_1$ et à B'_1A'.

L'angle constant formé par les génératrices de la surface avec le plan horizontal est égal à l'angle que forment les droites $B'A'_1$ et B'_1A' avec O′X′, ou à D′O′X′.

579. Sur la directrice Δ, quatre points e, c, e_1 et c_1 d'un groupe sont les sommets d'un parallélogramme qui a ses côtés respectivement parallèles aux diamètres conjugués B_1B et A_1A, traces des plans des deux autres directrices sur celui de Δ (art. **562**). On peut, par la même considération, déterminer sur Δ'' quatre points a, b, a_1 et b_1 qui dépendent d'un groupe, et, si ce groupe est le même que celui des points e, c, e_1 et c_1, le rapport des abscisses Or et Op sur le diamètre BOG_1, intersection des plans de Δ et de Δ'', sera indépendant de la position des points considérés sur Δ et Δ'' (art. **516**). Mais les points i et B_1 sont sur une génératrice; on doit donc avoir

$$\frac{Or}{Op} = \frac{Oq}{OB_1} \quad \text{ou} \quad \frac{Os}{Op} = \frac{Oi}{OB_1}.$$

D'après cela, pour obtenir le point p du parallélogramme aba_1b_1 dont les sommets appartiennent au même groupe que ceux du parallélogramme ece_1c_1, il suffit de tracer sp parallèle à iB_1.

La construction se simplifie pour la directrice Δ''', parce que le diamètre DD_1 est commun à Δ'' et à Δ''' en direction et en grandeur. Les carrés désignés par p^2 et q^2 à l'article **516** sont égaux, mais de signe contraire, car le diamètre DD_1 n'est pas transverse pour l'hyperbole Δ'''. Il résulte de là que les points de Δ'' et de Δ''' qui appartiennent à une même génératrice ont sur DD_1 des abscisses égales et de sens opposé. OH et OH_1 étant, sur le diamètre DD_1, les abscisses des sommets du parallélogramme aba_1b_1, si l'on mène par les points H et H_1 des parallèles à A_1A,

(1) Quelques-unes des indications se rapportent seulement au plan horizontal, mais on peut suivre les raisonnements sur les deux projections. Le point J_1, symétrique de J, n'a pu être tracé sur la figure.

on déterminera sur Δ''' les points m, n_1, m_1 et n qui appartiennent au groupe considéré.

Les points a et b_1 de Δ'' qui ont pour abscisse OH sont sur les génératrices qui passent par les points n_1 et m de Δ''', dont l'abscisse est — OH ou OH_1.

Nous n'avons pas tracé les génératrices de ce groupe par crainte de confusion : ce sont les huit droites

$$nea_1, \qquad ncb,$$
$$acm, \qquad meb_1,$$
$$b_1c_1n_1, \qquad n_1e_1a,$$
$$be_1m_1, \qquad a_1c_1m_1.$$

Nous avons construit la trace horizontale de la surface; elle se compose de deux branches fermées qui se coupent aux traces ε et ν de Δ'', et de deux points isolés ω_1 et ω, traces des arcs parasites de Δ. Les traces de toutes les génératrices du groupe qui a été déterminé sont indiquées par des lettres.

580. *Cas où la directrice donnée est une hyperbole.* — Dans tous nos exercices nous avons choisi pour première directrice Δ une ellipse, parce que cette conique a une certaine analogie de forme avec les courbes que l'on rencontre le plus souvent dans les applications. Nous allons maintenant examiner sommairement les diverses dispositions que peut présenter la surface d'égale pente circonscrite à une hyperbole.

Rappelons d'abord que tout plan tangent à la directrice Δ et faisant avec le plan horizontal le même angle que la développable touche cette surface le long de la génératrice qui passe au point de contact. D'après cela, si la conique Δ est une hyperbole dont une asymptote se trouve plus inclinée que les génératrices, on pourra faire passer par cette droite deux plans ayant la pente des plans tangents de la développable, et chacun d'eux contiendra une génératrice située à l'infini. La surface a donc deux génératrices situées à l'infini, c'est-à-dire dans le plan de Δ'; elles sont tangentes à cette directrice (art. **457**), et leurs points de contact sont deux sommets de la développable.

Si la seconde asymptote de Δ est moins inclinée que les génératrices, la surface n'a que deux sommets sur Δ', et par suite elle appartient à la variété portée sous le n° 5 à l'article **521** ([1]); les groupes sont formés de quatre génératrices, et les plans de Δ'' et de Δ''' n'existent plus : on peut vérifier que les racines de l'équation (14) (art. **575**) sont imaginaires quand les génératrices sont moins inclinées que l'une des asymptotes de Δ, et plus inclinées que l'autre. Enfin, si l'on coupe le cône directeur par un plan parallèle à celui de Δ, on aura une hyperbole

([1]) Nous n'avons pas trouvé cette disposition dans la discussion de l'article 508, parce que nous avons supposé que les plans des trois directrices concentriques étaient réels.

dont les asymptotes seront croisées avec celles de Δ (art. **502**); il est en effet très-facile de reconnaître que, lorsqu'on coupe un cône de révolution par un plan contenant deux droites, l'une plus inclinée que les génératrices du cône, l'autre moins inclinée qu'elles, la section est une hyperbole dont les asymptotes sont croisées avec les droites.

581. Quand la seconde asymptote de l'hyperbole Δ est, comme la première, plus inclinée que les génératrices, la surface a quatre génératrices à l'infini. Ces droites, étant dans un même plan (art. **565**), se coupent en six points qui sont des points doubles étrangers à Δ' : chacune des coniques Δ'' et Δ''' a donc comme Δ deux points à l'infini, et par conséquent les trois coniques concentriques sont des hyperboles. Leurs six asymptotes sont les intersections mutuelles des quatre plans qui touchent la surface le long des génératrices situées à l'infini. On détermine facilement ces plans, comme nous l'avons vu à l'article précédent, quand on connaît les asymptotes d'une directrice et la pente des génératrices; ils sont tangents au cône directeur placé de manière à avoir son sommet au centre de la surface. Les droites de contact de ces plans avec le cône sont parallèles aux génératrices situées à l'infini.

L'arête de rebroussement possède deux rebroussements à l'infini dans le premier des cas que nous venons d'examiner, et quatre dans le second. Les branches sont paraboliques, car la génératrice tangente est tout entière à l'infini ([1]).

582. Quand la directrice Δ est une hyperbole ayant ses deux asymptotes plus inclinées que les génératrices, la section du cône directeur par un plan parallèle à celui de Δ est une ellipse ou une hyperbole ayant avec Δ un système de diamètres conjugués parallèles. La discussion de l'article **521** montre que la surface peut être imaginaire; lorsqu'elle est réelle, elle n'a pas de génératrice à l'infini, et par conséquent elle ne possède dans le plan de Δ', outre cette conique, que deux points isolés appartenant à Δ. Les directrices Δ'' et Δ''' sont donc des ellipses. C'est à ce cas que se rapportent les surfaces représentées sur les *fig.* 272, 274 et 275, 286 et 287, si l'on y considère l'hyperbole comme étant la directrice donnée Δ.

583. Si l'on veut déterminer les conditions auxquelles doivent satisfaire deux coniques concentriques pour que la développable qui leur est circonscrite soit d'égale pente, on exprimera que le cône directeur dont l'équation en coordonnées obliques a été donnée à l'article **543** est de révolution. On trouve deux équations de condition. Nous ne nous arrêterons pas à cette question.

584. *Cas où la directrice donnée est une parabole.* — Lorsque la directrice Δ est une parabole, la surface d'égale pente circonscrite ne possède à distance finie qu'une autre ligne double qui est également une parabole. Les équations de la

---

([1]) Nous avons indiqué à l'article 184 comment on peut étudier la disposition des branches paraboliques lorsqu'il y a un rebroussement à l'infini.

première étant

$$z = mx + ny, \quad y^2 + 2px = 0,$$

celles de la seconde sont

$$x + \frac{1 - m^2 i^2}{mni^2} y - \frac{1}{m} z + p \frac{1 - m^2 i^2 - n^2 i^2}{1 - m^2 i^2} = 0,$$

$$\frac{1 - m^2 i^2}{n^2 i^2} y^2 + 2px + p^2 \frac{1 - m^2 i^2 - n^2 i^2}{1 - m^2 i^2} = 0.$$

Pour éviter d'entrer dans des détails trop minutieux, nous avions jusqu'à présent supposé que les coniques directrices étaient des courbes à centre, et, si nous donnons ces derniers résultats, c'est que la surface d'égale pente circonscrite à une parabole a quelque importance dans les applications [1]. Nous ne développons pas les calculs, parce qu'ils ne présentent aucun intérêt spécial.

---

[1] Nous faisons allusion aux raccordements paraboliques dans les routes. L'arête de l'accotement directrice de la surface d'égale pente n'est pas, il est vrai, exactement une parabole ni même une courbe plane; néanmoins les formules que nous donnons feront généralement connaître la ligne d'intersection des talus avec une approximation suffisante.

LIVRE SEPTIÈME.
SURFACES GAUCHES.

CHAPITRE PREMIER.

PARABOLOIDES.

Définition. — Double système de génératrices rectilignes. — Plans tangents.

585. Nous avons dit (art. **452**) que l'on appelle *surfaces gauches* celles qui, étant réglées, ne peuvent pas être développées sur un plan, et nous avons montré que les surfaces réglées sont en général gauches. Il résulte de là que les surfaces développables ne sont qu'une variété des surfaces gauches. Une surface gauche peut être déterminée par trois directrices (art. **452**), ou par deux directrices et un cône directeur (art. **467**); mais, dans chaque cas, il est nécessaire d'examiner si les données sont telles que les plans tangents aux divers points d'une génératrice quelconque se confondent, car alors la surface serait développable.

Nous avons toujours supposé que le lecteur connaissait les principales propriétés des surfaces du second ordre, et par conséquent du paraboloïde hyperbolique, et de l'hyperboloïde à une nappe; mais, comme ces surfaces gauches jouent un rôle fort important dans les arts graphiques, nous devons les étudier sous le rapport des constructions auxquelles leur emploi donne lieu. Nous commencerons par le paraboloïde.

586. On appelle *paraboloïde hyperbolique* la surface engendrée par une droite qui se meut en rencontrant deux directrices rectilignes à distance finie ou à l'infini, et en restant parallèle à un plan qui remplace le cône directeur de l'article **467**. Cette surface admet comme variétés :

1° Le système de deux plans Q et Q_1 qui se coupent :

Quand une des directrices AB est parallèle au plan directeur P, l'autre A_1B_1 étant quelconque (*fig.* 207);

Quand les directrices AB, CD sont dans un même plan et non parallèles au plan directeur (*fig.* 207, *a*).

2° Le système de deux plans parallèles Q et Q_1 (*fig.* 211) quand les deux directrices AB et $A_1 B_1$ sont parallèles au plan directeur P et non parallèles entre elles.

Lorsque les directrices sont parallèles entre elles au plan directeur, toute droite qui leur est parallèle satisfait aux conditions imposées aux génératrices, et par suite la surface n'est pas déterminée.

Nous supposerons toujours que les directrices n'ont aucune des positions relatives exceptionnelles qui viennent d'être énumérées, et alors la surface sera gauche comme ayant des directrices rectilignes (art. **464**). Nous la désignerons par le seul nom de *paraboloïde*.

587. Les plans coordonnés que nous prendrons dans l'étude du paraboloïde sont le plan directeur P et un plan Q parallèle aux deux directrices. En général, ces plans ne sont pas perpendiculaires l'un à l'autre. Un point M aura pour projetantes sur les plans P et Q (*fig.* 280) deux droites Mm et Mm'_1, perpendiculaires à la ligne de terre et respectivement parallèles aux plans Q et P.

Il n'y a pas dans ce système de modifications à apporter aux constructions ordinaires relatives aux questions dans lesquelles il n'entre aucune considération de perpendicularité ou de grandeur d'angle, telles que la recherche de l'intersection de deux plans, des traces d'une droite, etc. Quand on fait des rabattements, il faut avoir égard à l'obliquité des projetantes qui est égale à l'angle des plans coordonnés.

Pour la facilité du langage, nous supposerons que le plan directeur P est horizontal.

588. Les directrices sont (A, A') et (A_1, A'_1) (*fig.* 276); puisqu'elles ne se trouvent pas dans un même plan et qu'elles ne sont pas parallèles au plan P, leurs projections horizontales A et A_1, qui, d'après les dispositions adoptées, doivent être parallèles à la ligne de terre, sont nécessairement distinctes, et leurs autres projections A' et A'_1 rencontrent la ligne de terre.

Une droite quelconque B', parallèle à la ligne de terre, est la projection sur le plan Q d'une génératrice, car le plan horizontal B' coupe les directrices en deux points (M, M'), (M_1, M'_1), et la droite (B, B') qu'ils déterminent satisfait aux conditions.

Du point de concours O' des projections A' et A'_1 abaissons une droite O'O, perpendiculaire à la ligne de terre : les triangles semblables $M_1\omega O$ et $M_1 cM$ donnent

$$\frac{O\omega}{Mc} = \frac{M_1\omega}{M_1 c}.$$

Le second rapport est égal à $\frac{M'_1 e}{M'_1 M'}$ et par suite à $\frac{N'_1 g}{N'_1 N'}$: il est donc indépendant de la position de la génératrice considérée (B, B'); de plus la distance Mc est

constante; en conséquence le point O est fixe sur la droite $O'g$, perpendiculaire à la ligne de terre. Nous voyons ainsi que les projections de toutes les génératrices sur le plan P passent par un même point O.

589. Nous allons maintenant déterminer la trace de la surface sur un plan A_2 parallèle à Q. La génératrice (B, B′) le rencontre en un point (M_2, M'_2), et l'on a, en ayant égard au parallélisme des droites MM′, $M_1M'_1$ et $M_2M'_2$,

$$\frac{MM_1}{M_1M_2} = \frac{M'M'_1}{M'_1M'_2}.$$

Le premier rapport est celui des distances des droites A et A_1, A_1 et A_2; le second a donc la même valeur, quelle que soit la position de la génératrice considérée (B, B′), et par suite le lieu des points M'_2, projection sur le plan Q de l'intersection de la surface par le plan A_2, est une droite qui passe au point de concours O′ des projections A′ et A'_1. Tout plan parallèle à Q coupe donc la surface suivant une droite; le paraboloïde admet ainsi un système de génératrices rectilignes pour lesquelles le plan Q est directeur. Les projections de ces nouvelles génératrices sont parallèles à la ligne de terre sur le plan P et passent par un même point sur le plan Q. Les directrices (A, A′), (A_1, A'_1) sont des génératrices de ce second système.

Nous voyons que *le paraboloïde admet deux systèmes de génératrices rectilignes.*

La droite B_1 qui joint les traces N et N_1 des directrices est une génératrice du système P, et forme la trace horizontale du paraboloïde.

590. *Deux génératrices de systèmes différents se rencontrent,* car leurs projections sur le plan P ont nécessairement un point commun tel que M_2, et ce point n'est la projection que d'un seul point du paraboloïde, puisque le plan parallèle à Q et passant par M_2 coupe la surface suivant une droite.

Il résulte de la proposition que nous venons d'établir qu'*une génératrice de l'un des systèmes rencontre toutes les génératrices de l'autre système,* et par suite que *deux génératrices quelconques de l'un des systèmes peuvent être prises pour directrices de celles de l'autre système.*

Les projetantes des points O et O′ sont des génératrices qui appartiennent respectivement aux systèmes Q et P, et par conséquent la surface sera déterminée si l'on donne sa trace B_1 sur l'un des plans directeurs et le point de concours O′ des projections de ses génératrices sur l'autre, car, la projetante de ce point étant une génératrice du même système que B_1, ces deux droites peuvent être prises pour directrices.

Deux génératrices d'un même système ne se rencontrent pas, car leurs projections sont parallèles sur l'un des plans directeurs et convergentes sur l'autre.

On voit qu'il existe entre les génératrices des deux systèmes un parallélisme complet de propriétés géométriques.

591. Un paraboloïde étant donné par sa trace horizontale OK (*fig.* 279) et le point de concours O′ sur le plan Q, on déterminera immédiatement la seconde trace KO′ et le point de concours O sur le plan horizontal.

Pour avoir la projection sur le plan Q d'un point de la surface dont on se donne la première projection M, on construit la projection N′O′ de la génératrice du système Q dont la projection horizontale est MN, et on relève le point M en M′ sur N′O′. Il y a toujours une solution, et par conséquent tout point de l'un quelconque des plans directeurs est la projection d'un point de la surface.

La génératrice du système P qui a pour projection horizontale OME se projette sur le plan Q suivant l'horizontale M′E′. Si la droite indéfinie OME, tournant d'une manière continue autour du point O, se place sur Om, se confond avec la parallèle IJ à la ligne de terre et revient à sa première position après une révolution de 180°, la génératrice qu'elle représente s'élèvera, se projettera sur $m'e'$, s'éloignera à l'infini en devenant parallèle à xy, et, reparaissant au-dessous du plan horizontal, viendra reprendre sa position initiale (OME, M′E′).

Nous voyons donc que, *si par un point pris dans le plan directeur de l'un des systèmes on mène des droites parallèles aux génératrices de ce système, elles occuperont autour du point toutes les positions possibles*, et qu'*il y a dans chaque système une génératrice située tout entière à l'infini. Les deux génératrices à l'infini sont parallèles à l'intersection des plans directeurs.*

592. Un plan passant par la génératrice (OE, M′E′) (*fig.* 279) a pour trace horizontale une droite LN parallèle à OE. La génératrice du système Q dont la trace est N rencontre la première génératrice en un point (M, M′) et a ainsi deux points dans le plan considéré. Ce plan, contenant les deux génératrices qui se croisent au point (M, M′), est tangent en ce point à la surface.

Le plan tournant autour de la génératrice (OE, M′E′), sa trace devient successivement N_1L_1, N_2L_2, ..., le point de contact s'éloignera en (M_1, M'_1), (M_2, M'_2), ...; il se trouvera à l'infini quand le plan sera horizontal, puis il reparaîtra de l'autre côté du point (M, M′), et il reviendra à ce point quand le plan achèvera une rotation de 180°. Ainsi donc *tout plan qui coupe le paraboloïde suivant une génératrice contient une génératrice de l'autre système et est tangent à la surface à leur point de rencontre; quand il est parallèle au plan directeur du système auquel appartient la génératrice considérée, l'autre génératrice et le point de contact sont à l'infini; pendant une rotation de 180° de ce plan autour de la génératrice, le point de contact parcourt la longueur indéfinie de cette droite.*

Le plan tangent en un point donné (M, M′) contient les deux génératrices qui se croisent en ce point; on détermine ses traces NL et LE′ sans difficulté.

Sections planes. — Diamètres. — Axe. — Plans diamétraux.

593. Nous allons maintenant chercher l'intersection par un plan (HF, HE') (*fig.* 282) d'un paraboloïde déterminé comme précédemment par ses traces KJ, KI', par les projections O et O' des génératrices perpendiculaires à l'intersection des plans directeurs, et par l'angle Z_1YY_1 de ces plans.

Un plan horizontal $x'y'$ coupe le paraboloïde et le plan sécant suivant deux droites NOn et Gm, dont le point de rencontre (M, M') appartient à l'intersection.

En menant par le point O une parallèle à HF, on détermine une génératrice $(Ib, I'b')$ parallèle au plan. On trouve de la même manière, dans le système Q, une génératrice $(Jnb, J'n'b')$ parallèle à la trace HE' et au plan. A chacune de ces génératrices correspond une branche infinie.

Pour avoir les asymptotes, il faut prendre l'intersection du plan sécant avec les plans tangents de la surface aux points de la courbe situés à l'infini, c'est-à-dire avec le plan passant par $(Ib, I'b')$ et parallèle à P, et avec le plan passant par $(Jb, J'b')$ et parallèle à Q, car ces plans sont respectivement tangents aux points des génératrices $(Ib, I'b')$ et $(Jb, J'b')$ situés à l'infini. On trouve les droites (EA, E'A') et $(FmA, F'm'A')$.

Les triangles semblables mnM et bnO donnent

$$mM \times bn = bO \times mn;$$

mais les droites $J'b'$ et F'A' sont parallèles à la trace HE' du plan, et par conséquent parallèles entre elles : il suit de là que les longueurs bn et Am d'une part, mn et FJ de l'autre, sont égales comme projections de segments égaux et parallèles. L'équation nous donne donc

$$mM \times Am = bO \times FJ.$$

Les facteurs du premier membre sont les coordonnées du point M par rapport aux asymptotes AE et AF de la projection horizontale. Le second membre est constant ; la courbe est donc une hyperbole sur le plan P, et par suite dans l'espace.

Le point de concours O étant la projection d'une génératrice entière, la courbe cMd doit nécessairement y passer. Le point de concours O' appartient pour le même motif à la seconde projection $c'M'd'$ de l'intersection. La génératrice qui se projette tout entière au point O perce le plan sécant en un point dont on détermine facilement la projection O'_1 sur le plan Q. La génératrice du système P qui passe par le point (O, O'_1) est (Ot, O'_1t').

On peut construire une tangente soit par les propriétés spéciales de l'hyperbole, soit comme intersection du plan tangent et du plan sécant. Nous avons employé

cette dernière méthode pour la tangente (Ot, $O'_1 l'$) au point (O, O'_1). On obtient facilement le plan tangent en remarquant qu'il contient les deux génératrices qui se croisent en (O, O'_1).

594. Nous prenons un plan (Y_1 Y, YZ) perpendiculaire à la ligne de terre, et nous le rabattons sur le plan horizontal : la trace YZ se place sur la droite YZ_1 faisant avec YY_1 l'angle connu des plans directeurs. Nous désignerons ce nouveau plan de projection par la lettre R.

Les plans tangents du paraboloïde aux points de la courbe situés à l'infini sont, comme nous l'avons vu, le plan $I'a'$ parallèle à P, et le plan JF'' parallèle à Q; ils ont pour traces sur le plan R les droites aA'' et $F''A''$ respectivement parallèles à YY_1 et à YZ_1, et ils projettent sur ces traces toutes les lignes qu'ils contiennent, notamment les génératrices (bI, $b'I'$) et (bJ, $b'J'$) parallèles au plan sécant, et les asymptotes (AE, A'E'), (AF, A'F') de la section.

Si l'on transporte le plan (FH, HE') parallèlement à lui-même, la projection de la section sur le plan R aura les mêmes asymptotes aA'' et $F''A''$, et le centre de l'hyperbole se projettera toujours en A''. Le lieu des centres de toutes ces sections parallèles sera donc la droite parallèle à XY dont A'' est la projection, et, comme on appelle *diamètre* d'une surface le lieu des centres d'une série de sections parallèles, nous voyons que *tous les diamètres du paraboloïde sont des droites parallèles à l'intersection des plans directeurs*.

Réciproquement, toute droite parallèle à l'intersection des plans directeurs est un diamètre, car, si par sa projection A'' sur le plan R on fait passer deux droites respectivement parallèles à YY_1 et à YZ_1, les sections faites par les plans parallèles aux génératrices dont ces lignes sont les projections auront leurs centres projetés en A''.

595. Un diamètre est un *axe* quand il est perpendiculaire aux plans des sections dont il contient le centre. Tous les diamètres du paraboloïde étant parallèles, cette surface a *un seul axe* lieu des centres des sections faites par les plans qui les coupent à angle droit. Les génératrices perpendiculaires aux diamètres, et par suite parallèles au plan R, sont projetées, l'une en O sur P, l'autre en O' sur Q. Appliquant aux sections par des plans perpendiculaires à XY les raisonnements faits à l'article précédent pour les hyperboles contenues dans des plans parallèles, on reconnaît que le diamètre passant par le point (O, O', O'') est l'axe de la surface. Ce point est le *sommet* du paraboloïde.

596. On sait que dans une hyperbole le milieu d'une corde est aussi le milieu du segment intercepté sur la même droite par les asymptotes. Mais les asymptotes des sections faites par des plans parallèles à (HF, HE') (*fig.* 282) sont dans deux plans perpendiculaires à R, ceux qui ont pour traces aA'' et $F''A''$; la surface diamétrale, lieu des milieux d'une série de cordes parallèles entre elles et à un plan (HF, HE'), est donc le lieu des milieux des segments interceptés sur les

mêmes droites par les plans aA'' et $F''A''$, c'est-à-dire un plan contenant le diamètre projeté en A''' sur R. Il en résulte que *les surfaces diamétrales du paraboloïde sont des plans parallèles à l'axe.*

597. Pour déterminer le plan diamétral d'un système de cordes, on commence par chercher la projection M, sur un plan R perpendiculaire à l'axe, de l'un des points du paraboloïde où le plan tangent est parallèle à ces lignes (*fig.* 270). Il suffit pour cela de faire passer par une génératrice quelconque un plan parallèle à la direction donnée et de chercher son point de contact (art. **592**). Dans ce plan sont deux génératrices et une tangente parallèle aux cordes; on trace leurs projections Ma, Mb et Mp : la droite Mq, qui partage en parties égales les segments parallèles à Mp, tels que gh, est la trace du plan cherché, qui est d'ailleurs perpendiculaire au plan de projection R.

598. Les droites Mp et Mq forment un système de diamètres conjugués des hyperboles qui ont pour asymptotes Ma et Mb, et par suite du système de ces droites. Il est du reste facile de voir sur la figure même, et sans la considération des hyperboles, que le point f est le milieu du segment ih parallèle à Mq, comme le point e est le milieu du segment gh, parallèle à Mp.

Ces propriétés sont réciproques entre les projections Ma et Mb des génératrices d'une part et les droites Mp et Mq de l'autre; ainsi la droite Mb divise en parties égales les segments, tels que qp, parallèles à Ma.

Les quatre droites Ma, Mb et Mp, Mq forment un système de *conjuguées harmoniques.*

599. Les sections planes des surfaces gauches ont des branches infinies de deux genres généralement très-distincts : les unes sont déterminées par une génératrice parallèle au plan sécant, les autres par une génératrice à l'infini. Dans le paraboloïde, chacun des deux points d'une section plane situés à l'infini est sur la génératrice à l'infini d'un système et sur la génératrice de l'autre système qui est parallèle au plan. Chaque branche réunit ainsi les caractères des deux genres.

600. Nous avons démontré à l'article **593** que la section plane du paraboloïde est une hyperbole lorsqu'il existe, à distance finie, une génératrice du système P parallèle à la trace horizontale HF du plan sécant (*fig.* 282) et une génératrice du système Q parallèle à la trace HE', c'est-à-dire toutes les fois que ces deux traces ne sont pas parallèles à l'intersection XY des deux plans directeurs (art. **591**). Lorsque le plan sécant sera parallèle à XY et par suite à l'axe de la surface, la génératrice qui se trouvera lui être parallèle dans l'un des systèmes, tel que P, sera précisément celle qui est à l'infini. La courbe n'aura donc qu'une branche infinie. Le plan contenant la génératrice et parallèle à P sera tout entier à l'infini; l'asymptote de l'intersection se trouvera avec lui à l'infini, et cette courbe sera une parabole.

Quand on examine directement cette question, on trouve facilement, en plaçant

l'origine au point O (*fig.* 282), que les abscisses de la section projetée, mesurées parallèlement à XY, sont proportionnelles aux carrés des ordonnées parallèles à la tangente Ot.

Les sections planes du paraboloïde sont ainsi des hyperboles ou des paraboles, suivant la position du plan sécant, dans tous les cas des courbes du second ordre, et par conséquent la surface est elle-même de cet ordre.

Digression sur les faisceaux harmoniques ([1]).

601. Nous avons parlé à l'article **598** de droites conjuguées harmoniques; nous allons montrer les relations qui existent entre ce système géométrique et la division harmonique dont nous nous sommes occupés précédemment (art. **514**).

Considérons les quatre droites A, B, C et D divergeant d'un même point O et coupées par une sécante TT (*fig.* 271): les deux triangles $a\mathrm{O}c$ et $a\mathrm{O}d$ donnent

$$\frac{\sin a\mathrm{O}c}{\sin c}=\frac{ac}{a\mathrm{O}},\quad \frac{\sin a\mathrm{O}d}{\sin d}=\frac{ad}{a\mathrm{O}},$$

d'où

$$\frac{\sin a\mathrm{O}c}{\sin a\mathrm{O}d}=\frac{ac}{ad}\,\frac{\sin c}{\sin d}.$$

On a pareillement

$$\frac{\sin b\mathrm{O}c}{\sin b\mathrm{O}d}=\frac{bc}{bd}\,\frac{\sin c}{\sin d}.$$

Donc

$$\frac{\sin a\mathrm{O}c}{\sin a\mathrm{O}d}:\frac{\sin b\mathrm{O}c}{\sin b\mathrm{O}d}=\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}.$$

Pour attribuer des signes aux angles que forment des droites divergentes, on prend pour origine celui de leurs côtés qui est écrit le premier, et l'on considère chaque angle comme positif ou négatif, suivant que son ouverture à partir de ce côté est dirigée dans un même sens convenu ou en sens contraire. Quand deux angles ont la même origine, leur rapport est positif s'ils ont leur ouverture dirigée dans le même sens, négatif dans le cas contraire.

Il est facile de voir sur la figure que les rapports $\frac{\sin a\mathrm{O}c}{\sin a\mathrm{O}d}$ et $\frac{ac}{ad}$ auront toujours le même signe, et qu'il en est de même des autres rapports $\frac{\sin b\mathrm{O}c}{\sin b\mathrm{O}d}$ et $\frac{bc}{bd}$, d'où il résulte que les deux membres de l'équation ci-dessus sont de même signe, et que cette équation doit être considérée comme complétement exacte et non pas comme impliquant seulement une égalité de grandeurs absolues.

([1]) Ce paragraphe est emprunté presque textuellement aux articles 13, 14, 15 et 110 du *Traité de Géométrie supérieure* de M. Chasles.

L'expression $\frac{\sin aOc}{\sin aOd} : \frac{\sin bOc}{\sin bOd}$ est le *rapport anharmonique des quatre droites* A, B, C et D. Nous voyons donc que, *si par quatre points en ligne droite on mène quatre droites concourantes en un même point, le rapport anharmonique de ces quatre droites sera égal à celui des quatre points et aura le même signe.*

Il suit de là que, *quand deux transversales rencontrent un faisceau de quatre droites en des points a, b, c, d et a', b', c', d', le rapport anharmonique des quatre premiers points est égal à celui des quatre autres et de même signe.*

Ainsi l'on a

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'}.$$

La transversale T′T′ est quelconque. Si nous considérons une transversale T″T″ parallèle à la droite B, le point b'' où elle rencontre cette ligne sera à l'infini, le rapport $\frac{b''c''}{b''d''}$ sera égal à l'unité, et nous aurons

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a''c''}{a''d''}.$$

Si le rapport anharmonique est égal à l'unité négative, la division des transversales sera harmonique (art. **514**), et le faisceau sera aussi *harmonique*. Les segments $a''c''$ et $a''d''$ seront alors égaux et de signe contraire. Réciproquement, si ces segments sont égaux et de sens opposé, le rapport anharmonique des droites sera égal à -1, et le faisceau sera harmonique : tel est le cas des quatre droites Ma, Mb, Mq et Mp de la *fig.* 270.

Il est facile de reconnaître que deux droites situées dans un plan sont conjuguées harmoniques des bissectrices des deux angles qu'elles comprennent.

602. Les lignes PA et PB de la *fig.* 226 sont coupées par les quatre droites QP, QA, QD et QG qui divergent du point Q, et par suite on a entre les segments déterminés par ces droites sur les premières la relation

$$\frac{PD}{PG} : \frac{AD}{AG} = \frac{PE}{PH} : \frac{BE}{BH}.$$

Si l'on considère les mêmes lignes PA et PB comme coupées par les droites PM, DMB, AME et GMH qui se croisent en M, on pourra écrire

$$\frac{PA}{PG} : \frac{DA}{DG} = \frac{PE}{PH} : \frac{BE}{BH}.$$

Égalant les premiers membres de ces équations, et remarquant que l'on a

$$AD = -DA, \quad DG = -GD, \quad AG = -GA,$$

on obtient

$$\frac{PD}{PA}:\frac{GD}{GA}=-1.$$

Les droites PQ, GQ, DQ et AQ forment donc un faisceau harmonique, et une droite quelconque telle que PM est divisée harmoniquement par ces lignes; par conséquent, si la droite QG est peu éloignée de la bissectrice de l'angle DQA, la droite PQ sera rapprochée de la bissectrice de l'angle supplémentaire, ce qui justifie l'observation que nous avons présentée à l'article **421**.

Représentation du paraboloïde. Plans principaux. Paraboles principales.

603. Considérons un paraboloïde donné comme précédemment par ses traces GK et KF sur deux plans coordonnés P et Q respectivement parallèles aux deux plans directeurs (*fig.* 288), par l'angle de ces plans et par les projections O et O′ du sommet : nous déterminons la projection O″ de ce point, sur un troisième plan R, perpendiculaire aux deux autres et rabattu sur P, et nous allons représenter par un certain nombre de génératrices la partie de la surface qui est projetée sur le losange A″B″C″D″ dont le centre est en O″, qui est appuyé sur la ligne de terre YY_1 et dont les côtés A″B″ et A″D″ comprennent un angle égal à celui des plans directeurs.

Nous divisons les côtés du losange en un même nombre de parties égales, et, joignant par des droites les points correspondants des côtés opposés, nous obtenons deux séries de lignes qui sont respectivement parallèles aux traces YY_1 et YZ_1 des plans P et Q, et qui représentent les unes des génératrices du système P, les autres des génératrices du système Q.

Il est facile d'avoir sur les plans P et Q les projections des lignes considérées. On peut opérer comme il suit : mener par les points de division de A″B″ des parallèles à XY qui seront sur le plan P les projections des génératrices indéfinies du système Q; projeter sur XY les points de rencontre de ces droites avec AB et joindre ces projections au point O′ par des droites qui seront les secondes projections des génératrices du système Q; des points de division de A″D″ ramenés sur YZ tracer des parallèles à XY et ne conserver de ces lignes que les segments compris entre les droites indéfinies A′O′ et B′O′; enfin ramener les points de division des lignes A′D′ et C′B′ sur AD et CB, et joindre les points correspondants par des droites qui passeront nécessairement par O.

Pour faire comprendre la disposition de la surface dans l'espace, nous avons supposé que l'une de ses faces était blanche et l'autre noire.

604. Nous prenons un nouveau plan de projection S perpendiculaire à R et parallèle à la diagonale A″C″. Pour la facilité du langage, nous considérons R comme un plan horizontal, P et S comme des plans verticaux. Nous pouvons

appliquer, pour construire la projection S, la méthode très-simple de l'article **59**. Les projetantes sur le plan P ne sont pas, il est vrai, perpendiculaires à ce plan, mais elles sont parallèles à R, et la distance d'une projection à la ligne de terre YY_1 indique bien la hauteur du point dans l'espace au-dessus du plan horizontal R.

Nous avons diminué toutes les hauteurs, sur le plan S, d'une longueur égale à AA″.

Par suite des symétries que nous avons pu introduire sur les figures, les côtés du quadrilatère gauche (A″B″C″D″, ABCD) ont deux à deux une même projection sur le plan S; les points de division coïncident aussi deux à deux, et par suite les différentes génératrices des deux systèmes se superposent.

Un point m, sommet de l'un des losanges élémentaires de la figure R, a par rapport à A″C″ une position symétrique d'un autre sommet m_1; les génératrices qui passent par l'un de ces points se confondent, en projection sur le plan S, avec les génératrices qui passent par l'autre; la corde mm_1 de l'espace est donc projetée sur un seul point m'; de là résulte qu'elle est perpendiculaire au plan A″C″ et coupée par lui en deux parties égales comme sa projection mm_1. D'ailleurs on peut disposer la figure de manière qu'un point quelconque donné sur la surface soit au sommet de l'un des losanges; le plan A″C″ perpendiculaire à R est donc *principal*, c'est-à-dire qu'il partage en deux parties égales les cordes de la surface qui lui sont perpendiculaires.

605. La construction des projections des génératrices sur le plan T perpendiculaire à R, et passant par la diagonale B″D″ du losange, se fait de la même manière et donne lieu aux mêmes considérations. Le plan T est donc un second plan principal, et le paraboloïde a ainsi deux plans principaux rectangulaires entre eux, contenant l'axe, et parallèles aux plans bissecteurs des angles des deux plans directeurs.

Un troisième plan principal (s'il pouvait exister) couperait au moins un des premiers, et l'intersection serait un axe de la surface; mais, comme le paraboloïde n'a qu'un axe (art. **595**), le nouveau plan principal devrait contenir cette ligne. Maintenant, si l'on remarque que les sections par des plans perpendiculaires aux deux plans directeurs sont des hyperboles (art. **593**), on verra que les plans déterminés par les axes de ces courbes sont seuls principaux.

606. Deux génératrices qui sur le plan R se croisent en un point n de A″C″ ont une même projection verticale sur S; leur plan est donc perpendiculaire à S, et le point n où il touche la surface appartient au contour apparent sur ce plan. L'enveloppe des projections des génératrices sur le plan S est donc précisément la section de la surface par le plan A″C″ qui contient l'axe, c'est-à-dire une parabole (art. **600**).

Le contour apparent sur le plan T est également une parabole, section de la

surface par le plan B″D″. Quand l'angle des plans directeurs est droit, ces deux paraboles sont évidemment superposables, et le paraboloïde est *isoscèle*. Dans le cas général, lorsque les plans directeurs ne sont pas rectangulaires, les *paraboles principales* ont des paramètres inégaux, et le paraboloïde est *scalène*.

Cônes et cylindres circonscrits. Courbes d'ombre.

607. Considérons une parabole section du paraboloïde par un plan parallèle à l'axe (*fig.* 277), un de ses diamètres Ax, les tangentes SM et SM′ issues d'un point de cette droite, et la sécante de contact MM′ polaire du point S : on sait que cette droite est parallèle à la tangente en A, et que les segments SA et AP sont égaux.

Si le plan tourne autour de Ax, il coupera la surface suivant des paraboles de différents paramètres, mais les polaires du point S passeront toujours par le point P, et, comme elles doivent être parallèles au plan tangent en A, elles formeront un plan qui est le *plan polaire* du point S.

L'intersection de la surface par le plan polaire est le lieu des points de contact des tangentes issues du point S, et par conséquent la courbe de contact du cône circonscrit qui a son sommet au point S; cette ligne est une hyperbole, parce que le plan est parallèle aux génératrices qui se croisent en A.

En résumé, *la courbe de contact d'un cône circonscrit à un paraboloïde est une hyperbole située dans un plan parallèle à celui qui touche la surface au point où elle est rencontrée par le diamètre qui passe au sommet du cône. Les segments interceptés sur le diamètre entre le sommet, la surface et le plan de la courbe de contact sont égaux.*

608. Quand le sommet S est sur le paraboloïde, le point P se confond avec lui, et la courbe de contact se compose de deux génératrices. Pour comprendre comment il peut y avoir une ligne d'ombre quand le point lumineux est sur la surface, il faut concevoir qu'elle recouvre un corps opaque, qui sera, par exemple, du côté noir (*fig.* 288). Un point lumineux placé en (O″, O‴, O^{IV}) n'éclairera pas les points B^{IV} et D^{IV}, tandis qu'il enverra librement des rayons aux points A‴ et C‴.

609. Si une sécante d'un paraboloïde se transporte parallèlement à elle-même jusqu'à devenir tangente, les deux points situés sur la surface se confondront avec le point milieu qui est dans le plan diamétral conjugué à sa direction (art. **596**). *La courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un paraboloïde est donc située dans le plan diamétral conjugué avec la direction des génératrices du cylindre :* c'est par conséquent une parabole, car tous les plans diamétraux sont parallèles à l'axe.

On arrive au même résultat en remarquant que, quand le point S s'éloigne

indéfiniment sur la tangente MS (*fig.* 277), le point M′ s'éloigne aussi sur la parabole, et qu'à la limite la droite MM′ est parallèle à l'axe.

On voit que la courbe d'ombre d'un paraboloïde est toujours plane.

Diverses générations du paraboloïde.

610. *La surface déterminée par trois directrices rectilignes* A, A′, A″, *qui sont parallèles à un plan* P (*fig.* 281) *et dont deux quelconques ne se trouvent pas dans un même plan, est un paraboloïde,* car les droites A, A′ et A″ appartiennent à un paraboloïde dont le plan P est directeur et qui a pour directrices deux génératrices quelconques B et B′ de la surface; les droites qui rencontrent les directrices données sont donc les génératrices du second système de ce paraboloïde.

Les droites A, A′, A″ déterminent sur B et B′ des segments que l'on peut considérer comme interceptés par trois plans parallèles. On a donc

$$\frac{E''E'}{F''F'} = \frac{E'E}{F'F}.$$

Il résulte de là que, au lieu de donner un plan P auquel la génératrice doit rester parallèle, on peut assigner deux de ses positions A et A′, et l'assujettir à se mouvoir de manière à intercepter sur les directrices B et B′ des segments E″E′ et F″F′ proportionnels à E′E et F′F.

611. Si les droites B et B′ sont projetées sur un plan quelconque (*fig.* 285), en portant sur leurs projections B_1 et B'_1 une suite de longueurs respectivement égales aux projections des segments EE′ et FF′ (*fig.* 281), et joignant les points de division, nous aurons les projections des génératrices parallèles au plan P, qui sont aussi celles de l'autre système, car chacun de leurs plans projetants contient deux droites de la surface (art. **592**).

L'enveloppe des projections des génératrices est le contour apparent du paraboloïde ou la trace du cylindre circonscrit perpendiculaire au plan de projection, et par conséquent une parabole (art. **609**). Le point de tangence de l'une des droites est la projection du point où le plan projetant dont elle est la trace touche la surface et où les deux génératrices qu'il contient se croisent.

Nous avons ponctué la *fig.* 285, en ne considérant les diverses droites que comme des projections de génératrices parallèles au plan P.

Quand le plan de projection est perpendiculaire au plan directeur parallèle à B et à B′ (*fig.* 281), les projections B_1 et B'_1 (*fig.* 285) sont parallèles, et les génératrices du système P sont projetées suivant des droites convergentes. La figure se trouve par conséquent disposée comme les projections obliques P ou Q (*fig.* 288), mais le point de concours n'est pas la projection du sommet.

612. Si nous prenons sur les directrices B et B′ (*fig.* 281) deux points fixes

quelconques b et b', en appelant x et x' les longueurs bE″ et b'F″, et k le rapport de E′E à F′F, l'équation de l'article **610** deviendra

$$\frac{b\mathrm{E}' - x}{b'\mathrm{F}' - x'} = k,$$

d'où, en désignant par g le binôme $(k \times \overline{b'\mathrm{F}'} - \overline{b\mathrm{E}'})$ qui est constant, ainsi que k, lorsque l'on suppose que la génératrice A″ est seule mobile,

$$x - kx' + g = 0.$$

Cette équation détermine les positions successives de la génératrice, et, toutes les fois qu'il y aura sur deux directrices rectilignes des séries de points liées par une relation de cette forme, les droites passant par les points qui se correspondent formeront un paraboloïde, car il suffit de déplacer l'origine b de la longueur g pour que les segments mesurés sur les deux directrices soient proportionnels.

Un second paraboloïde qui aurait les mêmes directrices B et B′ serait déterminé par une équation analogue du premier degré

$$x - k_1 x' + g_1 = 0.$$

Il y aura toujours un système de valeurs de x et de x' qui satisferont à ces équations, et, par conséquent, *deux paraboloïdes qui ont deux directrices rectilignes communes se coupent suivant une génératrice*, de sorte que leur intersection se compose de trois droites. On doit de plus considérer comme appartenant aux deux surfaces la droite qui passe par les points situés à l'infini sur les directrices.

CHAPITRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES GAUCHES.

Raccordement des surfaces gauches. Paraboloïdes de raccordement. Paraboloïdes normaux.

613. On dit que deux surfaces se raccordent le long d'une courbe commune lorsqu'elles ont les mêmes plans tangents en tous les points de cette ligne. Une surface qui se raccorde avec une autre peut être considérée comme lui étant inscrite ou circonscrite.

Deux surfaces gauches qui ont les mêmes plans tangents en trois points m, n et p d'une génératrice commune G *se raccordent le long de cette droite.*

Si nous coupons les surfaces par trois plans passant respectivement par les points *m*, *n* et *p* (*fig.* 278), nous aurons trois couples de courbes tangentes A et A′, B et B′, C et C′ que nous pourrons considérer comme des directrices. Si la génératrice se meut en glissant sur les courbes A, B et C de la première surface, elle s'éloignera progressivement des lignes A′, B′ et C′; mais, dans sa position infiniment voisine de G, on devra la considérer comme les rencontrant encore, parce qu'elles sont respectivement tangentes aux premières. Les deux surfaces ont donc deux génératrices consécutives communes, et leurs sections par un plan quelconque ayant en commun deux points situés sur ces droites ont la même tangente, ce qui démontre la proposition énoncée.

614. *Deux surfaces gauches se raccordent le long d'une génératrice commune* G *lorsqu'elles ont les mêmes plans tangents en deux points m et n de cette ligne, et que leurs cônes directeurs* C *et* C′ *ont des plans tangents parallèles le long des génératrices correspondantes g et g′.*

On peut considérer les surfaces comme déterminées par des couples de directrices A et B pour l'une, A′ et B′ pour l'autre, respectivement tangentes aux points *m* et *n* (*fig.* 289), et par des cônes directeurs tangents le long d'une droite *g*, parallèle à G. Lorsque la génératrice se meut sur la première surface, en glissant sur les courbes A et B, elle s'éloigne progressivement de la seconde, mais elle lui appartient encore dans sa position infiniment voisine de G, parce qu'elle rencontre les lignes A′ et B′ qui sont respectivement tangentes à A et à B, et qu'elle est parallèle à une génératrice du cône C qui, étant infiniment rapprochée de *g*, se trouve sur le second cône. Nous sommes donc conduit aux mêmes conséquences qu'à l'article précédent.

Quand les surfaces considérées ont un même cône directeur ou un même plan directeur, il suffit, pour qu'elles se raccordent le long d'une génératrice commune, qu'elles aient les mêmes plans tangents en deux points de cette droite.

615. *Si l'on coupe une surface gauche par une série de plans parallèles à un plan donné* Q, *les tangentes de toutes les sections aux points situés sur une même génératrice formeront un paraboloïde.*

La surface gauche dont trois de ces tangentes *m*R, *n*S et *p*T (*fig.* 283) sont les directrices est un paraboloïde (art. **610**) qui a les mêmes plans tangents que la surface aux points *m*, *n* et *p*, et qui par conséquent se raccorde avec elle le long de la génératrice G. Tout plan parallèle à Q coupera ce paraboloïde suivant une droite tangente à la section correspondante de la surface, ce qui démontre le théorème énoncé.

Le paraboloïde a en commun avec la surface la génératrice G et une autre génératrice infiniment voisine; le second plan directeur P du paraboloïde est

parallèle à ces deux droites ou au plan tangent du cône directeur de la surface gauche, le long de la génératrice parallèle à G. Le plan P est encore parallèle au plan qui passe par la génératrice G et qui est tangent au paraboloïde (ou à la surface avec laquelle il se raccorde), au point de cette droite situé à l'infini (art. **592**). On voit ainsi que *les plans tangents du cône directeur sont respectivement parallèles aux plans passant par les différentes génératrices de la surface gauche et tangents à l'infini.*

616. Il résulte de ce qui précède qu'*une surface gauche a le long d'une génératrice quelconque une infinité de paraboloïdes de raccordement. Un de leurs plans directeurs est le plan tangent du cône directeur le long de la génératrice parallèle;* l'autre est parallèle aux plans sécants, et par suite complétement arbitraire. On peut le prendre perpendiculaire au premier dans une infinité de positions, et en conséquence la surface admet, le long de chaque génératrice, une infinité de paraboloïdes isoscèles de raccordement.

617. Si un plan contient une génératrice, sa courbe d'intersection avec la surface rencontrera cette droite, car elle a un point sur chacune des autres génératrices, si rapprochées qu'elles soient de celle qui est dans le plan. Au point de rencontre, le plan contiendra la tangente de l'intersection et la génératrice; il sera donc tangent.

La considération des paraboloïdes de raccordement conduit à un résultat analogue et montre de plus comment le point de contact se déplace quand le plan tourne autour de la génératrice (art. **592**).

En résumé, *tout plan contenant une génératrice d'une surface gauche est tangent en un point; la courbe suivant laquelle il coupe la surface passe par le point de contact; s'il fait une rotation de* 180° *autour de la génératrice, le point de contact parcourra la longueur indéfinie de cette droite. Dans aucune position, le plan n'est tangent en deux points.*

La courbe de contact d'un cône circonscrit avec une surface gauche est le lieu des points de tangence des plans qui passent par le sommet donné et par les différentes génératrices; cette courbe a par conséquent un point sur chacune de ces droites.

618. Si une surface gauche est algébrique et de l'ordre n, sa section par un plan contenant une génératrice rencontrera cette droite en $(n-1)$ points réels ou imaginaires; l'un d'eux est celui où le contact a lieu : il est mobile quand le plan tourne; les autres sont des points doubles de la surface, car, s'ils étaient simples, chacun d'eux serait un point de contact et le plan toucherait la surface en plus d'un point de la génératrice. On voit ainsi qu'une surface gauche de l'ordre n a sur chaque génératrice $(n-2)$ points doubles, ou plutôt des points multiples représentant $(n-2)$ points doubles.

619. Les paraboloïdes de raccordement deviennent normaux quand on les fait

tourner de 90° autour de la génératrice. *Une surface gauche admet* donc *une infinité de paraboloïdes normaux le long de chaque génératrice : un de leurs plans directeurs est le plan normal du cône directeur le long de la génératrice parallèle, l'autre peut être pris arbitrairement.*

On peut considérer un paraboloïde normal comme engendré par une droite qui se meut de manière à rencontrer la génératrice considérée G de la surface gauche, à être parallèle à un plan arbitraire Q et à se trouver successivement dans les différents plans passant par G et normaux à la surface. Ces plans étaient tangents avant la rotation.

Il y a une infinité de paraboloïdes normaux isoscèles.

620. Nous aurons souvent à considérer le paraboloïde normal pour lequel le plan directeur Q est perpendiculaire à la génératrice G : chaque génératrice de ce paraboloïde est l'intersection de deux plans normaux à la surface, l'un parallèle à Q, l'autre contenant G; elle est donc normale. De là ce théorème : *Les normales à une surface gauche aux différents points d'une génératrice forment un paraboloïde.* Nous l'appellerons *paraboloïde des normales;* il est évidemment isoscèle.

Point central d'une génératrice. Ligne de striction. Paramètre de distribution des plans tangents.

621. *On appelle point central d'une génératrice le pied de la commune perpendiculaire à cette droite et à la génératrice voisine, ou la limite des positions du pied de la commune perpendiculaire à la droite considérée et à une autre génératrice, lorsque celle-ci, se rapprochant de la première, vient se confondre avec elle.* Le lieu des points centraux des génératrices est la *ligne de striction* de la surface ([1]).

Soient G et G′ deux génératrices d'une surface gauche, AB leur plus courte distance, et Ag' une droite parallèle à G′ (*fig.* 284).

Si nous concevons que des différents points de G′ on abaisse des perpendiculaires sur G, ces droites formeront un paraboloïde dont les plans directeurs seront l'un Q perpendiculaire à G, l'autre P parallèle à G et à G′. On peut prendre pour ce dernier le plan des droites G et g'.

Les diamètres du paraboloïde qui passent par les différents points a, a_1, a_2, ... de G sont les droites an, $a_1 n_1$, ..., intersections du plan P avec des plans parallèles à Q (art. 594). Toutes ces droites sont perpendiculaires à G, et celle qui passe par le point A est de plus perpendiculaire à la génératrice AB du second système, car cette ligne, par sa définition, est perpendiculaire à P. Le dia-

([1]) Les expressions de *point central* et de *ligne de striction* sont de M. Chasles; celle de *plan central* que nous employons plus loin est de M. Bour.

mètre AN rencontre donc normalement le paraboloïde en A, et est l'axe de cette surface (art. **595**).

Si nous supposons que la génératrice G′ se meuve sur la surface gauche en se rapprochant de G, le paraboloïde se modifiera et à la limite se raccordera avec elle : son sommet A sera alors le point central de la génératrice G.

Les génératrices du système Q sont perpendiculaires à G; par conséquent, si nous faisons tourner le paraboloïde de 90° autour de cette ligne, de tangentes elles deviendront normales à la surface gauche; mais dans ce mouvement le sommet ne change pas : donc *le point central d'une génératrice est le sommet du paraboloïde des normales*.

622. Appelons

θ l'angle des plans BAX et baX tangents au paraboloïde aux points A et a;

σ l'angle des génératrices G et G′ qui est égal à eAX;

x l'abscisse Aa d'un point considéré a;

p la longueur de la commune perpendiculaire AB.

Les triangles abe et eaA rectangles l'un en e, l'autre en a, donnent

$$\operatorname{tang} eba = \frac{ae}{eb} = \frac{x \operatorname{tang} \sigma}{p}.$$

Les droites AB et eb étant parallèles, l'angle eba est égal à celui des lignes AB et ab, et par suite à θ, car les droites AB et ab sont respectivement situées dans les plans tangents considérés et perpendiculaires à leur intersection AX. Nous avons donc

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{x \operatorname{tang} \sigma}{p}.$$

Supposons maintenant que G′ se rapproche de G, et appelons k la limite du rapport $\frac{p}{\operatorname{tang} \sigma}$; nous aurons

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{x}{k}. \tag{1}$$

Nous appellerons *plan central* celui qui passe par la génératrice considérée et par la commune perpendiculaire à cette droite et à la génératrice voisine, et *obliquité* d'un plan tangent l'angle θ compris entre ce plan et le plan central de la génératrice du point de contact.

L'équation (1) montre que *la tangente de l'obliquité d'un plan tangent en un point d'une génératrice est proportionnelle à l'abscisse de ce point, mesurée à partir du point central* [1].

En faisant x nul, on reconnaît que *le plan central est tangent au point central;* cela résulte d'ailleurs de la définition de ce plan.

---

[1] M. Chasles : *Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite*, p. 54 (*Correspondance mathématique et physique*, t. XI).

La formule montre encore que *les plans tangents en deux points d'une génératrice situés de part et d'autre du point central et à égales distances ont des obliquités égales et de sens opposé*, et que *le plan central et le plan tangent à l'infini sont rectangulaires*.

623. Nous avons désigné par k la limite du rapport $\frac{p}{\tan\sigma}$; par suite, si l'on regarde p et σ comme représentant la distance de la génératrice considérée à celle qui lui est infiniment voisine et l'angle de ces deux droites, on aura simplement

$$k = \frac{p}{\sigma}. \tag{2}$$

Le rapport des grandeurs infiniment petites p et σ est une longueur finie que nous appellerons *paramètre de distribution des plans tangents aux divers points de la génératrice*, ou plus simplement *paramètre de la génératrice*.

L'équation (1) montre que l'on peut définir le paramètre d'une génératrice *la distance du point central au point où l'obliquité du plan tangent est de* 45°.

Nous considérerons toujours le paramètre k comme positif quand, en plaçant l'œil en un point de la génératrice et en regardant dans la direction de cette droite d'un côté ou de l'autre, on verra le plan tangent tourner dans le même sens que les aiguilles d'une montre que l'on aurait devant soi, lorsque le point de contact s'éloignera du côté où l'on regarde.

624. En appelant x' et θ' l'abscisse d'un second point de la génératrice et l'obliquité du plan qui est tangent en ce point à la surface, on a

$$\tan\theta \tan\theta' = \frac{xx'}{k^2}.$$

Les deux plans seront à angle droit lorsque le produit des tangentes des angles θ et θ' sera égal à l'unité négative. Nous voyons alors que, *quand deux plans contenant une même génératrice sont rectangulaires, leurs points de contact se trouvent situés de part et d'autre du point central et à des distances de ce point dont la moyenne géométrique est égale au paramètre de la génératrice*.

Le premier plan étant normal au point où le second est tangent, on peut énoncer ce théorème en disant que, *lorsqu'un plan contient une génératrice d'une surface gauche, le produit des distances au point central des deux points où il est tangent et normal est constant et égal au carré du paramètre* [1].

625. Nous allons maintenant considérer deux surfaces gauches ayant une génératrice commune XY (*fig.* 292). Nous appelons

k et k' les paramètres de cette droite dans les deux surfaces;

---

[1] M. Chasles : *Journal de M. Liouville*, t. II, p. 413.

a la distance des points centraux A et A';

x l'abscisse AM d'un point considéré M;

θ et θ' les obliquités des plans tangents des deux surfaces en M;

η l'angle que forme le plan central de la deuxième surface avec celui de la première;

ε l'angle du plan tangent de la deuxième surface en M avec celui de la première au même point.

Le plan de la figure est le plan central de la première surface. Nous supposons qu'un second plan perpendiculaire à la génératrice XY est rabattu sur celui-là par une rotation autour de sa trace MZ, de manière que sa partie antérieure se trouve amenée à la droite de MZ. Les lignes Mn, Mn' et Mc' sont les traces, sur ce nouveau plan, des plans tangents en M et du plan central de la deuxième surface.

D'après la convention que nous avons faite à l'article **623**, les paramètres k et k' sont positifs pour les surfaces auxquelles se rapporte la *fig.* 292, et, les abscisses étant mesurées positivement de A vers Y, l'équation (1) donne des valeurs positives pour θ et θ'. Les angles ε et η sont positifs, car, d'après leur définition et les dispositions de la figure, le sens dans lequel on doit les mesurer est le même que celui des angles positifs θ et θ'.

Nous avons

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{x}{k},$$

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{x-a}{k'},$$

d'où

$$\operatorname{tang}(\theta'-\theta) = \frac{(k-k')x - ak}{kk' + x^2 - ax}.$$

Ordonnant par rapport à x^2 et observant que la différence $(\theta'-\theta)$ est égale à $(\varepsilon-\eta)$, on a

$$x^2\operatorname{tang}(\varepsilon-\eta) - x[k-k'+a\operatorname{tang}(\varepsilon-\eta)] + [ak + kk'\operatorname{tang}(\varepsilon-\eta)] = 0.$$

L'équation est du second degré; par conséquent, il existe deux points où l'angle ε des surfaces a une valeur donnée. Ces points d'ailleurs peuvent se confondre ou devenir imaginaires.

Si l'angle ε a une même valeur en trois points différents, l'équation doit être satisfaite quelle que soit l'abscisse x, et l'on a

$$\eta = \varepsilon, \quad k = k', \quad a = 0;$$

par conséquent, *quand deux surfaces gauches se coupent sous un même angle en plus de deux points d'une génératrice commune, l'angle qu'elles comprennent aux*

différents points de cette droite est constant, et la génératrice a un même paramètre et un même point central, quand on la considère comme appartenant à l'une ou à l'autre de ces surfaces.

626. On peut résoudre par des constructions et des considérations géométriques très-simples les questions relatives aux angles compris entre deux surfaces gauches qui ont une génératrice commune.

A chaque point central A et A′ (*fig.* 268) élevons à la génératrice GX, et dans un même plan, deux perpendiculaires AE, A′E′ respectivement égales aux paramètres k et k', et joignons les points E et E′ à un point quelconque M de GX : les angles AEM, A′E′M sont les valeurs de θ et de θ' pour le point M, et par conséquent leur différence EME′ est $(\varepsilon - \eta)$. D'après cela, lorsque l'angle η sera connu, si l'on veut déterminer le point où les surfaces comprennent un angle d'une grandeur donnée ε, on décrira sur EE′ un segment capable de l'angle $(\varepsilon - \eta)$; les points cherchés seront ses intersections avec la génératrice : on en trouvera généralement deux, M et M_1.

Si l'angle $(\varepsilon - \eta)$ était négatif, on tracerait le segment capable de l'autre côté de la corde EE′, et l'on obtiendrait deux points m et m_1 tels que la direction des segments Nm et Nm_1 serait celle des abscisses négatives.

Si du point N nous menons une tangente à l'un des cercles, sa longueur Nq sera moyenne proportionnelle entre les segments NE et NE′. En portant cette longueur sur NX, on aura un point P tel, que le cercle qui passerait par les points E, E′ et P toucherait NX en ce dernier point. L'angle EPE′ est évidemment la plus grande valeur de $(\varepsilon - \eta)$. L'angle EpE′, obtenu en portant la longueur Nq sur NG′, est le maximum absolu des valeurs négatives de $(\varepsilon - \eta)$.

On voit d'après cela que les surfaces se couperont en deux points sous un angle donné ε, si $(\varepsilon - \eta)$ est positif et plus petit que EPE′, ou négatif et d'une grandeur absolue plus petite que EpE′.

Au point N l'angle $(\varepsilon - \eta)$ est nul, et les surfaces comprennent un angle égal à celui que font les plans centraux ou les plans tangents au point commun situé à l'infini [1].

627. Quand les paramètres k et k' sont de signe différent, on doit les porter de côtés opposés de la génératrice GX (*fig.* 269). La construction du reste est la même : un cercle qui passe par E et par E′ détermine sur la génératrice deux points M et M_1 où les surfaces se coupent sous une même inclinaison. En ayant égard aux signes des angles, on trouve que la valeur de $(\theta' - \theta)$ est — EME′ pour

---

[1] Les points M et M_1 où les deux surfaces se coupent sous un même angle forment sur la génératrice deux divisions du genre de celles que M. Chasles a appelées *divisions homographiques en involution* (*Géométrie supérieure*, p. 121 et 167). P et p sont les *points doubles*, et N le *point central* des divisions. Les points où deux plans contenant une génératrice d'une surface gauche, et perpendiculaires l'un à l'autre, touchent cette surface (art. 624) forment également deux divisions homographiques en involution.

le point M, et + E′M₁E pour le point M_1 : ces angles sont supplémentaires et de sens contraire; par suite, leur différence algébrique est de 180°, mais cette différence est égale à celle des deux valeurs de ε en M et en M_1 ; les plans tangents en ces deux points ont donc une même position relative.

Quand les paramètres sont de signe contraire, quelle que soit la valeur de ε, on trouve sur la génératrice deux points où les surfaces se coupent sous cet angle.

628. Lorsque deux génératrices G et G′ de deux surfaces gauches A et A′ ont des paramètres égaux, on peut placer ces surfaces de manière qu'elles se touchent le long des lignes G et G′, confondues en une seule droite. Alors, si, A restant fixe, on fait tourner A′ de 180° autour de la normale commune au point central, il y aura encore raccordement, car les plans tangents situés de part et d'autre du point central et à égales distances ont des obliquités égales et de sens opposé. Ensuite, si, considérant la surface A′ dans sa première position et dans celle que nous venons de lui donner, on la fait tourner de 180° autour de la génératrice commune, les plans tangents aux divers points de cette droite accompliront une demi-révolution qui les ramènera à leurs positions premières. Les surfaces A et A′ peuvent donc se raccorder le long des génératrices G et G′ dans quatre positions relatives différentes.

Si A′ est le paraboloïde formé par les tangentes aux sections faites dans A par des plans perpendiculaires à G, la rotation de 180° autour de la normale au point central amènera chaque génératrice tangente à une position précédemment occupée par une autre génératrice, et la rotation autour de G ne changera pas la position d'une génératrice tangente considérée comme une droite indéfinie. La surface A et le paraboloïde A′ placé successivement dans ses quatre positions de raccordement ne formeront donc qu'un seul système géométrique.

Sommets et arêtes.

629. Nous appellerons *sommets* d'une surface gauche les points singuliers où deux génératrices consécutives G et G′ se rencontrent. Le plan déterminé par ces droites est tangent tout le long de G; cependant la largeur de l'élément superficiel, qui dans ce cas est $x\sigma$ au point dont l'abscisse est x, devient nulle au sommet, qui est évidemment le point central, et l'on ne voit pas si le plan des génératrices est tangent en ce point à la surface.

La distance p de la génératrice G à la génératrice voisine G′ étant nulle, le paramètre k est également nul d'après l'équation (2) : la formule (1) donne par suite une obliquité indéterminée pour le plan tangent au sommet et une obliquité de 90° pour les plans tangents à tous les autres points de la génératrice.

Afin d'éclaircir cette question, nous allons rechercher comment se modifient les positions du plan tangent aux divers points d'une génératrice, quand le paramètre k diminue indéfiniment.

630. Supposons qu'aux différents points d'une génératrice, et dans un même plan, on élève à cette droite des perpendiculaires égales aux cotangentes de l'angle θ : en considérant ces perpendiculaires comme des ordonnées correspondantes aux abscisses mesurées sur la génératrice à partir du point central, nous obtiendrons une courbe dont l'équation sera

$$xy = Rk,$$

R étant le rayon du cercle par rapport auquel la cotangente de l'angle θ a une longueur y.

Cette ligne est une hyperbole dont les asymptotes sont la génératrice et la droite qui lui est perpendiculaire au point central. Lorsque le paramètre k est petit, les branches de l'hyperbole sont rapprochées de ces droites, ce qui indique que le plan tangent accomplit presque entièrement sa demi-révolution de 180° (art. **617**) quand le point de contact parcourt une petite longueur près du point central, et qu'au delà, sur presque toute la longueur de la génératrice, les plans tangents diffèrent peu du plan tangent à l'infini. A la limite, quand le paramètre est nul, l'hyperbole se confond avec ses asymptotes, le point central est un sommet, et le plan tangent fait son évolution complète quand le point de contact y est parvenu ([1]).

Tous les points de la seconde asymptote ont une abscisse nulle; cela indique que tous les plans contenant la génératrice qui passe au sommet doivent être considérés comme tangents en ce point, quelle que soit leur inclinaison sur le plan central. Nous verrons cependant que l'un d'eux a, en général, un contact plus intime que les autres avec la surface. Nous nous bornerons ici à examiner ce qui se passe sur les développables.

631. Sur une développable à arête de rebroussement, une génératrice rencontre la génératrice qui lui est infiniment voisine au point où elle touche l'arête. Chaque point de cette courbe est donc un sommet; nous savons que la développable y a une infinité de plans tangents, mais que le plan de rebroussement a un contact plus intime avec la surface (art. **442**).

([1]) M. Bour a remarqué le premier que l'on devait considérer le plan tangent d'une surface gauche en un point de la génératrice qui passe à un sommet comme faisant une rotation de 180° pendant que son point mobile de contact est au sommet (*Théorie de la déformation des surfaces*, art. 22).

Nous avons emprunté à M. Bour les dénominations de *sommets* et d'*arêtes*, mais, ainsi qu'il le dit, nous avons le premier signalé l'importance de ces points et de ces droites dans l'étude des courbes d'ombre des surfaces gauches.

Le paramètre k est infiniment petit du second ordre pour les génératrices d'une développable à arête de rebroussement, car, lorsque l'angle σ de deux génératrices est infiniment petit du premier ordre, leur distance p est infiniment petite du troisième (art. **485**). Lorsque, dans la question dont on s'occupe, il n'y a pas lieu de considérer des infiniment petits de différents ordres, on doit regarder le paramètre des génératrices des surfaces développables comme nul.

632. Considérons une surface gauche déterminée par trois directrices A, B et C : les génératrices qui passent par un point m de A sont les intersections de deux cônes qui ont leurs sommets en ce point, et respectivement pour directrices les courbes B et C. Ces cônes peuvent se couper suivant plusieurs génératrices ou ne pas avoir d'autre point commun que leur sommet; il en résulte qu'une directrice considérée dans toute son étendue géométrique est composée, en général, d'arcs multiples et d'arcs parasites.

Les deux cônes auxiliaires qui ont leur sommet commun en un point limite sont tangents et déterminent deux génératrices consécutives qui se coupent : *un point limite est donc un sommet.*

Quelquefois le nombre de génératrices qui se croisent en chaque point de la directrice diminue de deux unités, sans que cette courbe devienne parasite. Ainsi, quand les lignes B et C sont du second ordre, la directrice A peut avoir des arcs quadruples, des arcs doubles et des arcs parasites : tous les points limites sont des sommets.

633. Réciproquement, *si les directrices n'ont ni inflexion ni rebroussement, tout sommet est l'extrémité de l'arc utile d'une ligne double.*

Pour le prouver, considérons la surface donnée par trois directrices A, B et C (*fig.* 293) dont les rayons de courbure ne sont ni nuls ni infinis, et supposons que la génératrice G rencontre en I la génératrice qui lui est infiniment voisine : les deux cônes qui ont leur sommet en ce point, et respectivement pour directrices les courbes A et B, se touchent le long de G, et si l'on transporte successivement leur sommet commun à une distance infiniment petite dans deux directions opposées et d'ailleurs quelconques, le résultat de l'un de ces déplacements sera de séparer les cônes, et celui de l'autre de les faire se pénétrer suivant deux droites situées de part et d'autre de G.

Prenons arbitrairement sur une génératrice G′ infiniment voisine de G un point e situé à une distance infiniment petite de I : les deux cônes qui ont leur sommet en e, et respectivement pour directrices A et B, se coupent suivant G′ et une autre droite $em''n''$, qui, en général, ne sera pas une génératrice de la surface, parce qu'elle ne rencontrera pas la directrice C. Mais si le sommet e des cônes se meut sur G′ en restant toujours à une distance infiniment petite de I, la droite $em''n''$ décrira une surface, et dans une certaine position elle coupera C. Soit alors E la position de e : deux génératrices passent par E, et la ligne IE est double; elle

devient parasite au delà de I, car les cônes se sépareraient si leur sommet glissait sur elle dans cette direction.

634. Une surface gauche étant supposée éclairée par un point lumineux, le contour de son ombre sur un plan quelconque est l'enveloppe des ombres de ses génératrices (art. **435**). Si deux génératrices consécutives G et G′ se coupent en un point I, leurs ombres g et g' se rencontreront sur l'ombre i de I, et le point i appartiendra au contour de l'ombre portée; le sommet I sera donc un point de la ligne d'ombre propre.

Chacune des droites g et g' touche la courbe d'ombre portée en un point, et par suite la courbe d'ombre propre a deux points distincts sur les génératrices G et G′; comme d'ailleurs le point de rencontre I est l'un des deux, cette courbe y est tangente à G. Nous avons par conséquent ce théorème :

Toute ligne d'ombre et de contour apparent d'une surface gauche passe par chaque sommet et y est tangente à la génératrice.

En considérant les surfaces développables comme formant une variété de surfaces gauches, on voit que leurs lignes d'ombre et de contour apparent doivent comprendre, outre un certain nombre de génératrices, l'arête de rebroussement qui est une ligne de sommets.

635. Si l'on suppose qu'un sommet s'éloigne sur la génératrice et disparaisse à l'infini, cette droite deviendra parallèle à la génératrice infiniment voisine et sera asymptote de toutes les courbes de contact des cônes et des cylindres circonscrits. Par conséquent, en appelant *arêtes* les génératrices qui sont respectivement parallèles à celles qui leur sont infiniment voisines, nous avons ce théorème :

Les arêtes d'une surface gauche sont asymptotes de toutes les courbes d'ombre et de contour apparent.

Le point d'une arête situé à l'infini est un sommet et par conséquent l'extrémité de l'arc utile d'une ligne double, mais cette courbe peut n'avoir que ce point à l'infini ou y être tout entière. De là deux dispositions que nous étudierons plus loin. Nous supposons toujours que les directrices n'ont ni inflexions ni rebroussements.

636. Quand une génératrice G est parallèle à la génératrice voisine G′, un même plan est tangent tout le long de cette droite, et l'on ne peut déterminer la position du point central qu'en le considérant comme appartenant à la ligne de striction. Ce point peut être à une distance finie ou à l'infini : dans le premier cas, p reste un infiniment petit de premier ordre, et, comme σ est nul, la formule (2) montre que k est infini; dans le second, les génératrices se rencontrent au point central; par conséquent, p devient nul comme σ, et l'équation (2) ne donne aucune indication sur la valeur de k. Nous verrons plus loin, en étudiant diverses surfaces, comment on peut reconnaître quelle est alors la valeur du paramètre (art. **655**, **663**, **669**, **677**); nous nous bornerons, quant à présent, à remar-

quer que l'asymptote de l'arête de rebroussement d'une développable est une génératrice parallèle à la génératrice voisine, et que son paramètre est nul, comme celui de toutes les autres génératrices de la surface.

Un sommet à distance finie est nécessairement le point central d'une génératrice dont le paramètre est nul (art. **630**); mais un sommet à l'infini peut être distinct du point central de l'arête, qui est déterminé par la ligne de striction, et se trouve quelquefois à distance finie.

637. On ne peut considérer une ligne de striction et des paramètres sur un cylindre que quand il fait partie d'une série de surfaces réglées. S'il appartient à un système de cônes ayant une même directrice et un sommet mobile sur une droite, on devra regarder que sa ligne de striction est à l'infini et que les paramètres sont nuls. S'il dépend d'un système d'hyperboloïdes de révolution ayant même centre et même axe, et dans lesquels le rayon du cercle de gorge et l'angle de la génératrice avec l'axe sont liés par une certaine loi, pour la continuité la ligne de striction aura une position déterminée à distance finie, et les paramètres seront infinis.

638. Le point où la ligne d'ombre d'une surface gauche rencontre une génératrice s'éloigne à l'infini dans trois circonstances différentes : 1° lorsque le plan tangent de la surface au point situé à l'infini sur la génératrice contient le point lumineux; 2° quand la génératrice est tout entière à l'infini; 3° quand la génératrice est une arête. Les courbes d'ombre des surfaces gauches ont donc des branches infinies de trois espèces différentes.

Développable asymptote.

639. Supposons qu'on trace sur une surface gauche une courbe Ω qui ait un point sur chaque génératrice, et considérons la développable Σ circonscrite le long de cette courbe, c'est-à-dire enveloppe des plans tangents aux différents points de Ω. Si l'on conçoit que la courbe Ω se modifie de telle sorte que tous ses points glissent sur les génératrices et arrivent ensemble à l'infini, la développable Σ se trouvera tangente tout le long d'une courbe située à l'infini, c'est-à-dire asymptote.

La *développable asymptote* étant l'enveloppe des plans tangents à l'infini, ses génératrices sont respectivement parallèles aux génératrices du cône directeur qui est enveloppe de plans parallèles à ceux-là (art. **615**). La développable asymptote a donc ses génératrices parallèles à celles de la surface; on dit qu'elle est *directrice*.

CHAPITRE III.

CONOIDE.

Propriétés générales. Retour sur le paraboloïde.

640. Lorsqu'une surface réglée a un plan directeur, si elle est développable, deux génératrices consécutives quelconques étant dans un même plan et parallèles à un autre plan sont parallèles, et la surface est un cylindre. Par conséquent, *toute surface réglée à plan directeur qui n'est pas un cylindre est gauche.*

On appelle *conoïde général* ou simplement *conoïde* la surface gauche qui a un plan directeur. Le cône directeur de la surface se réduit à ce plan.

Le paraboloïde ayant un plan directeur dans chacun de ses deux systèmes de génération rectiligne peut être considéré comme un conoïde de deux manières différentes.

641. Nous avons reconnu que tout plan contenant une génératrice d'une surface gauche et tangent au point de cette droite situé à l'infini est parallèle au plan tangent du cône directeur le long de la génératrice correspondante (art. **615**); il suit de là que *tous les plans tangents d'un conoïde aux points situés à l'infini sont parallèles au plan directeur, et que ce plan est directeur de tous les paraboloïdes de raccordement comme de la surface elle-même.* Nous voyons de plus qu'*un conoïde n'a pas de développable asymptote,* parce que tous les plans dont cette surface est l'enveloppe sont parallèles.

Une surface réglée et son cône directeur sont coupés suivant une même ligne par un plan situé à l'infini (art. **466**); un conoïde a donc une directrice rectiligne située à l'infini dans son plan directeur.

642. Les droites sur lesquelles se mesurent les plus courtes distances entre deux génératrices consécutives d'un conoïde sont des tangentes perpendiculaires aux génératrices (art. **622**) et par suite au plan directeur; elles forment un cylindre circonscrit à la surface le long de la ligne de striction; par conséquent, *la ligne de striction d'un conoïde est le contour apparent de cette surface par rapport à son plan directeur, et sa projection orthogonale sur ce plan est l'enveloppe des projections des génératrices.*

Nous ajouterons que *les plans centraux de toutes les génératrices sont perpendiculaires au plan directeur,* ce qui résulte d'ailleurs immédiatement des considérations présentées à l'article **641**.

643. Un paraboloïde a une ligne de striction pour chacun de ses deux systèmes de génératrices. Sur la *fig.* 288, nous avons pris un nouveau plan de projection U

parallèle au plan directeur Q du paraboloïde, et par conséquent perpendiculaire au plan R que nous considérons comme horizontal (art. **603**). La ligne de terre A^vC^v, intersection des plans R et U, est parallèle à YZ_1. L'enveloppe $i'j'$ des projections orthogonales des génératrices sur le plan U est la projection de la ligne de striction du système Q.

La ligne de striction elle-même est une parabole située dans le plan diamétral conjugué aux cordes perpendiculaires au plan Q (art. **609**). Les deux génératrices *ab* et *eh* qui se croisent au sommet O″ sont horizontales : la droite *ae*, perpendiculaire à YZ_1 et limitée à ces génératrices, est donc la projection d'une corde perpendiculaire à Q, et par conséquent son point milieu *f* appartient au plan de la ligne de striction; mais ce plan, étant diamétral, doit être perpendiculaire au plan R (art. **596**); le point *f* appartient donc à sa trace sur R. Nous avons déterminé de la même manière un second point *g* de cette trace.

En relevant sur les droites A^vD^v et C^vB^v les points *i* et *j* où la trace *fg* coupe les génératrices A″D″ et C″B″, nous avons les extrémités *i′* et *j′* de l'arc de la parabole représenté sur la projection U.

On obtiendrait de la même manière les projections de la ligne de striction du système P. Ces deux paraboles se croisent au sommet O″, car le plan tangent en ce point est perpendiculaire à l'axe, et par conséquent à chacun des plans directeurs.

Il résulte de la construction même que le plan de la parabole de striction du système P fait avec le plan directeur P le même angle que le plan de la parabole de striction Q avec le plan directeur Q, d'où l'on conclut que *les plans principaux sont bissecteurs des plans des paraboles de striction*, et que *ces paraboles sont égales*.

Si le paraboloïde était isoscèle, les deux projections faites sur les plans P et Q seraient orthogonales, et par suite les génératrices qui se projettent aux points O et O′ couperaient respectivement à angle droit les génératrices des systèmes P et Q; chacun de leurs points serait donc le point central de la génératrice sur laquelle il se trouve.

Nous voyons ainsi que les *lignes de striction* du paraboloïde isoscèle sont les génératrices qui se croisent au sommet.

Plans tangents et lignes d'ombre.

644. Un conoïde étant donné par deux directrices A et B, et un plan directeur P (*fig.* 294), on obtient un paraboloïde de raccordement le long d'une génératrice G, en prenant pour directrices les tangentes R et S, et le plan P pour plan directeur (art. **614**). Pour construire le plan tangent H en un point μ de G, il suffit de connaître la génératrice du second système qui passe à ce point. On y parvient en déterminant d'abord une génératrice G′ du premier système, et

menant ensuite par μ un plan parallèle à R et à S; ce plan coupe la droite G′ en un point μ' de la génératrice cherchée.

Si, au contraire, on veut connaître le point de contact d'un plan H contenant une génératrice G, après avoir construit comme précédemment une génératrice G′, on cherchera son intersection μ' avec le plan donné. La génératrice du second système contenue dans le plan H passe par le point μ' et est dans un plan parallèle aux tangentes R et S; on peut donc la déterminer : le point de contact μ est son point de rencontre avec G.

Nous allons développer les constructions que nous venons d'indiquer, en disposant les données de manière à simplifier le problème.

645. Nous prenons le plan directeur pour plan vertical, et nous supposons la surface déterminée par deux directrices planes A et B (*fig.* 297) situées dans des plans verticaux xy et x_1y_1 que nous supposons rabattus sur le plan horizontal. Le point pour lequel on doit construire le plan tangent est donné par sa projection horizontale μ.

La droite Jμ parallèle à la ligne de terre XY est la projection horizontale de la génératrice qui passe par le point considéré. Cette droite rencontre les directrices en des points dont les projections horizontales m et n font trouver les rabattements M et N; on détermine ensuite leurs projections verticales m' et n' (art. **59**). La projection verticale μ' du point de la surface est sur la droite m' n'.

Le paraboloïde qui a pour directrice les tangentes Me et NF des courbes A et B aux points M et N, et pour plan directeur le plan vertical, se raccorde avec la surface le long de la génératrice (mn, $m'n'$). Le plan horizontal étant perpendiculaire au plan directeur du premier système, les projections horizontales des génératrices du second système divergent d'un même point (art. **611**); et, comme nous connaissons deux d'entre elles xy et x_1y_1, projections des tangentes directrices Me et NF, nous avons immédiatement le point de concours L et nous pouvons tracer la projection horizontale Lμ de la génératrice du second système qui passe par le point donné.

Le paraboloïde coupe le plan vertical suivant la droite qui passe par les traces E′ et C′ des tangentes directrices; la trace verticale de la génératrice Lμ est en G′ sur cette ligne; il n'y a plus qu'à faire passer un plan par la droite (mn, $m'n'$) et par le point (G, G′) : sa trace verticale est la droite I′K parallèle à $m'n'$.

Les données peuvent être disposées d'une manière différente, mais les constructions devront toujours être établies sur les mêmes principes.

646. Si l'on demande le point de tangence d'un plan contenant une génératrice (mn, $m'n'$) et ayant une trace verticale I′K nécessairement parallèle à $m'n'$, on déterminera comme précédemment la trace verticale E′C′ du paraboloïde de raccordement qui a pour directrices les tangentes Me et NF, et pour plan directeur le plan vertical. L'intersection G′ des droites E′C′ et I′K sera la trace de la

seconde génératrice contenue dans le plan donné. On cherchera la projection horizontale GL de cette droite, et son intersection (μ, μ') avec la génératrice mn, $m'n'$) sera le point de contact demandé.

Cette construction donne un moyen facile d'obtenir la courbe d'ombre de la surface. Après avoir choisi un certain nombre de génératrices convenablement espacées, on détermine la trace I'K d'un plan passant par l'une d'elles (mn, $m'n'$) et par le point lumineux (S, S'), et l'on cherche son point de contact (μ, μ'). On répète ensuite cette opération sur les autres génératrices.

647. La courbe d'ombre ne rencontre qu'à l'infini les génératrices dont les projections horizontales passent par le point S, car le plan qui contient une de ces droites et le point lumineux est parallèle au plan directeur, et par conséquent tangent à l'infini (art. **641**).

La courbe a aussi des branches infinies correspondant aux arêtes et aux génératrices situées tout entières à l'infini.

Si la droite (mn, $m'n'$) était une arête, le paraboloïde de raccordement se transformerait en un plan, et sa trace E'C' serait parallèle à la projection $m'n'$ de la génératrice et à la trace I'K du plan d'ombre; les points G', G et μ disparaîtraient donc à l'infini, comme cela doit être.

Lorsque le point lumineux est dans le plan tangent le long d'une arête, cette droite forme une branche de la courbe de contact. Nous examinerons plus loin ce cas intéressant (art. **828** et suiv.)

Quand les rayons de lumière sont parallèles entre eux, mais non au plan directeur, les plans d'ombre des génératrices ne peuvent pas être tangents à l'infini, et les arêtes sont les seules génératrices à distance finie qui ne rencontrent la courbe qu'à l'infini; elles lui sont d'ailleurs asymptotes (art. **635**). On peut donc obtenir leur position d'une manière approximative en construisant avec soin l'ombre que projetterait sur un plan la surface éclairée par des rayons parallèles entre eux, mais non au plan directeur, et traçant les asymptotes de cette courbe. On peut aussi employer des courbes d'erreur disposées de diverses manières.

648. Pour déterminer les points d'un conoïde où le plan tangent est parallèle à un plan donné P, on construit le contour apparent de la surface sur le plan directeur pris pour plan de projection, et, menant à cette courbe des tangentes parallèles à la trace du plan P, on obtient les projections des génératrices parallèles à ce plan; on fait passer par chacune d'elles un plan parallèle à P, et l'on cherche son point de contact.

Cylindroïde.

649. Considérons un cylindre parallèle à la ligne de terre XY (*fig.* 298), coupons-le par deux plans verticaux OP et Op; puis supposons que, la seconde section

restant immobile, la première $(AG, A''G'')$ s'élève parallèlement à elle-même, de manière que le point (A, A'') se place en (A, A') : si une droite mobile rencontre constamment les deux courbes en des points situés précédemment sur une même génératrice du cylindre, elle engendrera une surface que Frézier a appelée *cylindroïde*. Cette surface a quelques applications dans la coupe des pierres.

Les génératrices du cylindroïde sont parallèles au plan vertical, et d'ailleurs inégalement inclinées; cette surface est donc un conoïde (art. **640**).

650. Tout plan passant par l'intersection des plans des directrices, tel que (Ol, ll'), coupe le cylindroïde et le cylindre primitif suivant deux courbes identiques, car un point (L, L'') appartenant à une génératrice $(Bb, B''b')$ du cylindre est élevé de (L, L'') en (L, L'), et l'on a

$$L''L' = B''B'\frac{Lb}{Bb}.$$

$B''B'$ est égal à $A''A'$ et le rapport $\frac{Lb}{Bb}$ est constant pour les différentes génératrices; donc tous les points de la section faite dans le cylindre sont élevés d'une même hauteur, et la courbe est transportée sans altération.

Dans un cylindroïde elliptique (c'est celui qui résulte de la déformation d'un cylindre elliptique), toutes les sections faites par des plans passant par l'intersection des plans des directrices sont des ellipses. Sur la *fig.* 298, la section droite du cylindre est le cercle Ω rabattu sur le plan horizontal. Ce cercle nous a servi à construire et à diviser les ellipses directrices.

La section par le plan $(OI, \alpha'_1\alpha')$, perpendiculaire à la ligne de terre, est identique avec le cercle Ω. Le segment $\alpha'_1\alpha'$, limité au contour apparent, est donc égal au diamètre d'_1d', et ses extrémités α'_1 et α' sont sur les génératrices $d'_1D'_1$ et $d'D'$.

651. On peut obtenir la tangente au point L' de la section par le plan Ol, soit en construisant la tangente en L'' à la section du cylindre par le même plan et l'élevant parallèlement à elle-même, soit en recourant au paraboloïde de raccordement déterminé par le plan directeur de la surface et par les tangentes des directrices aux points (B, B') et (b, b'). Dans la première méthode, nous construisons la trace horizontale Qq du plan tangent au cylindre le long de la génératrice $B''b'$, puis la trace verticale l'' de la tangente au point L'', et nous élevons l'' en l' d'une hauteur égale à $L''L'$. Dans la seconde, nous remarquons que les projections horizontales des génératrices du deuxième système du paraboloïde passent toutes par le point O, et que par suite celle de ces droites qui se projette sur Ol est la tangente de la section. La trace verticale l' de cette droite est sur la trace $P'p'$ du paraboloïde.

La position spéciale du plan sécant rend ainsi la construction de la tangente très-simple. Dans le cas général, il faudrait déterminer le plan tangent à la sur-

face (art. **645**) et prendre ensuite son intersection avec le plan de la courbe.

652. *Les sections du cylindroïde et du cylindre primitif par un plan vertical sont équivalentes*, car les éléments dans lesquels on peut concevoir ces aires décomposées par des droites verticales infiniment rapprochées ne diffèrent que de quantités infiniment petites d'un ordre élevé. Il suit de là que *les sections du cylindroïde par des plans verticaux et parallèles sont équivalentes*.

653. Sur le cylindre primitif, chaque génératrice est parallèle à la génératrice voisine; mais ces droites, étant inégalement distantes de la verticale du point O, sont, après la déformation, inégalement inclinées; cependant la génératrice (Gg, $G'g'$) et celle qui en est infiniment rapprochée sont à la même distance de cette verticale, et par suite elles restent parallèles sur le cylindroïde.

La droite (Gg, $G'g'$) est donc une arête; il en de même de (Aa, $A'a'$). Ces génératrices forment le contour apparent de la surface sur le plan horizontal et sont asymptotes du contour apparent sur le plan vertical.

Les autres génératrices sont parallèles deux à deux de part et d'autre de chaque arête, et leurs intersections mutuelles déterminent une ligne double qui est la droite située à l'infini dans le plan directeur (art. **641**). Les extrémités du segment utile de cette ligne sont sur les arêtes (art. **632**).

En général, une surface a deux plans tangents en chaque point d'une ligne double; mais, dans le cas que nous examinons, deux génératrices parallèles sont telles, que le plan tangent au point de l'une situé à l'infini contient l'autre, parce qu'elles sont à la même distance du plan directeur. Il en résulte que la ligne double située à l'infini est une ligne de contact.

On peut rendre cette circonstance sensible en coupant le cylindroïde par un plan oblique sur le plan directeur et parallèle à deux génératrices qui seront, par exemple, fF' et $f'_1F'_1$: la section aura deux branches infinies, et l'intersection du plan sécant par le plan vertical Ff sera asymptote de ces deux branches.

La courbe de section de la surface par un plan contenant une génératrice a cette droite pour asymptote ([1]).

Un cylindroïde n'a pas de sommets à distance finie, car si deux génératrices consécutives se coupaient, leurs homologues sur le cylindre se rencontreraient au point correspondant.

654. La ligne de striction contour apparent de la surface par rapport au plan vertical (art. **642**) est facilement déterminée, sur ce plan, comme enveloppe des projections des génératrices. Pour avoir sa projection horizontale, il faut chercher par un paraboloïde de raccordement le point où le plan qui projette verticalement

---

(1) On reconnaît facilement que le cylindroïde de la *fig*. 298 est une surface algébrique du quatrième ordre; chaque génératrice passe par conséquent par deux points doubles (art. 618). Ces points sont réunis l'un à l'autre à l'infini.

chaque génératrice considérée touche la surface. On pourrait, il est vrai, rapporter sur la projection horizontale de la génératrice le point où sa projection verticale est tangente à l'enveloppe, mais la position de ce point est trop incertaine pour que l'on puisse s'en servir si l'on veut mettre un peu d'exactitude dans les tracés.

Si nous considérons la génératrice (Ee, $E'e'$), nous remplacerons les deux directrices courbes par leurs tangentes (EP, $E'P_1$), (ep, $e'p_1$). La trace du paraboloïde ainsi obtenu sur le plan vertical, qui est toujours plan directeur, sera la droite P_1p_1. La génératrice du deuxième système contenue dans le plan projetant de la génératrice considérée a sa trace verticale à l'intersection r' des droites P_1p_1 et $E'e'$. Sa projection horizontale est déterminée par le point r et par le point de concours O des droites de ce système; le point μ, où elle rencontre la ligne Ee, est la projection horizontale du point où le plan qui projette la génératrice sur le plan vertical touche le paraboloïde, et par suite le cylindroïde. La ligne de striction a d'ailleurs deux branches infinies dont les arêtes sont les asymptotes; elle passe par les points (α, α'), (α, α'_1) : sa projection est la courbe $\mu\alpha\delta\ldots\beta\alpha\varepsilon\ldots\gamma\mu$.

655. En général, pour déterminer le paramètre d'une génératrice d'une surface gauche, on cherche le point de contact d'un plan qui fait un angle de 45 degrés avec le plan central, et l'on détermine la vraie grandeur du segment compris entre ce point et le point central. Puis, si l'on veut avoir l'expression du paramètre, on fait la traduction analytique des constructions. Mais, dans le cas des conoïdes, le calcul peut se faire d'une manière directe et très-simple.

Appelant σ l'angle que fait avec le plan horizontal la génératrice considérée (Bb, $B'b'$) du cylindroïde, et p l'ordonnée OH qui est la distance de la génératrice à la verticale du point O, nous aurons

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{B''B'}{bB} = \frac{A''A' \times O\alpha}{dD}\,\frac{1}{p}$$

ou

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{g}{p},$$

en représentant par g le premier facteur du second membre, qui est constant.

La distance de deux génératrices consécutives et leur angle sont les différentielles dp et $d\sigma$; le paramètre k étant le rapport de ces grandeurs infiniment petites (art. **624**), on obtient par une différentiation

$$k = -\frac{p^2}{g\cos^2\sigma};$$

enfin, éliminant σ entre ces deux équations,

$$k = -\frac{g^2+p^2}{g}.$$

On remarquera que le paramètre ne dépend pas de la forme des directrices, qu'il n'est jamais nul, et qu'il ne devient infini que quand une génératrice s'éloigne à l'infini. Sur notre cylindroïde il est toujours fini, et à cet égard les arêtes ne se distinguent des autres génératrices que parce que leur paramètre est un maximum ou un minimum.

D'après la convention faite à l'article **623**, le paramètre d'une génératrice du cylindroïde représenté sur la *fig.* 298 est positif. Pour établir l'accord entre cette convention et la formule, il suffit de considérer les ordonnées $O\alpha$ et $A''A'$ comme positives, et la projection dD qui est dirigée de droite à gauche comme négative, car alors la longueur g sera négative.

656. Si le cylindre primitif était un plan P, le cylindroïde serait un paraboloïde dont le second plan directeur serait le plan P, et dont le sommet se projetterait horizontalement en O; l'équation de l'article précédent est donc applicable au paraboloïde. Elle montre que toutes les génératrices d'un même système ont des paramètres de même signe, que celle de ces droites qui passe au sommet a le plus petit paramètre, et que deux génératrices situées de part et d'autre du sommet et à des distances égales ont un même paramètre.

Conoïde oblique.

657. On appelle *conoïde oblique* le conoïde qui a une directrice rectiligne non perpendiculaire au plan directeur.

Un conoïde oblique étant déterminé par son plan directeur P et deux directrices D et C, dont la première est rectiligne, il est facile de voir que par chaque point de C passe une génératrice intersection de deux plans, l'un parallèle à P et l'autre contenant D : la directrice curviligne C ne peut donc avoir ni arc double ni arc parasite. Il suit de là qu'on peut prendre pour seconde directrice une courbe tracée sur la surface de manière à rencontrer toutes les génératrices et d'ailleurs quelconque. Nous choisirons pour directrice la trace de la surface sur un plan perpendiculaire au plan directeur, que nous supposerons horizontal.

658. Les directrices étant la droite (qF, q'F$'$) et la courbe A$'$B$'$ située dans le plan vertical (*fig.* 296), on obtient des génératrices en coupant ces lignes par des plans horizontaux et joignant les points de section. Quand la trace du plan sécant est, telle que I$'$L$'$J$'$, comprise entre les tangentes horizontales P$'p'$ et Q$'q'$, on trouve deux génératrices (LI, L$'$I$'$) et (LJ, L$'$J$'$); mais, si le plan était au-dessus du point P$'$ ou au-dessous de Q$'$, il ne contiendrait pas de génératrices : le segment (pq, $p'q'$) de la directrice rectiligne est donc seul utile, et par suite ses extrémités (p, p') et (q, q') sont des sommets.

Lorsqu'une génératrice se meut pour passer d'une position à la suivante, on

peut supposer qu'elle glisse sur la directrice rectiligne et sur la tangente à la directrice courbe, en restant d'ailleurs toujours horizontale. En général, elle s'élève ou elle s'abaisse, et par suite deux génératrices consécutives sont à des hauteurs différentes et ne se rencontrent pas. Mais, la tangente au point P′ étant horizontale, la génératrice passe de la position (Pp, P′p') à la suivante par un simple mouvement de rotation autour du point (p, p'), et par suite deux génératrices consécutives se coupent en ce point. On peut faire la même observation pour le sommet (q, q').

Quand la directrice rectiligne et la tangente de la directrice courbe sont dans un même plan, la génératrice reste parallèle à elle-même dans un mouvement infiniment petit, et dans le cas contraire elle décrit un élément gauche. On voit d'après cela que la tangente de la directrice courbe A′B′I′ au point situé sur une arête doit rencontrer la directrice rectiligne (Fq, F′q'), ce qui exige qu'elle passe par sa trace verticale F′. Les génératrices (AM, A′M′) et (BN, B′N′), qui rencontrent la courbe au point de contact des tangentes issues de F′, sont donc des arêtes, et les seules arêtes que la surface puisse avoir.

659. Si au lieu d'une directrice courbe on donnait une surface à laquelle le conoïde dût être circonscrit, on obtiendrait des génératrices en faisant des sections par des plans horizontaux et menant à chacune d'elles des tangentes du point de son plan situé sur la directrice rectiligne.

En raisonnant comme précédemment, on reconnaît que les plans tangents horizontaux à la surface directrice contiennent les génératrices qui passent aux sommets et que les points de contact des plans tangents menés par la directrice rectiligne appartiennent aux arêtes.

660. Une courbe d'ombre peut avoir des branches infinies dépendant de la position du point lumineux (S, S′) (*fig.* 296), en outre de celles qui correspondent aux arêtes (art. **638**).

Tous les plans tangents à l'infini étant parallèles au plan directeur sont horizontaux; la droite menée par le point S′ parallèlement à la ligne de terre est la trace du seul plan horizontal qui contienne le point lumineux. La courbe d'ombre a donc deux branches infinies du premier genre (art. **638**) ; elles correspondent aux génératrices qui ont leurs traces en I′ et en J′.

661. Si les rayons de lumière sont parallèles entre eux et verticaux ou inclinés, aucun des plans d'ombre des génératrices n'est tangent à l'infini. S'ils sont horizontaux, tous les plans d'ombre touchent la surface à l'infini, et ceux des génératrices (Pp, P′p'), (Qq, Q′q') sont de plus tangents aux divers points de ces droites, car nous avons vu que chacune d'elles, pour passer à la position voisine sur la surface, décrivait un élément horizontal plan en tournant autour du sommet. La ligne d'ombre pour des rayons horizontaux se compose ainsi d'une courbe située à l'infini et des génératrices (Pp, P′p'), (Qq, Q′q'). Rien ne distingue ici

les arêtes des autres génératrices, parce que la courbe dont elles sont asymptotes disparaît à l'infini.

662. La solution que nous avons exposée à l'article **648** pour le problème du plan tangent parallèle à un plan donné se simplifie beaucoup pour le conoïde oblique.

Les génératrices parallèles au plan donné (P, P') (*fig.* 300) sont parallèles à sa trace P et se trouvent dans le plan (GE, EF') mené par la directrice rectiligne (GF, G'F') parallèlement à la droite P. Les traces verticales de ces génératrices sont donc aux points A' et B', où la trace EF' de ce dernier plan rencontre la seconde directrice qui est dans le plan vertical. Les génératrices parallèles au plan donné sont par conséquent les droites (AM, A'M') et (BN, B'N'). Pour achever la solution, il faut faire passer par chacune d'elles un plan parallèle à (P, P'); on détermine ensuite chaque point de contact à l'aide d'un paraboloïde de raccordement (art. **646**).

663. On peut trouver l'équation aux paramètres par un calcul analogue à celui de l'article **655**.

Nous plaçons l'origine en un point quelconque O de la ligne de terre X_1X (*fig.* 296); nous prenons pour axes les droites rectangulaires OX, OY et OZ : les deux dernières sont respectivement dans les deux plans coordonnés. Si nous appelons X, Y, Z et α, β, γ les coordonnées courantes de la directrice droite et de la directrice courbe, nous pourrons représenter ces lignes par les équations

$$\begin{cases} X = m(Z - v) + u, \\ Y = n(Z - v), \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma = f(\alpha), \\ \beta = 0. \end{cases}$$

Les lettres u et v représentent l'abscisse OF et l'ordonnée FF' de la trace verticale F' de la directrice rectiligne; m et n sont des coefficients.

Désignant par σ l'angle formé avec la ligne de terre par la génératrice qui est à la hauteur γ, nous avons

$$\operatorname{tang} \sigma = \frac{n(\gamma - v)}{m(\gamma - v) + u - \alpha}.$$

Différentiant, éliminant σ et écrivant k à la place de $\frac{d\gamma}{d\sigma}$, nous obtenons

$$k = \frac{1}{n} \frac{n^2(\gamma - v)^2 + [m(\gamma - v) - (\alpha - u)]^2}{(\gamma - v) - (\alpha - u)\frac{d\gamma}{d\alpha}} \frac{d\gamma}{d\alpha};$$

k est nul en même temps que $\frac{d\gamma}{d\alpha}$, et par conséquent quand la tangente de la direc-

trice curviligne est horizontale; il est infini quand on a

$$(\gamma - v) - (\alpha - u)\frac{d\gamma}{d\alpha} = 0.$$

Cette équation exprime que la tangente de la directrice curviligne au point considéré passe par la trace verticale F′ de la directrice rectiligne. Le paramètre d'une arête de la surface est donc infini.

664. *Représentation d'un conoïde oblique circonscrit à un cercle.* — Sur la *fig.* 299, nous avons représenté par seize génératrices un conoïde oblique dont les directrices sont le cercle A′I′ situé dans le plan vertical AI et la droite (N_1N,N'_1N′). Les génératrices toutes horizontales sont disposées de manière à intercepter des arcs égaux sur le cercle.

D'après ce que nous avons vu (art. **658**), pour déterminer les arêtes, il faut mener des tangentes à la directrice curviligne du point où la droite (N_1N, N'_1N′) perce le plan vertical AI. Ce point, situé à la rencontre des lignes TT′ et N'_1N′, étant éloigné, nous avons fait une réduction d'échelle (art. **66**), en prenant le point O pour centre de similitude : le rapport est celui de 4 à 1. Les points T′ et J′ ont ainsi été transportés en t et j au quart de leur distance du point O. La construction a fait trouver les points de contact p' et q', qui, ramenés en P′ et Q′ sur le cercle primitif, déterminent les arêtes (PR, P′R′) et (QS, Q′S′).

De part et d'autre de ces droites, les génératrices sont parallèles deux à deux en projection horizontale et dans l'espace. La directrice rectiligne que la surface possède à l'infini (art. **641**) est donc une ligne double, comme dans le cas du cylindroïde; mais c'est une ligne d'intersection et non de contact, car le plan de deux génératrices parallèles n'est pas parallèle au plan directeur, et par suite la surface a deux plans tangents distincts au point situé à l'infini où ces droites se rencontrent [1].

Les points (N, N′) et (N_1, N'_1) sont des sommets.

665. La projection horizontale de la ligne de striction est donnée immédiatement comme enveloppe des projections des génératrices. On détermine par points la projection verticale de cette courbe à l'aide de paraboloïdes. La construction est analogue à celle que nous avons expliquée à l'article **654** pour le cylindroïde.

Considérons la génératrice (FM, F′M′); il suffit de remplacer la directrice courbe par la tangente (FU, F′U′) pour changer le conoïde en un paraboloïde de raccordement. La trace vU de cette surface auxiliaire sur le plan horizontal xy rencontre en u la trace du plan qui projette horizontalement la génératrice et qui par suite touche la surface au point central de cette droite. La projection

---

[1] Nous verrons que la surface est algébrique et du quatrième degré; chaque génératrice a donc deux points doubles (art. 618) : l'un est sur la directrice rectiligne, l'autre à l'infini.

verticale de la génératrice du second système du paraboloïde est déterminée par le point u' relevé de u et par le point de concours ε (art. **641**, **645**); elle fait trouver le point de contact δ'. La projection verticale de la ligne de striction est $N'\delta'I' \ldots N'_1 A' \ldots d'N'$.

666. Quand une courbe continue tracée sur une surface gauche passe à un sommet, ce point appartenant au contour apparent de la surface par rapport à un plan quelconque, la projection de la courbe y est tangente à la projection de la génératrice ou possède un rebroussement; la courbe elle-même a donc un rebroussement dans l'espace lorsqu'elle n'est pas tangente à la génératrice.

Nous avons limité le conoïde de la *fig.* 299 au plan vertical $N_1 d$ qui passe au sommet inférieur. D'après ce que nous venons de dire, la trace de la surface a un rebroussement en ce point; la tangente au rebroussement est l'intersection du plan sécant $N_1 d$ avec le plan déterminé par la génératrice $(EN_1, E'_1 N'_1)$ et par la directrice $(N_1 N, N'_1 N')$. Nous avons obtenu le point l' de cette ligne en prenant pour plan horizontal de construction celui qui contient le point (L, L').

Un même plan est tangent le long de la génératrice $(EN_1, E'_1 N'_1)$ depuis le point situé à l'infini jusqu'au sommet (N_1, N'_1) qui est le point central; là le plan tangent tourne subitement jusqu'à la position déterminée par la directrice rectiligne. Au delà, le plan revient de la même manière à sa première position en achevant une rotation de 180 degrés. Si l'on parvient au point (N_1, N'_1) en suivant sur la surface une direction non tangente à la génératrice, la position du plan tangent se modifiera d'une manière graduelle.

Par des considérations analogues à celles que nous avons présentées à l'article **442**, nous appellerons *plan de rebroussement* le plan qui contient les tangentes aux rebroussements des sections qui passent à un sommet ([1]).

Un sommet est un point de rebroussement isolé. On trouve des points de même nature sur des surfaces de tout genre quand deux génératrices consécutives se coupent ou quand une génératrice curviligne se trouve avoir subitement un rebroussement.

667. *Équation du conoïde oblique circonscrit à une conique. Génération de cette surface par des coniques.* — Il est facile d'obtenir une équation du conoïde, même en supposant que le cercle (AI, A'I') soit remplacé par une conique située d'une manière quelconque par rapport au plan directeur. Nous nous servirons de la *fig.* 296 en ne faisant aucune hypothèse sur l'angle des plans de projection qui sont le plan directeur et celui de la conique directrice.

([1]) L'expression de *plan de rebroussement* est due à M. Bour; mais, comme il l'indique, c'est nous qui lui avons signalé l'existence d'un plan contenant les tangentes aux rebroussements des différentes sections et l'analogie qui résulte de cette circonstance entre un sommet d'une surface gauche et un point de l'arête de rebroussement d'une développable.

Nous plaçons l'origine à la trace F′ de la directrice rectiligne (qp, $q'p'$). Nous prenons pour axe des abscisses l'horizontale $F'x$ située dans le plan de la conique, pour axe des z la droite $F'z$ parallèle au diamètre Q′P′ qui dans la conique est conjugué aux cordes horizontales, et enfin pour axe des y la droite (Fy, $F'x$), intersection du plan horizontal passant par l'origine avec le plan qui contient la directrice rectiligne et l'axe des z.

Nous pouvons représenter les directrices par les équations

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = nz, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{(x-x_1)^2}{a^2} + \dfrac{(z-z_1)^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

x_1 et z_1 sont les coordonnées du centre de la conique, a et c les moitiés de ses diamètres parallèles aux axes.

On obtient pour la projection horizontale de l'une des deux génératrices qui sont à la hauteur z l'équation

$$y - nz = \frac{-nz}{x_1 + a\sqrt{1 - \dfrac{(z-z_1)^2}{c^2}}}\,x.$$

Si l'on regarde le radical comme affecté du double signe, cette équation représentera les deux génératrices qui sont à une hauteur quelconque z, et par suite le conoïde lui-même. En la mettant sous la forme d'un polynôme entier, on obtient

$$a^2(y-nz)^2[c^2-(z-z_1)^2] - c^2[yx_1 + nz(x-x_1)]^2 = 0.$$

Considérons maintenant un plan contenant l'axe des abscisses; nous pouvons le représenter par l'équation

$$y = \alpha z.$$

L'équation de la projection verticale de l'intersection du conoïde par ce plan se divise en deux :

$$z^2 = 0, \quad a^2(\alpha - n)^2[c^2 - (z-z_1)^2] - c^2[\alpha x_1 + n(x-x_1)]^2 = 0.$$

La seconde est du deuxième degré, et par conséquent tout plan passant par l'axe des abscisses coupe la surface suivant une conique. Le conoïde admet ainsi un mode de génération par des lignes du second ordre; l'ellipse directrice P′Q′ et le segment utile de la directrice rectiligne appartiennent à la série de ces courbes.

La première des deux équations que nous avons obtenues représente deux fois la droite $F'x$, qui cependant paraît être étrangère à la surface. Pour expliquer ce résultat, nous remarquerons que, si le point F′ se trouvait placé entre les horizontales $P'p'$ et $Q'q'$, la droite $F'x$ rencontrerait deux fois l'ellipse directrice et serait

une génératrice double, intersection de deux nappes de la surface; tout plan contenant cette droite aurait un point de contact avec chaque nappe et couperait le conoïde suivant une conique qui passerait à ces points. La droite $F'x$ ne dépend en aucune manière de la position que la conique directrice occupe dans son plan; elle est donc encore une génératrice double quand elle ne rencontre pas cette courbe en des points réels, mais elle est alors éloignée des autres génératrices, de sorte qu'elle fournit un point isolé à toute section de la surface par un plan qui ne la contient pas et qui ne passe pas par la directrice rectiligne.

Par des motifs analogues, la verticale du point O est une génératrice isolée sur le cylindroïde de la *fig.* 298. Cette circonstance montre pourquoi tout plan passant par cette ligne coupe suivant une conique la surface proprement dite, bien qu'elle soit du quatrième ordre (art. **650**).

Une génératrice simple n'est jamais isolée, parce que son point unique de rencontre avec une directrice curviligne ne peut pas devenir imaginaire. Il y a une grande analogie entre une génératrice isolée et les segments parasites d'une directrice (¹).

668. Nous avons représenté sur la *fig.* 299 une des sections elliptiques du conoïde; pour cela, nous avons pris un second plan vertical de projection perpendiculaire au premier, et nous y avons placé la projection $N''_1 N''$ de la directrice rectiligne. Tout plan perpendiculaire à ce plan vertical et dont la trace passe par le point de rencontre des droites $N''_1 N''$ et $V\lambda$ coupe la surface suivant une conique. Pour avoir la trace $\varphi''_1\varphi''$ d'un tel plan, il suffit de diviser la ligne de terre $N''_1 V$ et sa parallèle $N''\lambda$ en parties proportionnelles. Nous avons établi sur de petites longueurs les nouvelles projections verticales des génératrices, et, ramenant sur le plan horizontal les points de rencontre de ces droites avec $\varphi''_1\varphi''$, nous avons obtenu des points de la projection horizontale de l'ellipse d'intersection. Nous avons ensuite construit la projection verticale de cette courbe.

Les tangentes de l'ellipse sont horizontales aux points (φ, φ') et (φ_1, φ'_1), où elle rencontre les génératrices supérieure et inférieure; la droite $(\varphi\varphi_1, \varphi'\varphi'_1)$ est donc le diamètre conjugué aux cordes horizontales, et, comme elle est partagée en parties égales par le plan horizontal OJ', on voit que le diamètre qui lui est conjugué a pour projections $\psi'\chi'$ et $\psi\chi$.

Les diamètres qui sont conjugués aux cordes horizontales des sections du second ordre faites dans le conoïde forment un paraboloïde, car ils rencontrent

(¹) On peut démontrer très-facilement qu'un conoïde droit circonscrit à une conique Δ située dans un plan perpendiculaire au plan directeur, est coupé suivant une conique par tout plan parallèle à celui de Δ, et, en faisant une déformation homologique dans des conditions convenables, on obtient le théorème général relatif aux sections du second ordre du conoïde oblique. On peut même l'établir directement pour cette dernière surface, mais ces modes de démonstration ne font pas suffisamment ressortir la nature de la droite que nous avons prise pour axe des abscisses.

trois droites horizontales : les génératrices (EN_1, E'_1 N'_1), (EN, E'N') et la commune intersection des plans des coniques.

Conoïde droit.

669. On appelle *conoïde droit* le conoïde qui a une directrice rectiligne perpendiculaire à son plan directeur.

Sur la *fig.* 290, le plan horizontal est pris pour plan directeur, et la surface est donnée par sa trace verticale A et par le point *d*, projection horizontale de sa directrice rectiligne que l'on appelle quelquefois son *axe*.

En menant à la directrice A des tangentes verticales, on détermine les traces *b'* et *c'* des arêtes. Ces droites forment le contour apparent de la surface par rapport au plan horizontal.

L'axe *d* rencontre à angle droit toutes les génératrices et est par conséquent la ligne de striction de la surface. Le point central d'une arête est donc à distance finie; son paramètre est infini (art. **636**).

670. On obtient facilement l'intersection d'une surface réglée avec un cône en faisant passer un plan auxiliaire par chaque génératrice considérée et par le sommet du cône; mais souvent les intersections des surfaces réglées entre elles et avec les surfaces de révolution ne peuvent être déterminées qu'à l'aide de sections planes auxiliaires construites par points. Toutefois, lorsqu'il s'agit de deux conoïdes ayant un même plan directeur, ou d'un conoïde et d'une surface de révolution placés de manière que l'axe de celle-ci soit perpendiculaire au plan directeur de celui-là, en coupant les deux surfaces par des plans parallèles au plan directeur, on obtient des droites ou des cercles faciles à déterminer.

671. *Conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde.* — Pour présenter un exemple de cette construction, nous allons déterminer l'intersection d'un conoïde droit avec un tore elliptique de même axe.

Nous prenons pour plan horizontal de projection celui du cercle décrit par le centre de l'ellipse méridienne (*fig.* 301). L'axe commun des surfaces s'y projette en un point O. Nous traçons sur un plan méridien OX_1, rabattu sur le plan horizontal, la moitié supérieure P*v'*Q de l'ellipse qui engendre le tore.

Le conoïde a pour directrice curviligne la ligne dans laquelle se transforme l'ellipse A'V'B' lorsque l'on enroule son plan sur le cylindre vertical dont la trace horizontale est le cercle décrit par le centre de la méridienne. L'axe vertical V''V' reste droit; l'axe horizontal devient l'arc *ab* : il faut concevoir que cet axe est d'abord transporté sur la tangente AB, puis courbé sur le cercle, de manière que chacun de ses points décrive une développante. Les axes verticaux V''V' et *vv'* des ellipses sont égaux.

Les plans sécants auxiliaires sont horizontaux. Celui qui passe par le point R′ de la méridienne PQ coupe le tore suivant deux cercles décrits du point O comme centre, avec les rayons OR et OS. Si l'on détermine sur l'ellipse A′B′ les points C′ et D′ qui sont à la même hauteur que R′ et S′, et que l'on prenne les arcs V*c* et V*d* égaux aux abscisses $V''C_1$ et $V''D_1$, les points *c* et *d* seront les projections des points où la directrice du conoïde est rencontrée par le plan sécant considéré, et, par suite, les droites suivant lesquelles cette surface est coupée se trouveront projetées sur O*c* et O*d*. Les sections circulaires précédemment obtenues rencontrent ces lignes en quatre points M, N, I et J qui appartiennent à la projection de l'intersection.

Les axes verticaux des deux ellipses étant égaux, les points V′ et *v*′ sont dans un plan horizontal qui touche le conoïde le long de la génératrice UVO et le tore le long du cercle *v*V. Le point de rencontre V de ces lignes appartient aux deux arcs EF et GH qui composent la projection de l'intersection (1).

Le plan horizontal est un plan principal pour les deux surfaces, et par suite chaque point, tel que M, est la projection de deux points de l'intersection situés l'un au-dessus de lui, l'autre au-dessous, et à égales distances.

Le conoïde prolongé au delà de l'axe O rencontre une seconde fois le tore, suivant une autre courbe symétrique de la première, et dont on obtiendrait la projection en considérant les intersections des différents cercles avec les prolongements des droites sur lesquelles se projettent les génératrices du conoïde.

672. La tangente de la courbe en un point quelconque M est l'intersection des plans tangents au tore et au conoïde en ce point. La trace du premier de ces plans est la droite *rt* perpendiculaire à OM, et passant par le point *r* ramené par un arc de cercle de la trace *r*′ de la tangente R′*r*′ à la méridienne. Pour construire le plan tangent du conoïde, nous remplaçons d'abord la directrice curviligne de cette surface par sa tangente au point projeté horizontalement en *d*, en conservant d'ailleurs la directrice rectiligne qui est projetée sur le point O et le plan horizontal comme plan directeur ; nous avons ainsi un paraboloïde de raccordement le long de la génératrice OM.

Quand on enroule sur le cylindre *a*V*v* la surface de l'ellipse A′B′, la sous-tangente D_1T conserve sa longueur et se place sur la tangente dT_1 du cercle : le point T_1 est donc la trace horizontale de la tangente à la directrice curviligne; et, comme le point O est la trace horizontale de la directrice rectiligne, on voit que la droite OT_1 est la génératrice du paraboloïde contenue dans le plan horizontal. La droite Mt_1 parallèle à dT_1 est la trace d'un plan vertical qui, étant parallèle aux deux directrices du paraboloïde, le coupe suivant une génératrice du second système. Cette droite qui a sa trace en t_1 et la génératrice horizontale OM déter-

(1) Nous avons déjà remarqué aux articles 200 et 236 que la courbe de section de deux surfaces tangentes l'une à l'autre avait un point double au point de contact.

minent le plan tangent dont la trace est, par conséquent, la droite $t_1 t$ parallèle à OM. La tangente de la courbe au point M passe par le point t, intersection de $t_1 t$ et de rt.

673. La projection de l'intersection s'arrête aux points E, F, G et H; au delà s'étendent des parties parasites que nous pourrons déterminer en cherchant la loi de génération de la courbe. Les axes verticaux des ellipses A'B' et PQ étant égaux, les abscisses des points de ces courbes qui ont des ordonnées égales sont proportionnelles aux axes horizontaux. Nous pourrons donc écrire

$$\frac{V''B'}{vQ} = \frac{V''D_1}{vR}.$$

Mais on a évidemment

$$V''D_1 = \widehat{Vd} = \overline{OV} \times \widehat{VOM}, \quad vR = dM = OM - OV.$$

Portant ces valeurs dans l'équation ci-dessus et résolvant par rapport à OM, on obtient

$$OM = OV \frac{vQ}{V''B'}\left(\frac{V''B'}{vQ} + \widehat{VOM}\right).$$

Si nous traçons par l'origine O une droite OL telle que l'angle LOV soit égal à $\frac{V''B'}{vQ}$, et si nous posons

$$OM = \rho, \quad OV \frac{vQ}{V''B'} = R, \quad \widehat{LOM} = \omega,$$

l'équation deviendra

$$\rho = R\omega.$$

Si l'on prend le point O pour origine et la droite OL pour axe, ρ et ω seront le rayon vecteur et l'azimut du point considéré M; comme, d'ailleurs, la longueur R est constante, l'équation montre que la courbe à laquelle appartient l'arc EF est une spirale d'Archimède. L'axe OL tangent au sommet O fait avec la droite OV un angle qui est exprimé en degrés par

$$\frac{V''B'}{vQ} \times \frac{180^\circ}{\pi}.$$

L'arc HG appartient à une spirale qui a le même paramètre R, et dont la tangente au sommet fait avec OV et de l'autre côté de cette droite un angle L_1OV égal à LOV. Quand la valeur du rapport de V''B' à vQ est $\frac{1}{2}\pi$, les deux parties HG et EF de la projection sont des arcs d'une même spirale.

Le tore étant donné, on peut déterminer le conoïde aussi bien par l'arc de spirale EF, projection de l'intersection, que par l'ellipse A'B', qui doit être enroulée

sur un cylindre. Une spirale d'Archimède est facile à tracer, et les constructions ne présentent aucune difficulté.

674. On peut dégager la construction de la tangente des considérations relatives aux surfaces, de manière à avoir un tracé applicable aux parties parasites de la projection de la courbe d'intersection.

On a dans le triangle rectangle rMt

$$\operatorname{tang} \widehat{rMt} = \frac{rt}{Mr} = \frac{\frac{OM}{Od}\, dT_1}{Rr'} = \frac{OM \times D_1T}{OV \times Rr'}.$$

Sur les ellipses $A'B'$ et PQ, les longueurs horizontales homologues telles que D_1T et Rr' sont proportionnelles aux demi-axes $V''B'$ et vQ. D'après cela, l'égalité que nous avons trouvée devient

$$\operatorname{tang} \widehat{rMt} = \frac{OM}{OV} \times \frac{V''B'}{vQ} = \frac{\rho}{R}.$$

Si nous élevons en M et en O des droites MK et OK respectivement perpendiculaires à Mt et à OM, la longueur OK interceptée sur la seconde de ces lignes est appelée sous-normale, et il est facile de voir, d'après l'équation précédente, que sa longueur est égale à R; par conséquent, *dans la spirale d'Archimède, la sous-normale est constante et égale au paramètre* ([1])

Ce théorème permet de déterminer la tangente en un point quelconque de la courbe, et nous ferons remarquer que ce n'est pas seulement dans les parties parasites que la construction par les plans tangents se trouve en défaut, mais encore au point double V, où ces plans se confondent, et aux extrémités E, F, G et H, où la tangente est verticale ([2]).

([1]) Il est facile de démontrer directement cette proposition. Soient O l'origine, M et M' deux points d'une spirale d'Archimède infiniment rapprochés l'un de l'autre, Mm un arc décrit du point O comme centre, MN et ON des droites respectivement perpendiculaires à MM' et à OM (*fig.* 301, *a*).

Le triangle MON est semblable au triangle infiniment petit MmM', que l'on peut considérer comme rectiligne ; on a donc

$$Mm : mM' :: OM : ON.$$

En remplaçant l'arc Mm par sa valeur $OM \times \widehat{M'OM}$, on obtient

$$ON = \frac{mM'}{\widehat{M'OM}}.$$

La courbe étant une spirale d'Archimède, les accroissements du rayon vecteur sont proportionnels aux accroissements des azimuts; la sous-normale ON est donc constante. Sa longueur est le rayon d'un cercle dont la circonférence égale l'augmentation du rayon vecteur lorsque l'azimut varie de 360°.

([2]) Nous avons déjà vu à l'article 236 que l'on ne peut pas déterminer par les plans tangents les tangentes au point double de l'intersection de deux surfaces qui se touchent. La méthode par une courbe

675. Si l'on coupe le conoïde par un cylindre de révolution ayant pour axe la verticale du point O, et si l'on développe le cylindre, la transformée de la section sera une ellipse, car les points de cette courbe et ceux de la directrice aplanie A'B' qui appartiennent à une même génératrice ont des ordonnées égales et des abscisses dans un rapport constant.

L'axe horizontal de cette ellipse est $\frac{r}{OV}$ A'B', en désignant par r le rayon du cylindre. L'axe vertical ne varie pas, et par conséquent, suivant la valeur de r, le rapport des deux axes peut avoir toutes les grandeurs possibles.

Le conoïde que nous venons d'étudier est quelquefois appelé *conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde*, parce que Hachette, qui avait remarqué les propriétés géométriques de son intersection avec un tore, a proposé de l'employer pour la surface de cette voûte ([1]).

676. *Emploi d'un conoïde droit comme surface auxiliaire pour la solution d'un problème de Géométrie plane.* — La considération d'un conoïde droit permet de faire dépendre la construction des rayons de courbure de la courbe de l'ombre portée d'une surface de révolution, sur un plan perpendiculaire à son axe, de celle des tangentes à la courbe de l'ombre propre.

Si la sphère (O, O') (*fig.* 220) est éclairée par des rayons de front, la séparatrice sera le grand cercle projeté sur la droite A'G' perpendiculaire à la projection verticale R' de l'un des rayons, et l'on obtiendra facilement sur le plan horizontal l'ombre m de l'un quelconque (M, M') de ses points.

Nous savons que les normales de la courbe d'ombre portée sont les ombres des horizontales qui joignent les points de la séparatrice avec l'axe (O, O'I) (art. **350**). Le lieu général de ces lignes forme un conoïde droit. La courbe uu_1, ligne de l'ombre portée par cette surface gauche sur le plan horizontal, est l'enveloppe des ombres de ses génératrices, et par suite la développée de l'ombre ab de la surface de révolution. Le point n, où l'ombre im du rayon (OM, IM') touche cette enveloppe, est donc le centre de courbure de amb pour le point m, et la trace du rayon qui touche le conoïde en un point de la génératrice (OM, IM').

---

d'erreur que nous avons exposée à cet article est souvent commode ; quant à celle dont nous venons de donner une application, et qui consiste à rechercher la loi du tracé des tangentes de la courbe considérée en elle-même et indépendamment de ses relations avec les surfaces, elle présente généralement des difficultés. Nous verrons plus loin (art. 866) une troisième méthode pour l'explication de laquelle les droites Uu et uV ont été tracées sur la *fig.* 301.

La théorie exposée à l'article 673 montre que la projection de l'intersection ne change pas quand les longueurs vQ et V''B' augmentent dans un même rapport. On peut donc agrandir les surfaces de manière que les points E, F, G, H ne soient plus les extrémités des arcs utiles des spirales. Cette considération conduit, pour la tangente en ces points, à une construction que nous laissons au lecteur le soin de développer.

([1]) *Voir* le journal *l'Architecte,* février 1833.

Le plan directeur du conoïde est horizontal; les deux directrices sont l'axe (O, O'I) et la séparatrice que nous savons construire, quelle que soit la forme de la méridienne. Si nous connaissons la tangente de la séparatrice au point (M, M'), nous pourrons remplacer le conoïde par un paraboloïde de raccordement, et nous obtiendrons ensuite par une construction facile le point de contact N' d'un plan passant par la génératrice N'M' et parallèle aux rayons, et l'ombre *n* de ce point.

Dans le cas actuel, la séparatrice étant un cercle perpendiculaire au plan vertical, la détermination de la tangente ne présente pas de difficulté. Sa projection verticale est L'M'G', et l'on obtient sa projection horizontale GM en déterminant par une tangente M''G' le point G', où elle rencontre le diamètre (OG, O'G'). Pour obtenir la tangente, on peut supposer que la séparatrice tourne autour de ce diamètre jusqu'à ce qu'elle se trouve dans un plan parallèle au plan vertical; le point (M, M') se place alors en M'', et la tangente cherchée est M''G'.

La trace LO du paraboloïde rencontre en V la trace *mi* du plan d'ombre de la génératrice considérée; la génératrice du second système qui est contenue dans ce plan a donc sa trace en V, et sa projection verticale passe par le point V' et par le point de concours O' des projections verticales des génératrices de ce système; la droite V'O' coupe la génératrice $M'M'_1$ du conoïde au point N', qui a pour ombre le point cherché *n* [1].

La construction est applicable au cas où la surface de révolution serait éclairée par des rayons divergents.

Nouvelles observations sur les sommets et les arêtes.

677. Nous avons trouvé des arêtes sur les principales surfaces étudiées dans ce Chapitre; mais elles se sont présentées avec des circonstances différentes, que nous pouvons résumer comme il suit :

1° Cylindroïde : point central à l'infini, — paramètre fini;

2° Conoïde oblique : point central à l'infini, — paramètre infini;

3° Conoïde droit : point central à distance finie, — paramètre infini.

Un examen attentif va nous faire comprendre cette diversité.

Lorsque le point de contact d'un plan qui contient une génératrice parcourt la longueur indéfinie de cette droite, le plan tourne de 180° (art. **617**); si la génératrice passe à un sommet, l'évolution entière se fait quand le contact est à ce point (art. **666**), et il en est de même si, le sommet s'éloignant à l'infini, la génératrice devient une arête.

---

[1] Cette construction est due à M. Dunesme (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1857, 2e semestre).

Dans la formule (1) de l'article **622**,

$$\tang \theta = \frac{x}{k},$$

la lettre x représente l'abscisse du point considéré mesurée à partir du point central pris pour origine. Quand le point central est à l'infini, tous les points à distance finie ont des abscisses infinies. Alors, si le paramètre est fini, θ atteint 90° et le plan tangent le long de l'arête est perpendiculaire au plan central. C'est en effet ce qui arrive pour le cylindroïde : le plan tangent aux différents points d'une arête de cette surface est parallèle au plan directeur, et le plan central est perpendiculaire à ce plan (art. **642**). Si l'on donne à tang θ une valeur finie quelconque, on trouve une abscisse finie; l'évolution entière se fait donc à une distance finie du point central, c'est-à-dire à l'infini.

Dans le conoïde oblique, le point central d'une arête est encore à l'infini, et par suite les abscisses des points à distance finie sont infinies; mais l'angle du plan tangent le long de l'arête avec le plan central n'est pas de 90°, et alors la formule exige que le paramètre soit infini. Si l'on donne à θ diverses valeurs, on trouve toujours une abscisse infinie; ainsi, bien que l'évolution se fasse encore entièrement à l'infini, on trouve une disposition autre que la précédente. On peut rendre la différence manifeste en traçant des courbes par les points des génératrices où l'obliquité du plan tangent a des valeurs déterminées. Ces lignes interceptent sur les génératrices des segments proportionnels; elles sont asymptotes des arêtes, concourent aux sommets et sont tangentes en ces points à la génératrice. Le point central d'une arête se trouvant à l'infini et son paramètre étant infini, les courbes dont nous venons de parler s'écartent de plus en plus lorsque la génératrice approche d'une arête, et cette augmentation des segments interceptés sur la génératrice n'a d'autre limite que l'infini.

Enfin, pour un conoïde droit, le point central est à distance finie, et les divers points de la génératrice ont des abscisses finies; comme d'ailleurs le paramètre est infini, θ est constamment nul, et le plan central est tangent le long de l'arête. Mais l'angle θ devient indéterminé pour une valeur infinie de l'abscisse, ce qui devait être, puisque l'évolution se fait à une distance infinie du point central.

Les différences que nous avons signalées pour les arêtes sont donc les conséquences de la loi exprimée par l'équation ci-dessus.

678. Nous avons vu (art. **635**) que, quand les directrices n'ont ni inflexion ni rebroussement, le point d'une arête situé à l'infini est l'extrémité d'une ligne double qui peut se trouver tout entière à l'infini ou n'y avoir que ce point. La première disposition s'est seule présentée sur les surfaces que nous avons étudiées; nous allons donner un exemple de la seconde.

Considérons le conoïde général qui a pour plan directeur le plan horizontal, et

pour directrices l'ellipse (bc, $b'c'$) (*fig.* 295) et l'hyperbole H située dans le plan vertical de projection et placée de manière à avoir pour l'une de ses asymptotes la projection xy d'une tangente horizontale de l'ellipse. L'hyperbole a un arc utile et double qui s'étend du point I au point situé à l'infini sur la génératrice (ag, xy) : cette droite est évidemment une arête.

Si l'hyperbole H était remplacée par une courbe ayant les deux bras d'une branche infinie situés au-dessous de leur asymptote xy, la droite (ag, xy) serait encore une arête; mais son point à l'infini ne serait plus l'extrémité d'un arc utile, ce qui tient à ce qu'une directrice aurait une inflexion (art. **183**), et que les observations que nous avons présentées à l'article **637** ne seraient plus applicables.

679. Si l'on considère les surfaces développables comme une variété des surfaces gauches, l'arête de rebroussement sera une ligne de sommets, ainsi que nous l'avons déjà remarqué (art. **634**). Chacun de ses points est en effet sur deux génératrices consécutives; la surface y a un plan de rebroussement et une infinité de plans que l'on peut considérer à certains égards comme tangents; enfin chaque ligne d'ombre complète se compose d'un certain nombre de génératrices et de l'arête de rebroussement.

Dans les développables, les extrémités des parties utiles des directrices se trouvent aux points où trois génératrices se coupent, c'est-à-dire aux points de rebroussement de l'arête, qui sont les points auxquels, pour ces surfaces, nous avons réservé le nom de *sommets*.

On voit que quelques propriétés des sommets des surfaces gauches appartiennent à tous les points de l'arête des développables, et d'autres seulement aux points de rebroussement de cette ligne. Nous ajouterons que la section faite dans une développable par un plan passant à un sommet a un rayon de courbure nul sans rebroussement (art. **491**), disposition que l'on ne trouve pas dans les sections des surfaces gauches.

680. Quand l'une des directrices d'une surface gauche a des inflexions, la surface peut avoir des sommets étrangers aux lignes doubles, et n'ayant d'autre propriété que d'appartenir à deux génératrices consécutives et à toutes les lignes d'ombre.

Ainsi, si un conoïde oblique a pour plan directeur le plan horizontal, et pour directrices la droite (B, B') et la courbe A qui a un contact du second ordre avec la ligne de terre (*fig.* 291), la trace b de la directrice rectiligne sera sur deux génératrices consécutives; mais cette droite n'aura ni segment double ni segment parasite.

CHAPITRE IV.

HYPERBOLOIDE.

681. On appelle *hyperboloïde à une nappe* la surface engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur trois directrices rectilignes. Cette surface se réduit au système de deux plans Q et Q_1 (*fig.* 210) quand deux directrices AB et A_1B_1 sont dans un même plan, la troisième A_2B_2 étant quelconque. Si cette dernière directrice était dans le plan Q déterminé par les deux premières, le second plan Q_1 se confondrait avec Q.

Lorsque les trois directrices ont un point commun à distance finie ou infinie, toute droite passant par ce point satisfait aux conditions imposées aux génératrices, et par suite la surface n'est pas déterminée.

Nous supposerons toujours que les directrices n'ont aucune des positions relatives exceptionnelles qui viennent d'être énumérées, et alors la surface, n'étant pas un système de plans et ayant des directrices rectilignes, sera gauche (art. **464**). Nous la désignerons simplement sous le nom d'*hyperboloïde.*

Nous supposerons encore généralement que les trois directrices ne sont pas parallèles à un même plan. Les propriétés que nous établirons sans introduire cette nouvelle hypothèse appartiennent évidemment au paraboloïde (art. **610**).

682. On obtient la génératrice qui passe par un point choisi arbitrairement sur une directrice en prenant l'intersection des plans déterminés par ce point et respectivement par les deux autres directrices. On opère d'une manière analogue quand on veut avoir la génératrice qui rencontre une directrice à l'infini.

Les trois directrices étant représentées en projection par les droites A, A′ et A″ (*fig.* 302), en faisant passer par chacune de ces lignes deux plans respectivement parallèles aux deux autres, nous obtenons six plans distincts, parallèles deux à deux, et dont les intersections forment les arêtes d'un parallélépipède CDEFJHGI.

L'arête JF ou B rencontre la directrice A′ en un point J, parce qu'elle est dans le plan DEF mené par A′ parallèlement à A; elle coupe la directrice A″ en un point F, parce qu'elle est dans le plan JHG mené par A″ parallèlement à A; elle a enfin un point commun avec la directrice A à l'infini, parce qu'elle est l'intersection de deux plans parallèles à cette droite : elle est donc une génératrice de la surface. Les arêtes B′ et B″ opposées à A′ et A″ sont également des génératrices [1].

[1] Nous appelons les droites A, A′, A″, B, B′ et B″ des *arêtes* quand nous les considérons sur le paral-

Les droites B, B′ et B″, prises pour directrices, déterminent un second hyperboloïde, auquel les arêtes A, A′ et A″ appartiennent comme génératrices. Ces deux surfaces ont ainsi six droites communes.

683. On sait qu'un parallélépipède a un centre où les diagonales se croisent en leur milieu : nous allons voir que les génératrices des deux hyperboloïdes ont de remarquables relations de symétrie par rapport au point O, centre du parallélépipède DG.

Par un point a de A, nous menons une droite qui rencontre les directrices A′ et A″. Pour tracer cette ligne, nous remarquons qu'elle détermine avec A″ un plan dont les traces Fa' et Ga sur les plans FJD et GIC doivent être parallèles; par conséquent, en menant du point F une parallèle à Ga, nous déterminerons sur la seconde directrice le point a' où passe la génératrice cherchée B‴.

Nous prenons les distances Fb, Ib' et Cb'' respectivement égales à Ca, Ja' et Fa'', et nous joignons par des droites les points b et b'' au point b', et les points a, a', a'', b, b' et b'' au centre O, point de concours et milieu des quatre diagonales du parallélépipède, et notamment de CF et de IJ.

Les triangles COa et FOb sont évidemment égaux et dans un même plan; par suite, les lignes Ob et Oa sont de même grandeur et en prolongement l'une de l'autre. On trouve de même que les segments Ob' et Ob'' sont respectivement égaux à Oa' et Oa'' et qu'ils appartiennent aux mêmes droites. Il résulte de là que les triangles bOb' et b'Ob'' sont dans un même plan et respectivement égaux à aOa' et a'Oa'', et enfin que les points b, b' et b'' sont sur une droite A‴ parallèle à B‴. Cette ligne A‴, rencontrant les trois directrices du second hyperboloïde, en est une génératrice.

A toute génératrice B‴ de la première surface correspond ainsi sur la seconde une génératrice parallèle A‴, et le plan déterminé par ces droites contient le point O. Il suit de là qu'une droite allant de la première surface à la seconde en passant par le point O est divisée à ce point en deux parties égales, et par conséquent que le système des deux hyperboloïdes a un *centre* qui est celui du parallélépipède.

684. Les triangles aIG, FJa' sont semblables et donnent

$$\mathrm{I}a \times \mathrm{J}a' = \mathrm{IG} \times \mathrm{JF}.$$

En remarquant que Ia est égal à Jb, et désignant par 4C le second membre, qui est indépendant de la position spéciale des génératrices considérées B‴ et A‴, on obtient

$$\mathrm{J}b \times \mathrm{J}a' = 4\mathrm{C}.$$

lélépipède. Cette expression ne peut donner lieu à aucune équivoque, car l'hyperboloïde n'a pas de génératrices qui soient des arêtes, comme nous le démontrerons (art. 689).

685. Les génératrices des hyperboloïdes étant parallèles deux à deux, ces surfaces ont un même cône directeur dont nous pouvons placer le sommet au centre O. La génératrice OK, parallèle à B‴ et à A‴, est dans le plan de ces droites et rencontre le plan DEF au point m, milieu de $a'b$. Si nous rapportons ce point aux droites A′ et B prises pour axes coordonnés, nous aurons

$$x = mn = \frac{1}{2}\mathrm{J}a', \quad y = \mathrm{J}n = \frac{1}{2}\mathrm{J}b,$$

d'où, en ayant égard à la seconde équation de l'article précédent,

$$xy = \mathrm{C}. \tag{1}$$

Cette équation, qui représente la trace du cône directeur commun sur le plan DEF, est celle d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes. Le cône directeur est donc du second ordre; ses intersections avec les autres faces du parallélépipède sont également des hyperboles qui ont pour asymptotes les génératrices des deux surfaces.

686. Par un point J_1, pris arbitrairement sur la droite indéfinie IOJ, nous menons un plan P parallèle à DJF : la section faite dans le cône est une hyperbole semblable à la précédente, et qui a pour asymptotes les droites $\mathrm{J}_1\mathrm{X}$ et $\mathrm{J}_1\mathrm{Y}$, respectivement parallèles à A′ et à B.

La génératrice OK rencontre le plan P en un point m_1 situé sur la droite $\mathrm{J}_1 m_1$, parallèle à $\mathrm{J}m$.

En appelant x_1 et y_1 les coordonnées du point m_1 par rapport aux asymptetes prises pour axes, nous avons

$$x_1 = m_1 n_1, \quad y_1 = \mathrm{J}_1 n_1,$$
$$x_1 y_1 = \mathrm{C}_1, \tag{2}$$

C_1 étant une nouvelle constante.

Mais, les points m et m_1 étant homologues sur les deux hyperboles, nous pouvons écrire

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}. \tag{3}$$

On déduit des équations (1), (2) et (3)

$$\left\{\begin{array}{l}(x_1 + x)(y_1 - y) = \mathrm{C}_1 - \mathrm{C},\\(x_1 - x)(y_1 + y) = \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}.\end{array}\right. \tag{4}$$

687. Pour interpréter ces résultats, nous traçons par le point m_1 une droite

parallèle à $a'b$: les points a'_1 et b_1, où elle rencontre les génératrices A‴ et B‴, sont les traces de ces droites sur le plan P. Nous menons par ces points des parallèles aux axes A′ et B, et nous avons

$$\begin{cases} qa'_1 = n_1 m_1 + ta'_1, \\ J_1 q = J_1 n_1 - tm_1, \end{cases} \quad \begin{cases} rb_1 = n_1 m_1 - sm_1, \\ J_1 r = J_1 n_1 + sb_1. \end{cases}$$

Les coordonnées nm et Jn du point m sont égales aux longueurs sm_1 et tm_1, et par suite on a

$$x = ta'_1 = sm_1, \quad y = tm_1 = sb_1.$$

Les équations précédentes deviennent

$$\begin{cases} qa'_1 = x_1 + x, \\ J_1 q = y_1 - y, \end{cases} \quad \begin{cases} rb_1 = x_1 - x, \\ J_1 r = y_1 + y. \end{cases}$$

Mais les longueurs qa'_1 et $J_1 q$ d'une part, rb_1 et $J_1 r$ de l'autre, sont les coordonnées des points a'_1 et b_1 ; les équations (4) signifient donc que tout plan parallèle à l'une des faces du parallélépipède coupe les deux hyperboloïdes suivant une même hyperbole, et par conséquent que les deux surfaces que nous considérons n'en forment qu'une seule, ayant deux systèmes de génératrices rectilignes et un centre O.

688. Pour établir d'une manière complète la seconde génération rectiligne de l'hyperboloïde, nous allons montrer que *tout point a'_1 d'une génératrice* B‴ *du premier système* (*fig.* 303) *appartient à une certaine génératrice $p''pp'$ du second.*

Nous faisons passer par le point a'_1 un plan P parallèle à la face DEFG du parallélépipède ; du point J_1 où la droite IJ perce ce plan, nous menons deux lignes JX et J_1Y respectivement parallèles à A′ et à A : elles sont les asymptotes de la section de l'hyperboloïde par le plan P. En les prenant pour axes, nous avons entre les coordonnées du point a'_1 la relation

$$J_1 g \times ga'_1 = C_1 - C.$$

Déterminons maintenant le point k où l'ordonnée ga'_1 perce le plan IGFE [1], et traçons la droite kF jusqu'à sa rencontre p' avec B′ : la génératrice du second système menée par le point p' et la ligne indéfinie kg se rencontrent nécessairement, parce qu'elles sont dans le plan qui contient le point p' et la droite B ; l'ordonnée du point commun doit d'ailleurs être telle, que son produit par l'abscisse $J_1 g$ soit $(C_1 - C)$; cette ordonnée est donc ga'_1, et la génératrice menée par le point p' passe précisément au point donné a'_1.

---

[1] Il suffit de tracer la droite IFd qui est dans le plan IEFG, puis la droite dk parallèle à J_1X.

689. *Deux génératrices d'un même système ne se rencontrent jamais*, car, si elles étaient dans un plan, les directrices seraient dans ce plan, ce qui est contraire à nos hypothèses (art. **681**).

Il résulte de ce théorème que *l'hyperboloïde n'a ni sommets ni arêtes*.

690. *Deux génératrices de systèmes différents se rencontrent toujours*.

Pour prouver cette proposition, nous considérons deux génératrices $aa'a''$ et $p'pp''$ de systèmes différents (*fig.* 303), et nous les projetons sur le plan CHGI par des droites parallèles à A'' : les projections aG et p'C se coupent en un point α'_1 que nous relevons en a'_1 sur $aa'a''$. Les génératrices du second système rencontrant toutes la droite B'', leurs projections sur le plan CHGI divergent du point C; la génératrice de ce système qui passe par le point a'_1 (art. **688**) se projette donc sur la droite $C\alpha'_1$; elle coupe la droite B' en p', et par suite elle n'est autre que $p'pp''$, ce qui démontre le théorème énoncé (¹).

691. *Trois génératrices quelconques d'un système peuvent être prises pour directrices de l'autre système*, puisqu'elles en rencontrent toutes les génératrices.

Une droite ne peut pas couper un hyperboloïde en plus de deux points, car, si elle avait trois points sur la surface, elle rencontrerait trois génératrices de l'un des systèmes; elle appartiendrait donc à l'autre système et serait tout entière sur la surface.

Cette proposition s'étend naturellement au paraboloïde.

Cône asymptote.

692. Par un point quelconque d'une génératrice B''' du premier système (*fig.* 302) passe une génératrice du second, et ces deux lignes déterminent le plan tangent de la surface en ce point. La génératrice du second système qui passe par le point de B''' situé à l'infini est A''', et le plan de ces deux droites est tangent à l'infini; nous avons vu qu'il contient le centre O; l'enveloppe des plans passant par les différentes génératrices et tangents à l'infini, c'est-à-dire la développable

---

(¹) La *fig.* 303 peut servir à établir que les deux hyperboloïdes que nous considérons au commencement de ce paragraphe ne forment qu'une surface.

Il suffit de prouver que par un point quelconque a'_1 d'une génératrice $aa'a''$ on peut faire passer une droite appuyée sur B, B' et B''. Pour cela, projetons a'_1 en α'_1 sur aG, et traçons $C\alpha'_1$ jusqu'à sa rencontre p' avec B'; la droite $p'a'_1$ satisfait aux conditions: elle rencontre évidemment B'', et, pour prouver qu'elle coupe B, il suffit d'établir que les droites qui joignent les points α' et π d'une part, a et p' de l'autre, sont parallèles, ce qui est facile.

Ce raisonnement est très-simple, mais il ne dispense pas de démontrer que les sections du cône directeur et de la surface par un même plan sont des coniques concentriques.

M. J. Binet a le premier considéré dans l'hyperboloïde des parallélépipèdes formés par six plans tangents parallèles deux à deux (*Journal de l'École Polytechnique*, XVIᵉ cahier).

asymptote de l'hyperboloïde, est donc un cône ayant son sommet au centre, et, comme cette surface est directrice (art. **639**), elle n'est autre que le cône directeur dans la position où nous l'avons considéré aux articles précédents.

En résumé, *l'hyperboloïde a un cône asymptote du second ordre dont le sommet est au centre de la surface et qui est directeur des deux systèmes de génératrices. Les plans passant par les couples de génératrices parallèles sont tangents à ce cône.* La droite $a'b$ (*fig.* 302) est, par suite, tangente au point m à l'hyperbole trace du cône sur le plan DJF, ce qui résulte d'ailleurs de ce que ce point est le milieu du segment compris entre les asymptotes.

693. D'après ce que nous avons vu à l'article **687**, si l'on coupe l'hyperboloïde et son cône directeur par un plan P parallèle à deux génératrices quelconques A′ et B (*fig.* 302) de systèmes différents, les sections ont les mêmes asymptotes et sont par conséquent homothétiques et concentriques. Ce résultat, étant indépendant des asymptotes, subsiste quand ces droites disparaissent : nous voyons ainsi que *les sections faites dans l'hyperboloïde et dans son cône asymptote par un plan quelconque sont des coniques homothétiques et concentriques.*

Il suit de là que *les sections faites dans un hyperboloïde par des plans parallèles sont des coniques homothétiques et ayant leurs centres en ligne droite.*

Toutes les sections planes de l'hyperboloïde étant des coniques, cette surface est du second ordre.

Division homographique des génératrices.

694. Quand deux droites sont divisées en des points qui se correspondent un à un, et de telle manière que l'on obtienne un produit constant en multipliant l'un par l'autre les segments interceptés sur elle, entre deux points homologues quelconques et deux origines fixes, nous dirons avec M. Chasles [1] que ces droites sont divisées *homographiquement,* ou que leurs divisions sont *homographiques.*

Considérons deux droites A et A′ situées dans un plan (*fig.* 304), et d'un point Q, pris arbitrairement sur ce plan, menons deux droites QJ et QI qui leur soient respectivement parallèles, et une sécante Qaa'; les triangles QaI, $a'QJ$ sont semblables et donnent

$$Ia \times Ja' = QJ \times QI.$$

Le second membre étant indépendant de la position de la sécante, si cette ligne tourne autour du point Q, ses points de rencontre avec A et A′ formeront sur ces droites des divisions homographiques.

---

[1] *Traité de Géométrie supérieure,* p. 67. Les diverses propositions développées dans ce paragraphe sont dues à M. Chasles.

L'origine I est, sur la droite A, homologue du point de A′ situé à l'infini, et l'origine J est, sur la droite A′, homologue du point de A situé à l'infini. Les deux points homologues a et a' sont réunis au point u.

On considère souvent des droites ainsi divisées transportées d'une manière quelconque dans le plan ou dans l'espace, ou réunies l'une sur l'autre de manière à ne former qu'une seule ligne ayant deux divisions distinctes.

695. *Quand deux droites sont divisées homographiquement, si on les place de telle manière qu'un même point u soit la réunion de deux points homologues, les droites passant par les autres points homologues convergeront vers un même point.*

Pour le prouver, nous remarquerons que, si I et J sont les origines des segments et C la valeur du produit constant, nous aurons

$$\mathrm{I}u \times \mathrm{J}u = \mathrm{C}.$$

Mais en menant par les points I et J des droites respectivement parallèles à A′ et à A, et de leur point de rencontre une sécante Qaa', nous déterminerons des segments entre lesquels existera la relation

$$\mathrm{I}a \times \mathrm{J}a' = \mathrm{I}u \times \mathrm{J}u,$$

d'où

$$\mathrm{I}a \times \mathrm{J}a' = \mathrm{C}.$$

Les points a et a', situés sur une droite quelconque passant par le point Q, sont donc deux points homologues des divisions considérées, ce qui prouve le théorème énoncé.

696. Si l'on projette sur un plan, ou même sur deux plans différents, deux droites divisées homographiquement, tous les segments de chacune d'elles seront réduits dans un même rapport, et les divisions des projections seront homographiques.

697. Nous avons établi à l'article **684** que l'on obtient un produit constant en multipliant l'un par l'autre les segments interceptés sur deux génératrices A et A′ d'un hyperboloïde (*fig.* 302), entre deux origines fixes I et J, et deux points a et a' situés sur une génératrice quelconque de l'autre système. Nous pouvons donc dire que *dans un hyperboloïde les génératrices de l'un des systèmes divisent homographiquement les génératrices de l'autre système.*

698. Réciproquement, *quand deux directrices rectilignes sont divisées homographiquement, les droites qui passent par les points homologues forment un hyperboloïde.*

Soient A et A′ les directrices (*fig.* 302), I et J les origines fixes; nous menons par ces points deux droites B′ et B respectivement parallèles à A′ et à A, et nous portons sur ces lignes des longueurs IG et JF telles que leur rectangle soit égal à

la constante de la division homographique (art. **695**), l'une des deux pouvant être prise arbitrairement : la droite A″ qui passe par les points F et G rencontrera une génératrice quelconque B‴, car nous avons l'équation

$$\mathrm{I}a \times \mathrm{J}a' = \mathrm{IG} \times \mathrm{JF},$$

qui entraîne la similitude des triangles IaG et JFa', et par suite le parallélisme des sécantes aG et a'F; la surface a donc une troisième directrice rectiligne A″, ce qui démontre le théorème énoncé.

Il est nécessaire d'avoir égard aux signes et de préciser le sens dans lequel les segments doivent être considérés comme positifs, sur chaque ligne, à partir de l'origine. Sans cela, un point a (*fig.* 302) pourrait être joint indifféremment à l'un ou à l'autre de deux points situés sur la droite A′, de part et d'autre, et à des distances égales de l'origine J. On aurait ainsi deux hyperboloïdes distincts.

Si la constante est positive, les segments dirigés de I vers G et de J vers D devront être de même signe. Suivant la notation de M. Chasles, que nous avons fait connaître (art. **512**), nous indiquerons le sens de chaque segment par l'ordre des deux lettres qui désignent ses extrémités. Ainsi la longueur négative IC — Ia sera représentée indifféremment par aC ou — Ca.

Quand deux droites sont divisées homographiquement, à chaque point de l'une ne correspond qu'un point de l'autre. Nous voyons ainsi d'une nouvelle manière que *l'hyperboloïde n'a ni sommets ni arêtes*.

699. Nous allons maintenant étudier les relations qui existent entre les segments interceptés par quatre génératrices mm', nn', pp' et qq' d'un système sur deux génératrices A et A′ de l'autre système (*fig.* 305). Nous considérons ces dernières lignes comme des directrices, et nous supposons que l'hyperboloïde est déterminé par la condition que le produit des segments interceptés sur elle, à partir de deux points fixes I et J, soit égal à une constante donnée C.

Pour présenter une figure correcte, nous avons appuyé les tracés sur la projection d'un parallélépipède analogue à celui que nous avons considéré précédemment; les directrices A et A′ et la droite nn', l'une des génératrices, en forment trois arêtes; les points fixes I et J occupent deux sommets opposés.

Nous avons immédiatement

$$\mathrm{I}m \times \mathrm{J}m' = \mathrm{C},\quad \mathrm{I}n \times \mathrm{J}n' = \mathrm{C},\quad \mathrm{I}p \times \mathrm{J}p' = \mathrm{C},\quad \mathrm{I}q \times \mathrm{J}q' = \mathrm{C}.$$

Nous déduisons de ces équations

$$\frac{\mathrm{I}m}{\mathrm{I}n} = \frac{\mathrm{J}n'}{\mathrm{J}m'},\quad \frac{\mathrm{I}m}{\mathrm{I}p} = \frac{\mathrm{J}p'}{\mathrm{J}m'},\quad \frac{\mathrm{I}q}{\mathrm{I}n} = \frac{\mathrm{J}n'}{\mathrm{J}q'},\quad \frac{\mathrm{I}q}{\mathrm{I}p} = \frac{\mathrm{J}p'}{\mathrm{J}q'},$$

et ensuite

$$\frac{mn}{\mathrm{I}m} = \frac{n'm'}{\mathrm{J}n'},\quad \frac{mp}{\mathrm{I}m} = \frac{p'm'}{\mathrm{J}p'},\quad \frac{nq}{\mathrm{I}q} = \frac{q'n'}{\mathrm{J}n'},\quad \frac{pq}{\mathrm{I}q} = \frac{q'p'}{\mathrm{J}p'}.$$

Divisant la première de ces équations par la seconde et la troisième par la quatrième, et remarquant qu'on peut changer le signe des deux termes d'une fraction, et par conséquent écrire $\frac{m'n'}{m'p'}$ au lieu de $\frac{n'm'}{p'm'}$, on obtient

$$\frac{mn}{mp} = \frac{m'n'}{m'p'} \times \frac{\mathrm{J}p'}{\mathrm{J}n'}, \quad \frac{qn}{qp} = \frac{q'n'}{q'p'} \times \frac{\mathrm{J}p'}{\mathrm{J}n'}.$$

Enfin, divisant ces équations l'une par l'autre, nous avons la formule

$$\frac{mn}{mp} : \frac{qn}{qp} = \frac{m'n'}{m'p'} : \frac{q'n'}{q'p'},$$

dans laquelle il n'entre aucun segment mesuré à partir des origines I et J. Elle démontre que dans un hyperboloïde *les points dans lesquels quatre génératrices d'un système coupent une génératrice quelconque de l'autre système sont dans un rapport anharmonique constant* (¹).

700. On peut mettre l'avant-dernière équation sous la forme

$$\frac{qn}{qp} : \frac{q'n'}{q'p'} = \mathrm{K},$$

en posant

$$\frac{\mathrm{J}p'}{\mathrm{J}n'} = \mathrm{K}.$$

Si les génératrices nn' et pp' forment avec les directrices A et A′ un quadrilatère gauche invariable, le rapport K sera constant, et, en le supposant connu, la première équation de cet article déterminera le lieu des positions de la génératrice mobile qq' lorsqu'elle glissera sur les directrices.

701. Les côtés nn' et pp' du quadrilatère peuvent être pris pour des directrices; alors, si $n'''p'''$ est une génératrice quelconque du même système que A et A′, nous aurons

$$\frac{n'''n'}{n'''n} : \frac{p'''p'}{p'''p} = \mathrm{K}'.$$

Pour avoir la valeur de la constante K′, nous remarquons que le point p'', où la seconde directrice pp' rencontre la génératrice FG parallèle à la première directrice nn', est le point fixe analogue à J sur la directrice A′ considérée avec A. On a donc

$$\mathrm{K}' = \frac{p''p'}{p''p}.$$

(¹) On peut dire d'une manière plus générale que, *quand deux droites sont divisées homographiquement, le rapport anharmonique de quatre points de l'une est égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants de l'autre.*

Enfin, considérant la projection Gp de la génératrice et ayant égard aux proportionnalités qui existent sur le plan HGI, on obtient

$$\frac{p''p'}{p''p}=\frac{\mathrm{G}p'_1}{\mathrm{G}p}=\frac{\mathrm{H}p'_1}{\mathrm{H}n}=\frac{\mathrm{J}p'}{\mathrm{J}n'}.$$

Les deux constantes K et K′ sont donc égales.

Quand leur valeur est l'unité, toutes les génératrices d'un même système divisent les côtés opposés du quadrilatère en parties proportionnelles, et la surface est un paraboloïde (art. **610**).

702. Dans la division homographique, on prend quelquefois, pour origines des segments, des points b et c (*fig.* 304) autres que ceux qui correspondent respectivement aux points situés à l'infini. Alors l'équation que nous avons trouvée à l'article **695** devient

$$(1)\qquad (ba-b\mathrm{I})(ca'-c\mathrm{J})=\mathrm{C}$$

ou

$$ba.ca'-c\mathrm{J}.ba-b\mathrm{I}.ca'+b\mathrm{I}.c\mathrm{J}-\mathrm{C}=0,$$

que l'on peut écrire

$$(2)\qquad ba.ca'+\lambda.ba+\mu.ca'+\nu=0,$$

en posant

$$(3)\qquad \lambda=-c\mathrm{J},\quad \mu=-b\mathrm{I},\quad \nu=b\mathrm{I}.c\mathrm{J}-\mathrm{C};$$

les quantités λ, μ et ν sont indépendantes de la position des points considérés a et a'.

Il résulte de l'équation (2) que, *quand deux droites sont divisées homographiquement, il existe entre les segments compris entre deux points homologues quelconques et deux points fixes pris arbitrairement sur ces droites une relation dans laquelle chacun des segments n'entre qu'au premier degré.*

703. Réciproquement, *deux droites sont divisées homographiquement quand il existe entre les segments compris entre deux points homologues quelconques et deux points fixes pris arbitrairement sur ces droites une relation dans laquelle chacun de ces segments n'entre qu'au premier degré,* car cette équation est nécessairement de la forme (2), et, en transportant les origines aux points I et J déterminés par les deux premières équations (3), on trouve l'équation (1), qui exprime la propriété par laquelle nous avons défini la division homographique.

Il résulte de ce qui précède que, *toutes les fois qu'en traitant une question régie par de simples équations algébriques on sera conduit à considérer deux séries de points en ligne droite qui se correspondent réciproquement un à un, on sera assuré*

qu'elles sont homographiques, car l'équation qui les exprime devra être de la forme (2).

704. Nous avons vu (art. **694**) que chacun des points I et J des droites A et A′ est homologue du point situé à l'infini sur l'autre droite. Si les points de ces deux lignes situés à l'infini sont homologues, c'est-à-dire si les origines I et J sont à l'infini, le point de concours Q sera également à l'infini, les droites passant par les points homologues seront parallèles et la division sera proportionnelle. *La division proportionnelle est* donc *un cas particulier de la division homographique.*

Il est facile de voir que l'équation aux segments se présente alors sous la forme

$$\lambda . ba + \mu . ca' + \nu = 0.$$

Plans principaux. Axes.

705. Actuellement nous allons étudier des surfaces qui ont une génération différente de celle par laquelle nous avons défini l'hyperboloïde (art. **681**), mais qui cependant, comme nous le reconnaîtrons, sont identiques soit avec une variété de cette surface, soit avec l'hyperboloïde général lui-même.

Considérons d'abord la surface gauche qui a pour directrices les trois cercles (AB, A′B′), (CD, C′D′), (EF, E′F′) (*fig.* 306), situés dans des plans parallèles, et dont les centres sont sur une droite perpendiculaire à ces plans, que nous supposons horizontaux.

Les génératrices qui passent par le point (B, B′) sont sur deux cônes dont ce point est le sommet, et qui ont respectivement pour directrices les cercles (CD, C′D′) et (EF, E′F′). La trace du premier cône sur le plan horizontal E′F′ est un cercle dont il est facile de déterminer le centre (ω, ω') et le rayon $\omega' d'$; ses intersections M et M_1 avec le cercle EF déterminent les génératrices (BNM, B′N′M′), (BN_1M_1, B′N′M′). Si ces droites tournent autour de l'axe, elles s'appuieront toujours sur les directrices, et l'on voit par la symétrie de la figure qu'elles décriront un même hyperboloïde de révolution (art. **198**). Le cercle de gorge sera décrit par les points (J, J′) et (J_1, J′), qui sont les plus rapprochés de l'axe.

Nous avons tracé en trait plein le cercle de gorge et l'hyperbole méridienne qui forment respectivement le contour apparent de la surface sur les deux plans de projection.

Une tangente quelconque P_1P à la projection du cercle de gorge correspond à deux génératrices qui sont représentées sur le plan vertical par des droites P′Q′R′ et $P'_1Q'_1R'_1$.

706. Si la projection verticale du second cercle avait été telle que $C'_2D'_2$, entièrement en dehors du contour apparent du cône qui a pour directrice le troisième

cercle E′F′, la surface aurait été imaginaire; elle se fût réduite à un cône si l'extrémité D'_1 de la projection verticale $C'_1D'_1$ du second cercle avait été sur la droite B′E′ qui appartient au contour apparent du cône dont le cercle E′F′ est la directrice.

707. Nous allons maintenant supposer que l'on donne pour directrices d'une surface gauche trois ellipses (AB, A′B′), (CD, C′D′) et (EF, E′F′) (*fig.* 307), homothétiques et telles que leurs centres soient sur une perpendiculaire à leurs plans.

Nous augmentons les ordonnées perpendiculaires au plan vertical AB qui contient les grands axes dans le rapport du grand axe de l'une des ellipses à son petit axe, et nous changeons ainsi ces courbes en cercles qui, pris pour directrices d'une surface gauche, détermineront un hyperboloïde de révolution dont nous obtenons facilement une génératrice (PQR, P′Q′R′).

Si maintenant nous réduisons toutes les ordonnées dans le rapport nécessaire pour revenir aux directrices primitives, les trois points p, q et r, nouvelles positions des points P, Q et R, seront encore en ligne droite. Comme, d'ailleurs, les projections verticales P′, Q′ et R′ ne sont pas déplacées, on voit que les trois points (p, P′), (q, Q′) et (r, R′) seront aussi sur une droite. Les génératrices des deux systèmes de l'hyperboloïde de révolution formeront donc, après la transformation, deux systèmes de génératrices rectilignes d'une surface gauche dont les ellipses données sont directrices : on reconnaît un hyperboloïde général.

708. En obtenant cette surface par une déformation de l'hyperboloïde de révolution, on voit immédiatement qu'elle a trois plans principaux : un horizontal G′H′ et deux verticaux AB et YY_1; mais, pour être assuré que ces conclusions doivent être admises sans restriction, il faut établir qu'un hyperboloïde peut toujours être coupé par trois plans parallèles suivant des ellipses disposées comme le sont les directrices (AB, A′B′), (CD, C′D′) et (EF, E′F′) (*fig.* 307). Cela résulte de ce que les sections de l'hyperboloïde sont semblables et concentriques à celles de son cône asymptote (art. **693**); car ce cône, étant du second ordre, a un axe tel, que les sections par des plans perpendiculaires sont des ellipses dans les conditions énoncées. L'hyperboloïde qui n'est pas de révolution est dit *scalène*.

709. Sur la *fig.* 307, la transformation de la projection horizontale est homologique; la droite AB est l'axe d'homologie; le centre est à l'infini dans la direction YY_1.

On peut par cette transformation changer une ellipse en un cercle concentrique, en prenant pour axe d'homologie un diamètre quelconque $a'g'$ (*fig.* 96) et pour centre d'homologie un point situé à l'infini dans une direction arbitraire d'_1m. Si l'on transforme de cette manière toutes les ellipses d'un hyperboloïde scalène situées dans des plans perpendiculaires à l'axe non transverse, en ayant soin de prendre pour axes d'homologie des diamètres situés dans un même

plan et pour centre d'homologie un même point à l'infini dans les plans de ces courbes, on transformera la surface en un hyperboloïde de révolution, car tous les raisonnements que nous avons présentés à l'article précédent sont applicables. Cette transformation constitue une *homologie dans l'espace;* le plan des axes d'homologie est appelé *plan d'homologie;* les droites qui passent par deux points homologues ou *rayons d'homologie* convergent vers un *centre d'homologie* qui, dans le cas actuel, est à l'infini. On voit qu'*un hyperboloïde scalène peut être transformé homologiquement d'une infinité de manières en un hyperboloïde de révolution autour de son axe non transverse.* Les ellipses situées dans des plans perpendiculaires à cet axe deviennent les parallèles. Celle qui a les plus petits axes est homologue du cercle de gorge. On l'appelle *ellipse de gorge.*

Sections planes.

710. Nous considérons un hyperboloïde dans la position où il est représenté sur la *fig.* 307; mais, pour supprimer les petites difficultés qui résulteraient des parties cachées, nous le supposons limité à l'ellipse de gorge $(ab, a'b')$ (*fig.* 313).

Nous prenons pour plan vertical le plan de front AB, et nous supposons la ligne de terre éloignée jusqu'en A'B'.

Si la surface est coupée par un plan $(KK_1, I'K')$, on obtiendra facilement des points de l'intersection en cherchant les traces d'un certain nombre de génératrices sur ce plan. On reconnaîtra la nature de la section à l'aide du cône asymptote (art. **693**), ainsi qu'il est indiqué dans les articles qui suivent.

Les droites cp et c_1p_1, tangentes à l'ellipse ab et parallèles à la ligne de terre, sont les projections de deux génératrices de systèmes différents, qui ont leurs traces aux points p et p_1 et une projection verticale commune $O'p'$. Le plan qui contient ces deux génératrices parallèles est tangent au point infiniment éloigné où elles se rencontrent (art. **692**). Le cône asymptote étant l'enveloppe des plans tangents à l'infini, sa trace $\pi\varepsilon\rho\gamma$ est l'enveloppe des traces de ces plans, et par suite elle est tangente à pp_1; nous savons d'ailleurs qu'elle est homothétique et concentrique avec la trace AB de la surface : nous pouvons donc la construire sans difficulté.

711. Un plan parallèle à $(KK_1, I'K')$ et passant par le centre (O, O') de la surface a pour trace horizontale kk_1 et coupe le cône suivant les deux droites $(O\gamma, O'\gamma')$ et $(O\varepsilon, O'\varepsilon')$. Chacune de ces lignes est parallèle à deux génératrices de systèmes différents, qui se trouvent ainsi parallèles au plan sécant et déterminent une branche infinie. La courbe d'intersection a par conséquent deux branches infinies qui correspondent respectivement à $(O\gamma, O'\gamma')$ et à $(O\varepsilon, O'\varepsilon')$.

Les génératrices parallèles à $(O\gamma, O'\gamma')$ ont pour projections horizontales les

droites hg et $h_1 g_1$, parallèles à $O\gamma$ et tangentes à l'ellipse ab; elles percent le plan horizontal aux points g et g_1 de la trace de l'hyperboloïde. L'asymptote est l'intersection du plan sécant par le plan qui contient ces droites et qui touche la surface à leur point de rencontre, situé sur la courbe à l'infini; la trace de l'asymptote est donc au point v, où se coupent les traces KK_1 et gg_1 de ces plans; ses projections sont les droites vC et $v'C'$, respectivement parallèles à $O\gamma$ et à $O'\gamma'$.

On peut établir la trace gg_1 du plan tangent à l'infini par la seule condition de toucher au point γ la trace du cône asymptote.

On obtient de la même manière la deuxième asymptote (uC, $u'C'$), parallèle à la génératrice ($O\varepsilon$, $O'\varepsilon'$) du cône.

712. Quand dans deux positions différentes la génératrice d'une surface gauche se trouve parallèle à une même droite située dans un plan sécant, la courbe d'intersection présente deux branches infinies, car il y a des génératrices intermédiaires dont les traces sur le plan sont situées entre les points à l'infini. Mais, pour l'hyperboloïde, les deux génératrices parallèles hg, $h_1 g_1$ n'appartiennent pas à un même système. Chaque système suffit complétement à la génération de la surface et n'a qu'une génératrice parallèle à $O\gamma$; il s'ensuit que la courbe n'a qu'une branche infinie dont l'asymptote soit parallèle à $O\gamma$.

713. En appliquant la construction de l'article **711** à la section faite par le plan (kk_1, $i'O'$), qui contient le centre, on trouve que ses asymptotes sont les génératrices ($O\gamma$, $O'\gamma'$) et ($O\varepsilon$, $O'\varepsilon'$) du cône. Il était facile de le prévoir, car ces droites, devant former un système concentrique et homothétique avec la conique suivant laquelle la surface est coupée, en sont nécessairement les asymptotes.

D'après cela, et en faisant passer un plan par le centre et par une sécante quelconque, on reconnaît que *les segments interceptés sur une droite entre l'hyperboloïde et son cône asymptote sont égaux*.

714. Si le plan (kk_1, $i'O'$) parallèle au plan sécant et passant par le centre touchait le cône, les deux génératrices $O\gamma$ et $O\varepsilon$ se confondraient; il n'y aurait dans chaque système qu'une génératrice parallèle au plan (KK_1, $I'K'$), et, le plan (kk_1, $i'O'$) étant tangent à l'infini, l'asymptote intersection de plans parallèles disparaîtrait et la courbe serait une parabole.

Enfin, quand le plan (kk_1, $i'O'$) ne contient aucune génératrice du cône, la section de l'hyperboloïde est une ellipse.

Cônes et cylindres circonscrits.

715. Considérons une courbe du second ordre, section d'un hyperboloïde par un plan qui en contient le centre O, et deux droites Ox et Oy, diamètres conjugués de cette conique (*fig.* 308); si l'on fait tourner le plan autour du diamètre

transverse Ox, il coupera l'hyperboloïde suivant différentes courbes du second ordre qui toutes auront leur centre en O et qui passeront par les points A et A_1. Les diamètres de ces courbes conjugués avec Ox seront parallèles au plan tangent en A et formeront par conséquent un plan qui est le *plan diamétral conjugué* à Ox. Il divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à Ox.

Ce résultat est indépendant de l'existence des points A et A_1, et il subsiste par conséquent quand ces points sont imaginaires. Ainsi donc, si l'on fait tourner le plan autour de Oy, les diamètres qui dans les différentes sections seront conjugués avec Oy se trouveront dans un plan.

716. Supposons maintenant que d'un point S pris sur Ox on mène des tangentes SM et SM_1, et la droite MM_1 sécante de contact, ou polaire de S ; on aura la relation

$$OS \times OP = \overline{OA}^2.$$

Lorsque le plan tourne autour de Ox, les polaires du point S pour les différentes sections passent par le point P déterminé par l'équation ci-dessus, et, comme elles sont toujours parallèles au plan diamétral conjugué avec Ox, elles forment un plan qui est le *plan polaire* du point S.

L'intersection de la surface par le plan polaire est le lieu des points de contact des tangentes issues du point S, et par conséquent la courbe de contact du cône circonscrit qui a son sommet en ce point.

Si le diamètre OS était non transverse (*fig.* 309), les raisonnements seraient les mêmes, mais les segments OS et OP auraient des directions opposées, et leur produit serait une quantité négative $-\overline{OC}^2$.

En résumé, *la courbe de contact d'un cône circonscrit à un hyperboloïde est plane ; son plan est parallèle au plan diamétral conjugué au diamètre qui passe par le sommet du cône.*

717. Quand le diamètre OS est transverse (*fig.* 308), le plan polaire du point S est parallèle au plan tangent en A, et par suite aux deux génératrices qui se croisent à ce point; la ligne d'intersection qu'il détermine est donc une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à ces droites. Nous aurions pu considérer le plan tangent à la seconde extrémité A_1 du diamètre : le résultat eût été le même, car nous savons que les génératrices qui se croisent au point A_1 sont parallèles à celles qui passent au point A (art. **683**). Ces quatre génératrices sont les seules qui soient parallèles au plan polaire du point S, car sans cela la section aurait plus de deux branches infinies; si les points A et A_1 sont imaginaires, c'est-à-dire si le diamètre OS n'est pas transverse (*fig.* 309), le plan polaire du point S coupera toutes les génératrices, et la section sera une ellipse.

Quand le diamètre OS n'est pas transverse (*fig.* 309), il se trouve dans l'inté-

rieur du cône asymptote, et le plan diamétral conjugué, qui n'est alors parallèle à aucune génératrice, coupe le cône suivant son seul sommet. Lorsque ce diamètre est transverse (*fig.* 308), il est extérieur au cône, et le plan diamétral conjugué coupe le cône suivant deux droites respectivement parallèles aux deux génératrices qui passent au point A et à celles qui passent au point A_1. Dans la position intermédiaire, quand le point S est en *s* sur une génératrice OE du cône, les points A et A_1 sont réunis en un seul à l'infini; le plan tangent à l'hyperboloïde en ce point est tangent au cône asymptote le long de la génératrice OE, et, comme il passe par le centre, il est le plan diamétral conjugué à cette droite. Le plan polaire du point *s*, étant alors parallèle à un plan tangent du cône asymptote, coupe la surface suivant une parabole (art. **714**).

Lorsque le point S est sur la surface en A, son plan polaire est le plan tangent en ce point, et la section se compose des deux génératrices qui s'y croisent.

Il résulte de la discussion qui précède que *la ligne d'ombre d'un hyperboloïde est une hyperbole, une ellipse ou une parabole suivant que le diamètre qui passe par le point lumineux est transverse, non transverse, ou qu'il se confond avec une génératrice du cône asymptote. Quand le point lumineux est sur la surface, la ligne d'ombre est formée des deux génératrices qui passent à ce point.* Les considérations que nous avons présentées à l'article **608** pour le paraboloïde montrent comment ces génératrices peuvent former une ligne d'ombre.

En raisonnant comme à l'article **609**, on reconnaît que *la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un hyperboloïde est plane et située dans le plan diamétral conjugué au diamètre parallèle aux génératrices du cylindre.*

L'ombre portée d'un hyperboloïde sur un plan est une conique; il en est de même de son contour apparent.

718. Nous pouvons conclure de là et des théorèmes précédemment démontrés que *les sécantes qui joignent deux à deux les points homologues de deux divisions homographiques dans un plan ont pour enveloppe une conique,* car on peut considérer les deux droites comme les projections de deux directrices rectilignes qui ne se rencontrent pas et qui sont divisées homographiquement. Les sécantes sont alors les projections des génératrices d'un hyperboloïde, et leur enveloppe est une conique, contour apparent de cette surface sur le plan.

Si les directrices se déplacent et viennent par un mouvement continu se mettre dans le plan de projection, l'hyperboloïde s'aplatira et finira par se confondre avec une partie du plan limitée à la conique.

Ligne de striction.

719. Nous allons nous proposer de construire le point central d'une génératrice quelconque d'un hyperboloïde. Nous supposons que cette surface est rap-

portée à deux plans coordonnés respectivement parallèles au plan de l'ellipse de gorge et à un autre de ses plans principaux (*fig.* 311), et qu'elle est déterminée par l'ellipse de gorge $(ab, a'b')$ et par l'hyperbole contenue dans le plan vertical AB; sa trace horizontale est semblable à l'ellipse de gorge (art. **693**).

Le plan tangent à la surface au point situé à l'infini sur une génératrice (PQ, P'Q') contient la génératrice parallèle $(P_1Q_1, P'_1Q'_1)$; le plan central de la génératrice (PQ, P'Q') est perpendiculaire à celui-là; nous l'obtiendrons par la construction de l'article **56**, faite dans un ordre différent ([1]).

La droite Q_1E, perpendiculaire à PQ, peut être considérée comme la trace d'un plan auxiliaire perpendiculaire à la génératrice (PQ, P'Q'); en le rabattant sur le plan horizontal, nous amenons le point où il coupe cette droite en un point V qu'il s'agit de déterminer sur iQ.

La droite iV, considérée dans l'espace avant son rabattement, est perpendiculaire à la génératrice comme étant dans le plan auxiliaire. Pour avoir sa grandeur, nous ramenons le plan vertical PQ dans le plan horizontal par une rotation autour de sa trace PQ. Le point (q, q') se place en q_1 à une distance qq_1 égale à LO'; la droite $(q\text{Q}, q'\text{Q}')$ devient q_1Q, et la perpendiculaire iv fait connaître la longueur cherchée iV.

Les sections faites par le plan auxiliaire dans le plan tangent à l'infini et dans le plan central sont rectangulaires. La première passe par le point Q_1 de la génératrice $(P_1Q_1, P'_1Q'_1)$; elle est en rabattement Q_1V : nous pouvons donc tracer le rabattement VK de la seconde. Quand on remet le plan auxiliaire dans sa position, le point K reste fixe, et l'on voit que la droite QK est la trace du plan central; il ne reste plus qu'à déterminer le point de contact de ce plan.

La génératrice du second système contenue dans le plan central a sa trace au point D, et nous obtenons facilement ses projections CD et C'D' : le point cherché est (m, m').

On peut mener du point D deux tangentes à l'ellipse de gorge, et chacune d'elles est la projection d'une génératrice; mais celle que nous cherchons n'est pas du même système que (PQ, P'Q'), et par conséquent, lorsqu'on les regarde du centre O, le point de contact de l'ellipse de gorge et la trace doivent être, l'une par rapport à l'autre, de côtés différents sur ces deux lignes.

Le point (m, m') n'est pas le point central de la génératrice (CD, C'D'), car, s'il

---

([1]) Il y a deux méthodes pour construire un plan Q perpendiculaire à un plan P et passant par une droite D située dans ce plan. La première consiste à employer un plan auxiliaire M, perpendiculaire à D; les traces de P et de Q sur ce plan sont rectangulaires, et, l'une d'elles étant connue, on obtient facilement l'autre. Dans la seconde méthode, on élève une perpendiculaire N à P par un point quelconque de D, et l'on fait passer un plan par cette droite et par D. Cette dernière construction est généralement plus simple, et, si nous avons préféré l'autre, c'est que le plan auxiliaire M nous sera nécessaire plus loin pour la détermination du paramètre, qui exige un plan Q' incliné à 45° sur P.

l'était, le plan qui y est tangent serait perpendiculaire aux deux plans respectivement tangents aux points de (CD, C'D') et (PQ, P'Q') situés à l'infini, et par suite à la droite (Om, $O'm'$), qui est leur intersection. Or il est facile de voir que ce n'est qu'aux sommets de l'ellipse de gorge que le diamètre est perpendiculaire au plan tangent.

720. Si l'on opère sur la génératrice (PQ, $p'q'$), les constructions se disposent d'une manière identique sur le plan horizontal, en le supposant à la hauteur de la droite A″ B″, et l'on trouve un point central (m, m'') situé sur la verticale du point (m, m') et à la même distance du plan du cercle de gorge. De même, si l'on cherche le point central de la génératrice du deuxième système projeté sur P'Q', on trouve que sa projection verticale est m' et que sa projection horizontale est à la même distance de la droite AB que le point m.

Les deux systèmes ont ainsi des lignes de striction, formées d'arcs appartenant à une même courbe, symétriques par rapport aux plans principaux et qui se superposent en projection sur ces plans.

Il résulte de ces symétries que le centre (O, O') est sur la corde (mn, $m'n'$) qui joint les points centraux de deux génératrices parallèles quelconques [1].

721. Si nous voulons déterminer la longueur du paramètre k pour la génératrice (PQ, P'Q'), nous ferons passer par cette droite un plan incliné à 45° sur le plan central et nous chercherons son point de tangence. Traçant la droite VE, inclinée à 45° sur VK, nous obtenons facilement la trace QE du plan, et, opérant

---

[1] L'équation de l'hyperboloïde étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

la ligne des points centraux des génératrices des deux systèmes est sur le cône représenté par l'équation

$$b^4(a^2+c^2)^2\frac{x^2}{a^2}\frac{z^2}{c^2}+a^4(b^2+c^2)^2\frac{y^2}{b^2}\frac{z^2}{c^2}-c^4(a^2-b^2)^2\frac{x^2}{a^2}\frac{y^2}{b^2}=0. \tag{2}$$

M. Chasles a obtenu ce résultat (*Correspondance mathématique et physique*, t. XI, p. 67) à l'aide du Calcul différentiel et en regardant le point central comme le pied de la commune perpendiculaire à la génératrice considérée et à la génératrice voisine. On y arrive à peu près aussi facilement en cherchant le point de la génératrice où le plan tangent est perpendiculaire au plan tangent à l'infini, et alors l'Algèbre ordinaire suffit pour les calculs qui ne sont que la traduction analytique des constructions de la *fig.* 311.

Lorsque l'hyperboloïde est de révolution, l'équation (2) perd son dernier terme et représente le plan du cercle de gorge, ainsi qu'il était facile de le prévoir.

Quand le coefficient $c^4(a^2-b^2)^2$ est petit relativement aux deux autres, le troisième terme a peu d'importance et la courbe est très rapprochée de l'ellipse de gorge; il est alors difficile de la tracer d'une manière nette et distincte. On doit avoir égard à cette circonstance lorsque l'on dispose les données dans les exercices graphiques que l'on peut se proposer sur cette question.

En éliminant y entre les équations (1) et (2), on trouve, pour représenter la projection de la ligne de

comme précédemment, nous trouvons que le point de contact est (e, e'). La véritable grandeur du segment $(me, m'e')$ est égale au paramètre k [1].

---

striction sur le plan des zx,

$$(3)\qquad b^4(a^2+c^2)^2\frac{x^2}{a^2}\frac{z^2}{c^2}+a^4(b^2+c^2)^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{z^2}{c^2}-c^4(a^2-b^2)^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{x^2}{a^2}=0.$$

Si nous faisons $x=a$, l'équation se divise et donne

$$z^2=0,$$

$$\frac{z^2}{c^2}=\frac{c^4(a^2-b^2)^2-b^4(a^2+c^2)^2}{a^4(b^2+c^2)^2}.$$

La première valeur de z détermine le sommet b' (*fig.* 311). Si l'expression

$$(4)\qquad c^4(a^2-b^2)^2-b^4(a^2+c^2)^2$$

est négative, les autres valeurs sont imaginaires et la tangente en b' ne coupe pas la projection verticale de la ligne de striction; cette projection n'a alors d'inflexion qu'au centre O'.

Quand le binôme (4) est nul, la courbe est surosculatrice de sa tangente en b'; enfin, quand il est positif, la courbe prend la forme indiquée sur la *fig.* 311; elle a quatre inflexions, sans compter celles du centre.

Pour étudier le signe du binôme (4), on peut considérer la différence des racines positives de ses deux termes; on trouve

$$(5)\qquad a^2(c^2-b^2)-2b^2c^2$$

quand a^2 est plus grand que b^2, et

$$-a^2(b^2+c^2)$$

quand b^2 est plus grand que a^2.

La dernière expression est essentiellement négative, mais l'autre peut être positive, nulle ou négative suivant les valeurs relatives de a^2, b^2 et c^2. Il résulte de là que la projection de la courbe sur le plan principal vertical qui contient le grand axe de l'ellipse de gorge est susceptible de trois formes différentes, mais que sa projection sur l'autre plan vertical principal ne peut en avoir qu'une.

La liaison qui existe entre les projections verticales et la projection horizontale montre que cette dernière peut avoir trois formes différentes; elle a quatre inflexions quand l'expression (5) est positive.

L'équation (3) peut être mise sous la forme

$$b^4(a^2+c^2)^2z^2+a^6(b^2+c^2)^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{z^2}{x^2}-c^6(a^2-b^2)^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=0.$$

Si nous appelons γ l'angle que la tangente en O' fait avec l'axe des abscisses O'b', nous aurons à la fois

$$x=0,\quad z=0\quad\text{et}\quad\frac{z}{x}=\operatorname{tang}\gamma;$$

introduisant ces valeurs, nous trouvons

$$\operatorname{tang}\gamma=\pm\frac{c^3}{a^3}\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}.$$

Cette expression permet de calculer rapidement l'angle γ et de vérifier ainsi les tracés.

Par suite d'une erreur d'impression, les facteurs binômes sont à la première puissance dans l'équation donnée par M. Chasles.

(1) Lorsqu'on cherche analytiquement l'expression du paramètre de distribution, en déterminant la génératrice considérée par sa distance d au centre de la surface, on trouve

$$k=\frac{abc}{d^2},$$

a, b et c étant les longueurs des demi-axes.

En déterminant les points analogues à (e, e') sur un grand nombre de génératrices, on pourrait tracer la courbe lieu des points auxquels le plan tangent a une obliquité de 45°.

L'hyperboloïde n'ayant ni sommets ni arêtes, les génératrices d'un même système ont nécessairement des paramètres de même signe. Il est d'ailleurs évident, à la seule inspection d'un dessin de la surface, que les signes sont différents dans les deux systèmes. Cette remarque s'étend naturellement au paraboloïde. La génératrice (PQ, P′Q′) appartient au *système négatif*.

722. Les constructions de l'article **719** peuvent être faites dès que l'on connaît les projections de trois génératrices A, A′, A″ d'un même système sur deux plans coordonnés quelconques. On commence par déterminer un parallélépipède circonscrit à l'hyperboloïde et dont les droites A, A′, A″ sont trois arêtes (art. **682**); on construit ensuite deux génératrices parallèles A‴ et B‴, le plan qui les contient et le plan central de A‴ qui est perpendiculaire à celui-là; on cherche les points de rencontre du plan central de A‴ avec deux des génératrices A, A′ et A″ : la droite passant par ces points est une génératrice du système B et coupe A‴ à son point central. On peut donc déterminer les projections de la ligne de striction, et ensuite par ses points doubles obtenir la position des axes. M. Chasles a indiqué cette méthode pour construire les axes d'un hyperboloïde dont on connaît trois génératrices; elle conduirait à des tracés longs et peu exacts dans la pratique [1].

Représentation d'un hyperboloïde rapporté à ses plans principaux (fig. 310).

723. *On donne les trois axes d'un hyperboloïde; celui qui n'est pas transverse est perpendiculaire au plan horizontal, et l'un des deux autres est parallèle au plan vertical : on demande de représenter par ses contours apparents et par un certain nombre de génératrices d'un même système la partie de la surface comprise entre deux plans parallèles à celui de l'ellipse de gorge et également éloignés de ce plan.*

Les axes sont $(ab, a'b')$, (cd, O') et (O, ef). L'hyperboloïde est limité aux plans horizontaux A′B′ et A″B″.

Les contours apparents sur les deux plans de projection sont l'ellipse de gorge et l'hyperbole principale qui a pour axes $a'b'$ et ef. Nous pourrions tracer immé-

---

[1] Ce problème, admettant trois solutions, exige l'emploi d'une ou de plusieurs courbes. On peut le ramener au problème analogue pour le cône, car les axes de l'hyperboloïde et ceux de son cône directeur sont parallèles. On appliquerait d'ailleurs au cône l'une des constructions que M. Chasles a indiquées à la page 82 de l'*Aperçu historique*.

diatement ces courbes; mais il est préférable de les déterminer comme enveloppes des projections des génératrices.

Les asymptotes $O'p'$ et $O'r'_1$ de l'hyperbole sont des génératrices du cône asymptote (art. **715**); leurs traces π et ρ appartiennent à la trace de ce cône et suffisent à la déterminer, car elle est homothétique et concentrique avec la projection de l'ellipse de gorge.

Le plan $(\pi p', p'O')$, tangent au cône asymptote le long de la génératrice $(O\pi, O'p')$, contient les génératrices de l'hyperboloïde parallèles à cette droite; leurs projections horizontales dp et cp_1 sont d'ailleurs faciles à tracer, car elles passent par les points d et c; nous pouvons donc déterminer les points p et p_1 où elles percent le plan horizontal. Nous obtenons de la même manière les traces r et r_1 des génératrices parallèles à l'asymptote $(O\rho, O'r'_1)$. La trace de la surface est une ellipse passant par ces quatre points, homothétique et concentrique à la projection de l'ellipse de gorge; sa trace sur le plan horizontal supérieur est une ellipse identique à la précédente et qui se superpose à cette courbe en projection horizontale.

Pour mettre de la symétrie dans la position des génératrices représentées, nous allons d'abord les considérer sur un hyperboloïde de révolution résultant d'une déformation homologique de notre hyperboloïde scalène (art. **707**, **708**).

Nous traçons un cercle sur le grand axe AB comme diamètre, et nous y rapportons en P et en R les points p et r, traces sur les plans horizontaux A'B' et A''B'' d'une génératrice parallèle au plan vertical. Nous faisons sur ce cercle deux divisions en trente-deux parties, prenant successivement pour origine les points P et R; nous ramenons les points de division sur l'ellipse, nous relevons les uns sur A'B' et les autres sur A''B''; enfin nous joignons deux à deux ceux qui sont désignés par la même cote [1].

724. Le plan projetant d'une génératrice est tangent au point où cette droite rencontre le contour apparent et contient la génératrice de l'autre système qui passe par ce point. Il suit de là que toute droite projection d'une génératrice est nécessairement la projection d'une autre génératrice. Ainsi la droite mn correspond en réalité à deux projections verticales $m'n'$ et $m'_1 n'_1$; mais la génératrice $(mn, m'_1 n'_1)$ appartient au système que nous n'avons pas représenté, et les droites mn et $m'_1 n'_1$, considérées comme ses projections, devraient avoir des ponctuations inverses de celles que nous leur avons données, c'est-à-dire que les traits pleins devraient être remplacés par des lignes en points ronds, et réciproquement.

---

[1] Les cotes de la division dont l'origine est au point p se rapportent à la trace de la surface sur le plan A'B'; elles sont dans l'intérieur de l'ellipse AB. Celles de l'autre division sont en dehors de cette courbe. Nous avons négligé les cotes dans quelques endroits où leur inscription eût pu rendre la figure confuse.

On voit d'après cela que les droites que nous avons construites sur la figure comme projections de génératrices d'un système représenteront des génératrices de l'autre système si on leur suppose une ponctuation inverse, et qu'on peut ainsi considérer l'un quelconque des deux systèmes séparément ou tous les deux ensemble.

D'après nos conventions (art. **623**), le paramètre k est négatif pour les génératrices du système représenté et positif pour les génératrices du système qui correspond à une ponctuation inverse.

725. Sur le plan horizontal, un point de croisement tel que α est la projection d'un point réel de rencontre dont la projection verticale est à un autre point de croisement α'. Tous les sommets des quadrilatères des réseaux des deux projections se correspondent ainsi sur des perpendiculaires à la ligne de terre. Si nous considérons les points α, β, γ, ..., nous remarquerons que les génératrices qui s'y coupent interceptent sur l'ellipse AB des arcs qui, ramenés sur le cercle, ont des amplitudes égales. Il suit de là que les points qui, sur l'hyperboloïde de révolution, correspondent à (α, α'), (β, β'), ... sont les diverses positions du point de rencontre de deux génératrices de systèmes différents qui se meuvent d'un même mouvement, et par conséquent appartiennent à un parallèle. Donc ces points eux-mêmes sont sur une section de l'hyperboloïde scalène avec un plan horizontal.

On trouve par des raisonnements analogues que les points λ, μ, ν, ... sont en ligne droite, et par suite que les points λ', μ', ν', ... qui leur correspondent appartiennent à une hyperbole projection verticale de la section de la surface par un plan contenant l'axe non transverse. Les génératrices du cône asymptote contenues dans ce plan sont les asymptotes de l'hyperbole (art. **713**).

Nous avons tracé sur le plan vertical la ligne de striction du système représenté; elle est trop rapprochée de l'ellipse de gorge pour qu'il soit possible de l'indiquer d'une manière distincte sur le plan horizontal. En supposant à sa projection verticale une ponctuation inverse, on obtient la ligne de striction du système positif.

726. Les constructions seraient un peu simplifiées s'il y avait coïncidence entre les points des deux divisions du cercle auxiliaire; par conséquent, si dans un exercice graphique on se propose, non de représenter un hyperboloïde déterminé, limité à deux plans donnés, mais de faire des tracés d'où résulte une représentation bien symétrique d'un hyperboloïde quelconque, on pourra prendre l'ellipse trace horizontale pour une de celles sur lesquelles doivent se placer des points de croisement tels que α, β, γ, ... On établira à l'aide du demi-cercle AB une division symétrique par rapport aux axes; on tracera la projection horizontale d'une première génératrice en joignant deux des points arbitrairement choisis; la position des autres droites se trouvera déterminée, et leur enveloppe

donnera l'ellipse de gorge. On placera ensuite sans difficulté les projections verticales des génératrices.

Théorèmes et exercices sur l'hyperboloïde de révolution.

727. *Le cercle de gorge d'un hyperboloïde de révolution est la ligne de striction dans les deux systèmes,* car le plan qui touche la surface au point (e, e'), où une génératrice $(ae, a'e')$ rencontre ce cercle (*fig.* 312), est perpendiculaire au rayon (Oe, e'), et par conséquent au plan mené par le centre et la génératrice, qui est tangent à l'infini.

Si nous déterminons l'obliquité du plan tangent en un point situé sur une génératrice à une distance connue du point central, nous en déduirons facilement le paramètre k qui convient à cette droite et à toutes les autres génératrices, car elles sont évidemment dans des positions relatives identiques.

Considérons la génératrice $(ae, a'e')$ parallèle au plan vertical (*fig.* 312) : la trace horizontale du plan tangent au point (a, a') est la droite aG, tangente au cercle qui forme la trace de la surface; le plan central de la génératrice est vertical. Si nous coupons ces deux plans par un troisième (GO′, O′V) perpendiculaire à la génératrice, les intersections comprendront un angle égal à celui des plans; sa tangente trigonométrique sera d'ailleurs égale à $\frac{e\mathrm{G}}{\mathrm{O'V}}$. Nous aurons donc

$$\frac{a'e}{k} = \frac{e\mathrm{G}}{\mathrm{O'V}}.$$

Mais, en appelant r le rayon du cercle de gorge et α l'angle $e'a'\mathrm{O}'$, nous avons

$$a'e' = \frac{ae}{\cos\alpha}, \quad e\mathrm{G} = \frac{\overline{ae}^2}{r}, \quad \mathrm{O'V} = \overline{ae}\sin\alpha.$$

L'équation ci-dessus donne, lorsqu'on y porte ces valeurs,

$$k = r\,\mathrm{tang}\,\alpha.$$

Le produit $r\,\mathrm{tang}\,\alpha$ est égal à l'ordonnée F′i ou au demi-axe e'I; nous voyons donc que *dans un hyperboloïde de révolution le paramètre de distribution des plans tangents de toutes les génératrices est égal à la moitié de la longueur réelle de l'axe de révolution, considéré comme axe non transverse de la surface.*

On arrive facilement au même résultat en faisant passer par la génératrice considérée un plan incliné à 45° sur le plan central et déterminant la distance de son point de contact au point central.

La valeur de k est positive pour la génératrice (ae, $a'e'$) et pour toutes celles du même système, et négative pour les génératrices de l'autre système.

Quand nous considérerons simultanément deux hyperboloïdes, nous regarderons comme homologues les systèmes dans lesquels le paramètre a le même signe.

728. En un point quelconque d'un hyperboloïde de révolution, le plan méridien fait des angles égaux avec les deux génératrices et est perpendiculaire à leur plan, qui est le plan tangent en ce point. D'après cela, lorsqu'un hyperboloïde est donné par trois directrices rectilignes A, A', A'' (*fig.* 302), pour reconnaître s'il est de révolution on construit une génératrice B''', et à chacun des points a, a' et a'' où elle rencontre une directrice, on détermine un plan perpendiculaire à celui des deux droites et passant par la bissectrice de leur angle. Si la surface est de révolution, ces trois plans sont méridiens et se coupent suivant une même droite, qui est l'axe de la surface.

On peut encore construire sur les directrices A, A' et A'' un parallélépipède DG, en déterminer le centre O, abaisser de ce point des perpendiculaires sur les trois droites A, A' et A'', et enfin voir si ces lignes sont dans un même plan et de même longueur.

729. *Représentation de deux hyperboloïdes de révolution tangents le long d'une génératrice commune.* Quand deux hyperboloïdes de révolution ont des axes non transverses de même grandeur, les paramètres de leurs génératrices sont égaux, et on peut les placer de manière qu'ils se raccordent tout le long d'une droite : il suffit de faire coïncider deux génératrices des systèmes homologues, de manière que les points centraux se superposent et que les plans centraux se confondent en un seul. Les axes des deux hyperboloïdes sont alors parallèles à ce plan, et les centres sont sur la normale commune au point central.

Nous avons représenté sur les *Pl. XLVI* et *XLVII* deux hyperboloïdes de révolution qui se touchent ainsi suivant une droite. Le plan horizontal est parallèle au plan central de la génératrice de contact, et par conséquent à cette droite et aux deux axes de révolution; les projections de ces lignes sont AA_1, MM_1 et mm_1 (*fig.* 314). Le plan vertical est parallèle à AA_1 et les projections verticales des deux axes sont les horizontales $M'M'_1$ et $m'm'_1$ (*fig.* 315). Ces données suffisent pour établir complétement la figure.

Si nous inscrivons dans l'angle M_1Om_1 une droite Vv perpendiculaire à OA_1 et égale à la distance $o'O'$ des axes, nous aurons

$$Vu \cot\widehat{VOu} = vu \cot\widehat{vOu} = uO.$$

Mais chacun des angles VOu et vOu est, pour une des surfaces, le complément de l'angle que nous avons appelé α à l'article **727**; donc, si nous prenons les seg-

ments Vu et vu pour rayons des cercles de gorge, les deux hyperboloïdes auront des axes non transverses de même grandeur et se raccorderont.

Nous rapportons en ω sur $o'O'$ le point de division u du segment vV, qui est égal à la distance des axes de révolution, et nous traçons la projection verticale $A'\omega A'_1$ de la génératrice de contact.

Nous prenons sur cette droite une longueur (AA_1, $A'A'_1$) partagée en deux parties égales par le point central (O, ω), et nous limitons chaque surface aux parallèles qui passent par les points extrêmes (A, A'), (A_1, A'_1); nous déterminons facilement les traces horizontales de leurs plans, puis leurs centres (M, M'), (M_1, M'_1), (m, m'), (m_1, m'_1), et ensuite leurs rayons, qui sont les vraies grandeurs des lignes (MA, M'A'), (mA, m'A'). Nous avons alors les longueurs des droites qui sont les projections horizontales des parallèles, et nous pouvons tracer les ellipses qui forment leurs projections verticales.

730. Le contour apparent de chaque surface sur le plan horizontal est une hyperbole méridienne; son axe transverse est égal au diamètre du cercle de gorge, et son axe non transverse au double de la longueur Ou. La ligne AA_1, projection d'une génératrice horizontale, est une des asymptotes; on détermine facilement l'autre, qui est GG_1 pour le premier hyperboloïde et gg_1 pour le second.

Les contours apparents par rapport au plan vertical sont les sections des surfaces par les plans diamétraux qui sont conjugués avec les projetantes (art. **717**), et dont par conséquent les traces horizontales sont, par rapport aux projections des hyperboles méridiennes horizontales, les diamètres conjugués à la direction OO'. On obtient facilement ces droites en opérant sur les asymptotes.

Nous traçons entre les lignes GG_1 et gg_1 une droite Ss, parallèle à A_1A; nous prenons les longueurs OS_1 et Os_1 respectivement doubles des segments OS et Os, et les diamètres PP_1 et vp_1 parallèles à S_1R et s_1R sont les traces des plans cherchés (¹).

Pour chaque hyperboloïde, l'axe vertical de l'hyperbole qui forme le contour apparent est égal au diamètre du cercle de gorge; on peut déterminer ses asymptotes de diverses manières. Nous les considérerons comme les intersections du cône asymptote par le plan de la courbe.

Le plan vertical LF coupe le cône asymptote du premier hyperboloïde suivant un cercle dont le rayon est MG; si nous rabattons ce cercle sur le plan horizontal qui contient l'axe de révolution, nous déterminerons l'ordonnée $P\pi''$ de la trace de la génératrice PP_1 du cône asymptote. Prenant $\pi\pi'$ et $\pi_1\pi'_1$ (*fig.* 315) égaux à $P\pi''$ (*fig.* 314), nous obtenons les points π' et π'_1 qui déterminent les asymptotes $O'\pi'$ et $O'\pi'_1$. Nous n'avons pas prolongé ces droites au delà du centre O' par

(¹) Cette construction est analogue à celles des articles 598 et 643.

crainte de confusion, et pour le même motif nous n'avons pas conservé sur la figure les asymptotes du contour apparent de l'hyperboloïde supérieur.

Si le plan vertical PP_1 n'avait rencontré le cône asymptote qu'à son sommet, le contour apparent de l'hyperboloïde aurait été une ellipse.

731. Nous avons tracé sur chaque hyperboloïde onze génératrices du système auquel appartient la génératrice de contact, en les disposant de manière à partager avec elle la surface en douze parties égales. Pour cela, le parallèle extrême LF ayant été rabattu comme nous l'avons dit plus haut, nous l'avons divisé en douze parties à partir du point A'', qui se projette en A. Afin de dégager la figure, nous avons placé l'une sur l'autre les deux moitiés supérieure et inférieure du parallèle : le point de division qui arrivait en G'' a été ainsi ramené en G'''.

La division du parallèle extrême du second hyperboloïde a été faite de la même manière.

732. D'après ce que nous avons vu à l'article **628**, les hyperboloïdes peuvent se raccorder, le long des deux mêmes génératrices réunies en une seule droite, dans trois autres positions relatives; mais il n'y en a qu'une qui soit réellement différente, celle que l'on obtiendrait en faisant tourner une des surfaces de 180° autour de la génératrice de contact. Si l'un des hyperboloïdes tournait de 180° autour de la normale commune au point central (O, ω), par suite des symétries qui existent, le système des surfaces présenterait les mêmes apparences.

Avec les données que nous avons choisies, on aurait reconnu que les centres des hyperboloïdes devaient être d'un même côté du point central, et par conséquent que l'un d'eux devait se trouver dans l'intérieur de l'autre, si la perpendiculaire Vv à la projection AA_1 de la génératrice de contact avait rencontré les axes MM_1 et mm_1 d'un même côté de cette droite (*fig.* 314). Les rayons uv et uV eussent été en effet de même signe.

733. Quand deux hyperboloïdes A et A_1 se raccordent le long d'une génératrice G, un plan contenant cette ligne et un point N de leur intersection les touche en un point M de G et coupe chacun d'eux suivant une génératrice (art. **617**, **692**). Ces droites, passant par les points M et N, se confondent nécessairement. L'intersection complète est donc formée de lignes droites.

Les surfaces étant du second ordre, la projection de l'intersection est donnée par une équation du quatrième degré qui doit se décomposer en deux équations du second, dont l'une représente deux fois la génératrice G; l'autre correspond à deux droites réelles ou imaginaires.

734. Les génératrices d'intersection sont évidemment parallèles à celles suivant lesquelles se coupent les cônes directeurs, en les supposant placés de manière à avoir leurs sommets en un même point; mais il importe de voir que, toutes les fois que les cônes auront des droites communes, les hyperboloïdes se couperont suivant des droites parallèles à celles-là.

Les génératrices B et B_1 des deux surfaces qui passent par un point quelconque C de la génératrice de contact G sont, ainsi que cette droite, dans le plan tangent en C; leurs homologues b, b_1 et g, sur les cônes directeurs, sont donc aussi dans un même plan, et par suite tout plan passant par g coupe les cônes suivant deux droites dont les homologues sur les seconds systèmes des deux hyperboloïdes se croisent en un point de G. Par conséquent, si les cônes se coupent le long d'une droite, les génératrices homologues de cette ligne dans les seconds systèmes passeront par un même point, et, comme d'ailleurs elles seront parallèles, elles se confondront.

Les cônes, étant tangents le long de g, doivent se couper suivant deux droites (réelles ou imaginaires) qui peuvent se confondre en une seconde génératrice de contact : les hyperboloïdes ont donc deux droites d'intersection (réelles ou imaginaires) ou une nouvelle génératrice de raccordement qui n'appartient pas au même système que la première.

735. Sur la *fig.* 314, les cônes asymptotes sont projetés sur les espaces angulaires GOA et G_1OA_1, gOA et g_1OA_1 qui n'ont pas de partie commune. Leurs projections seront les mêmes, si on les transporte verticalement, de manière à faire coïncider leurs sommets en un point de la verticale du point O; les cônes directeurs ne se coupent donc pas, et les hyperboloïdes n'ont en commun que la génératrice AA_1.

Nous avons représenté en projection horizontale, sur la *fig.* 316, deux hyperboloïdes de révolution en contact, comme les précédents, le long d'une génératrice, mais tels, que les projections des cônes asymptotes se superposent en partie. Nous allons rechercher si les hyperboloïdes ont des génératrices communes : nous ferons les opérations à l'aide de la seule projection horizontale et des plans verticaux auxiliaires perpendiculaires aux axes non transverses. Les lettres indiquent la concordance des *fig.* 314 et 316.

Lorsque les cônes ont été transportés verticalement de manière que leurs sommets coïncident, leurs sections par les plans verticaux fl, b_1h_1, FL et B_1H_1 sont des cercles situés sur une même sphère dont le centre est en O et dont le rayon est OA; donc le point Q où se coupent les traces AG et A_1g_1 est la projection de deux points de rencontre des cercles. Si nous rabattons le plan FL, nous pourrons placer en Q′ l'un des points qui se projettent horizontalement en Q, et alors les droites OQ, MQ′ seront les projections horizontale et verticale d'une génératrice d'intersection des cônes. Pour éviter la confusion sur le plan horizontal, nous avons rabattu les parties inférieure et supérieure du plan vertical l'une sur l'autre; d'après cela, nous aurons la projection verticale de la seconde génératrice d'intersection en considérant la droite MQ′ comme appartenant au second rabattement.

Il est maintenant facile de déterminer les génératrices d'intersection des hyper-

boloïdes : ce sont les droites (Rr, $R''\rho$) et (Ss, $S'\sigma$) appartenant aux seconds systèmes et respectivement parallèles à la ligne (OQ, MQ′) dans ses deux positions.

Sur le plan vertical FL, les points qui sont dans leur véritable position par rapport à la trace A′ de la génératrice de contact sont indiqués par des lettres ayant un seul accent, et ceux qui devraient être de l'autre côté de la ligne de terre et qui ont été ramenés du côté des premiers, par des lettres ayant deux accents. On voit d'après cela que les droites (Rr, $R''\rho$) et (Ss, $S'\sigma$) rencontrent le plan vertical FL, la première au-dessous du centre M et la seconde au-dessus de ce point.

Nous avons vérifié les tracés en faisant les déterminations à l'aide du plan vertical *fl*, perpendiculaire à l'axe du cône supérieur. Nous avons mis un seul accent aux lettres qui désignent les points dont la position par rapport à la trace a' n'a pas été modifiée.

Les droites (Rr, $R''\rho$) et (Ss, $S'\sigma$) rencontrent la génératrice de contact aux points α et β; elles ne sont vues que sur de petites longueurs, depuis les points λ et μ, où elles touchent le contour apparent de l'hyperboloïde supérieur, jusqu'aux points R_1 et S_1 situés sur les bases de l'hyperboloïde inférieur. Au delà de ces points, elles seraient encore vues sur la première de ces surfaces, mais elles ne sont plus lignes d'intersection [1].

736. Les cônes et par suite les hyperboloïdes se coupent toutes les fois que la somme des angles gOA et AOG est supérieure à 180°, c'est-à-dire quand l'angle MOm, qui est formé par les axes et qui comprend la génératrice de contact OA, est obtus. Quand cet angle est droit, les secondes asymptotes GG_1 et gg_1 des hyperboles méridiennes se réunissent en projection sur le plan horizontal, et les génératrices du second système qui leur sont parallèles dans le plan tangent en ω (*fig.* 315) se confondent également. Comme, d'ailleurs, les surfaces se touchent en ce point central, et que le paramètre est le même, les deux génératrices réunies forment une seconde droite de raccordement.

En analysant les constructions de la *fig.* 316, on reconnaît facilement que, dans le cas qui nous occupe, les lignes d'intersection Rr et Ss se confondent avec la nouvelle génératrice de contact.

737. Les droites vO et VO (*fig.* 314) étant supposées à angle droit, chaque cercle de gorge est dans le plan méridien de l'autre surface; on a d'ailleurs

$$\operatorname{tang} u\mathrm{OV} \operatorname{tang} u\mathrm{O}v = 1 \quad [2]$$

ou

$$\frac{u\mathrm{V}}{\mathrm{O}u} \times \frac{uv}{\mathrm{O}u} = 1.$$

(1) L'intersection des hyperboloïdes se dessine très-bien sur une projection verticale. La construction de cette projection est un bon exercice graphique.

(2) Si nous mettions les signes en évidence, le produit des tangentes serait — 1, ce qui indiquerait que les rayons R et r doivent être dirigés en sens contraire à partir du point de contact.

Si l'on appelle R et r les rayons des cercles de gorge, et c la longueur Ou qui est celle des demi-axes non transverses des hyperboles méridiennes des deux surfaces (art. **729**), l'équation précédente deviendra

$$Rr = c^2.$$

Les rayons de courbure des hyperboles méridiennes à leur sommet ω sont $\frac{c^2}{R}$ et $\frac{c^2}{r}$; la formule que nous venons de trouver exprime donc que, *quand deux hyperboloïdes de révolution se raccordent le long de deux génératrices, chaque cercle de gorge est osculateur de l'hyperbole méridienne de l'autre surface*, et, comme ces courbes ne se traversent pas, *le contact s'élève au troisième ordre*.

738. Dans le cas de la *fig.* 316, si l'on ne conservait de chaque surface que les parties respectivement comprises entre les cercles de gorge et les bases fl et FL, les hyperboloïdes se toucheraient sans se couper.

Si l'un des hyperboloïdes était dans l'intérieur de l'autre, les cônes directeurs, placés de manière à avoir leurs sommets en un même point, n'auraient en commun que leur génératrice de contact, et par conséquent les surfaces ne se couperaient pas. Il est d'ailleurs facile de voir, sur la *fig.* 316, que, si l'un des hyperboloïdes faisait une révolution de 180° autour de la droite A_1A, le point d'intersection analogue à Q serait sur les prolongements des projections des bases, et que par suite il ne correspondrait à aucun point de la sphère que nous avons considérée.

Hyperboloïde employé comme surface auxiliaire.

739. Soit G une génératrice d'une surface gauche déterminée par trois directrices A, B et C (*fig.* 236); en remplaçant les courbes par leurs tangentes R, S et T aux points m, n et p où elles rencontrent la génératrice, on obtient un hyperboloïde qui touche la surface à ces points et qui, par conséquent, se raccorde avec elle tout le long de G.

Quand les trois tangentes sont dans un même plan, l'hyperboloïde se réduit à ce plan, qui est le plan tangent unique de la surface en tous les points de la génératrice, sauf au sommet, car il y en a nécessairement un à distance finie ou à l'infini (art. **629**).

Lorsque deux tangentes R et S sont dans un même plan, et que la troisième T ne s'y trouve pas, la surface a un sommet en p. Le plan de rebroussement en ce point est déterminé par les droites G et T, et le plan des droites R et S est le plan tangent unique de la surface à tous les autres points de G.

Les raisonnements que nous avons présentés à l'article **614** ne sont pas appli-

cables sans restriction à ces cas, car nous avons supposé que tout plan sécant coupait les deux génératrices consécutives en deux points distincts, ce qui n'a pas lieu à un sommet.

740. Dans le cas général, quand deux quelconques des tangentes ne sont pas dans un même plan, la surface est un hyperboloïde (ou un paraboloïde), et il y a raccordement. Si maintenant on suppose que la directrice T tourne autour du point p et dans le plan tangent en ce point, l'hyperboloïde se modifiera en restant toujours tangent aux divers points de G, et il sera un paraboloïde quand la directrice mobile T se confondra avec l'intersection du plan tangent en p avec un plan passant en ce point et parallèle aux deux directrices R et S. Nous obtenons ainsi une infinité d'hyperboloïdes et un paraboloïde, tous de raccordement.

En considérant l'une quelconque des positions de T et faisant tourner séparément chacune des deux autres directrices rectilignes dans son plan tangent, nous obtiendrons d'autres hyperboloïdes qui seront des paraboloïdes dans toutes les positions, en nombre infini, où les trois tangentes directrices se trouveront parallèles à un même plan.

741. Considérons une génératrice G d'une surface gauche et une droite D située d'une manière quelconque dans l'espace, sous la seule condition de ne pas rencontrer G : trois plans passant par D coupent la surface suivant trois courbes A, B et C dont les tangentes R, S et T aux points où elles rencontrent G déterminent un hyperboloïde de raccordement sur lequel D est une génératrice du même système que G, car elle rencontre les trois directrices R, S et T; les génératrices de l'autre système rencontrent les deux droites G et D, et sont tangentes aux différentes sections faites dans la surface par des plans passant par D. Nous concluons de là deux théorèmes :

1° *Si l'on coupe une surface gauche par une série de plans passant par une droite, les tangentes de toutes les sections aux points situés sur une même génératrice formeront un hyperboloïde.*

2° *On peut toujours déterminer un hyperboloïde qui touche une surface gauche le long d'une génératrice et qui contienne une droite non située dans un même plan avec la génératrice, mais d'ailleurs quelconque.*

On peut considérer un hyperboloïde de raccordement comme déterminé par la génératrice G, la génératrice de la surface gauche qui lui est infiniment voisine et une droite D. L'hyperboloïde se change en un paraboloïde quand ces trois droites sont parallèles à un même plan, et par suite quand la droite D est parallèle au plan tangent de la surface au point de G situé à l'infini (art. **592**).

742. Les hyperboloïdes de raccordement à une surface gauche le long d'une génératrice G ont les mêmes plans tangents aux divers points de cette droite, et notamment à celui qui est à l'infini; mais chaque plan tangent d'un hyperboloïde à l'infini contient le centre de cette surface (art. **683**, **692**); donc *tous les hyper-*

boloïdes de raccordement à une surface gauche le long d'une génératrice ont leurs centres dans un même plan, qui n'est autre que le plan tangent à l'infini.

743. Tout hyperboloïde de révolution dont l'axe non transverse est double du paramètre de la génératrice considérée sur la surface gauche peut être placé de manière à se raccorder avec elle (art. **628** et **727**); *une surface gauche se raccorde* donc *avec une infinité d'hyperboloïdes de révolution le long d'une génératrice donnée. Les centres de ces hyperboloïdes sont* évidemment *sur la normale au point central.*

Une normale à une surface de révolution coupe l'axe; toutes les normales à une surface gauche aux divers points d'une génératrice G rencontrent donc les axes des hyperboloïdes de révolution qui se raccordent avec la surface le long de G, et par suite ces axes forment les génératrices du second système du paraboloïde des normales (art. **620**).

CHAPITRE V.

SURFACES DONT LES GÉNÉRATRICES NE SONT PAS PARALLÈLES A UN MÊME PLAN.

Plans tangents. Cônes et cylindres circonscrits.

744. On peut résoudre, pour les surfaces gauches en général, le problème du plan tangent en un point donné, et celui du point de contact d'un plan contenant une génératrice, en employant un hyperboloïde de raccordement.

Considérons une surface déterminée par trois directrices A, B et C (*fig.* 322), et proposons-nous de construire son plan tangent en un point μ d'une génératrice G. L'hyperboloïde qui a pour directrices les tangentes R, S et T se raccorde avec la surface le long de G. Nous déterminons les génératrices G′ et G″ de cette surface, qui passent par deux points m' et m'' arbitrairement choisis sur l'une des tangentes (art. **682**), et, les prenant pour directrices, nous construisons la génératrice $\mu\tau$ du second système qui passe au point μ. Le plan tangent cherché est déterminé par les droites G et $\mu\tau$.

Si l'on cherche le point où un plan contenant la génératrice G touche la surface, on déterminera, comme précédemment, deux génératrices G′ et G″ d'un hyperboloïde de raccordement, et l'on construira les traces μ' et μ'' de ces droites sur le plan : les génératrices $\mu'\mu''$ et G formeront son intersection avec l'hyperboloïde, et leur point de rencontre μ sera le point de contact cherché.

Cette construction permet de déterminer par points la courbe de contact d'un cône circonscrit dont le sommet est donné (art. **646**).

745. On peut, pour la solution de ces problèmes, commencer par changer l'hyperboloïde en un paraboloïde (art. **740**), et alors il n'est nécessaire de construire qu'une génératrice du même système que celle qui passe par le point donné ou qui est contenue dans le plan.

Par le point p, où cette génératrice G (*fig.* 323) rencontre l'une des directrices, nous faisons passer un plan Q parallèle aux tangentes R et S des autres directrices, et nous prenons son intersection T′ avec le plan qui contient la génératrice G et la tangente T, et qui, par conséquent, est tangent en p. Les droites R, S et T′ déterminent un paraboloïde de raccordement dont nous construisons une génératrice G′ de même système que G.

Maintenant, si l'on veut avoir le plan tangent en μ, on fera passer par ce point un plan parallèle à Q, et l'on cherchera le point μ' où il coupe G′. La droite $\mu\mu'$ est une génératrice du second système; elle se trouve avec G dans le plan demandé.

Si, au contraire, on cherche le point de contact d'un plan donné contenant G, on construira son intersection μ' avec G′, et par ce point on mènera un plan parallèle à Q, qui coupera G au point demandé μ.

746. Quand la surface est donnée par deux directrices A et B et un cône directeur C (*fig.* 325), on détermine les tangentes R et S des courbes, et le plan tangent P du cône directeur le long de la génératrice g parallèle à G. Le paraboloïde qui a pour directrices les droites R et S et pour plan directeur le plan P se raccorde avec la surface le long de G (art. **614**). Les problèmes sont donc ramenés à ceux que nous avons résolus aux articles **644**, **645** et **646**.

747. Nous avons vu (art. **615**) que les plans tangents du cône directeur sont respectivement parallèles aux plans passant par les différentes génératrices et tangents à l'infini. Il résulte de là que les génératrices (autres que les arêtes) auxquelles correspondent les branches infinies de la courbe de contact d'un cylindre circonscrit sont parallèles aux génératrices du cône directeur le long desquelles le plan tangent est parallèle au cylindre, ce qui permet de les déterminer.

Il n'est pas aussi facile d'obtenir les génératrices auxquelles correspondent les branches infinies de la courbe de contact d'un cône circonscrit dont le sommet S est donné. On y parviendrait en menant du point S des plans tangents à la développable asymptote ; mais cette construction exige que l'on ait tracé au préalable l'intersection de cette surface par un plan contenant le sommet S. On peut souvent disposer des courbes d'erreur qui conduisent plus simplement à la solution du problème.

748. Pour construire les asymptotes des branches infinies d'une section plane

on cherche les génératrices du cône directeur qui sont parallèles au plan sécant, on détermine les génératrices de la surface qui leur sont parallèles, et on prend l'intersection du plan sécant par les plans passant par ces dernières droites et respectivement parallèles aux plans tangents du cône. Nous avons donné, à l'occasion de l'hyperboloïde, un exemple de cette construction (art. **711**).

Nous rappellerons qu'une section plane peut avoir d'autres branches infinies que celles qui correspondent aux génératrices parallèles au plan (art. **599**). On ne peut donner aucune règle générale pour déterminer les asymptotes de ces branches.

Nous allons maintenant étudier sur une surface spéciale les tracés relatifs aux surfaces gauches qui n'ont pas de plan directeur.

Surface du biais passé.

749. La surface du *biais passé* est la surface gauche dont les directrices sont deux cercles égaux et situés dans des plans parallèles, et une droite perpendiculaire à leurs plans et passant par le milieu de la ligne qui joint leurs centres.

Nous prenons pour plan horizontal celui qui contient les centres des cercles et la directrice rectiligne; le plan vertical est parallèle aux plans des cercles.

Un plan auxiliaire $(O_1 O', M'n')$ passant par la directrice rectiligne $(O_1 O_2, O')$ (*fig.* 317) coupe en deux points chacun des cercles $(AB, A'M'B')$, $(CD, C'n'D')$, et détermine quatre génératrices. Les deux génératrices alternes $(Mn, M'n')$ et $(Nm, N'm')$ rencontrent la directrice rectiligne au milieu O du segment $O_1 O_2$ intercepté par les plans des cercles; l'ensemble de ces lignes forme donc un cône qui a son sommet en ce point. Les génératrices externes $(Mm, M'm')$ et $(Nn, N'n')$ coupent la directrice rectiligne en des points différents, et par suite leur lieu n'est pas un cône, mais une surface gauche (art. **464**), celle que nous voulons étudier.

750. *Centre. Plan principal.* Il résulte des symétries de la figure que les droites $(Mm, M'm')$ et $(Nn, N'n')$ sont parallèles et à égales distances du point (O, O'); comme d'ailleurs cette disposition se reproduit pour tous les couples de génératrices contenues dans les plans auxiliaires, nous voyons que la surface a un centre, qui est le point (O, O').

Un second plan auxiliaire $(O_1 O', M'_1 n'_1)$, faisant avec le plan horizontal un angle $M'_1 O'A'$ égal à $N'O'D'$, contient deux génératrices qui ont avec les précédentes des positions symétriques par rapport au plan horizontal de projection. Ce dernier plan est donc un plan principal de la surface.

Les quatre génératrices

$$(Mm, M'm'),\qquad (Mm, M'_1 m'_1),$$
$$(Nn, N'_1 n'_1),\qquad (Nn, N'n')$$

peuvent être considérées comme formant un *groupe* caractérisé par la grandeur absolue de l'angle $n'O'D'$.

751. *Sommets.* Le plan horizontal contient les deux génératrices (AC, A'C'), (BD, B'D') (*fig.* 317), qui forment un *groupe simple.* Lorsque la première passe à la position voisine, elle décrit un élément plan, en glissant sur les tangentes verticales des directrices circulaires aux points (A, A') et (C, C'), et en tournant autour du point (I, O') de la directrice droite. Ce point est donc un sommet; il en est de même du point (J, O'), situé sur la génératrice (BD, B'D').

A chaque sommet, le plan de rebroussement est déterminé par la génératrice et la directrice (IJ, O') (art. **739**) : c'est le plan horizontal de projection. Aux autres points des génératrices horizontales AC et BD, le plan tangent est vertical.

Le segment IOJ de la directrice rectiligne est parasite (*fig.* 317); mais on reconnaît facilement que, lorsque les projections verticales des directrices circulaires ne se rencontrent pas (*fig.* 318), le segment parasite de la directrice rectiligne est celui qui s'étend du point I au point J en passant par l'infini, tandis que le segment IOJ est double sur la surface.

752. *Arêtes.* Lorsque la trace verticale du plan auxiliaire est tangente aux projections des directrices circulaires, les deux génératrices parallèles (Mm, $M'm'$) et (Nn, $N'n'$) (*fig.* 318) se confondent en une seule (pq, $p'q'$), qui est par conséquent une arête; la génératrice symétrique (pq, $p'_1q'_1$) est également une arête. On voit, en effet, que ces deux droites forment le contour apparent de la surface sur le plan vertical, et par conséquent qu'un même plan perpendiculaire au plan vertical est tangent à la surface tout le long de chacune d'elles.

Les points p et q sont à égales distances des points O_1 et O_2; il en résulte que la projection horizontale pq passe par le centre O de la surface et que les arêtes se croisent en ce point.

Les arêtes forment un groupe simple qui correspond à la valeur maximum de l'angle $n'O'D'$.

Dans la disposition adoptée sur la *fig.* 317, aucune génératrice ne passe par le centre, et la surface n'a pas d'arêtes. Le plan vertical (O_1O_2, P_1P) contient deux génératrices qui forment un groupe simple.

Si les projections verticales des directrices circulaires étaient tangentes l'une à l'autre, la surface se décomposerait en deux cônes; elle se réduirait à un cylindre si ces projections se confondaient.

753. *Relations d'homologie.* Les directrices circulaires sont, sur la projection verticale, deux figures homologiques dans lesquelles les points M' et m' situés sur une même génératrice se correspondent (*fig.* 317 ou 318). Le point O' est le centre, et la droite $O'z$ l'axe d'homologie.

Pour démontrer cette proposition, on peut considérer un cône dont le sommet S se projetterait en O' (*fig.* 320 *a*) et qui aurait pour directrice le cercle (A'B', A''B'').

On trouve que le second cercle C′D′ est la projection d'une section faite par un plan C″D″ contenant la droite (PP_1, O″), ce qui, d'après les définitions que nous avons données (art. **401**), suffit pour établir les relations d'homologie.

Il résulte de là que les tangentes des directrices circulaires à deux points homologues M′ et N′ (*fig.* 319) se rencontrent en un point U de la droite O′*z*.

754. *Cône directeur.* Nous menons par le point (O, O′) (*fig.* 318) une droite (Oμ, O′μ') parallèle aux génératrices (M*m*, M′*m′*) et (N*n*, N′*n′*) : la trace μ' de cette droite sur le plan vertical CD se trouve à égales distances des points *m′* et *n′* (art. **750**), et par suite au pied de la perpendiculaire qui serait abaissée du centre F du cercle C′D′. Le lieu des points μ', trace du cône directeur placé de manière à avoir son sommet au centre (O, O′), est donc le cercle décrit sur O′F comme diamètre. Sa trace sur le plan XY de la première directrice (*fig.* 319) est le cercle EO′ (¹).

La surface n'a pas de génératrices parallèles aux génératrices du cône directeur qui ont leur trace sur l'arc $q'O'q'_1$ (*fig.* 318). Le cône a donc une partie parasite quand les projections verticales des directrices circulaires ne se coupent pas. Les génératrices (O*q*, O′*q′*) et (O*q*, $O'q'_1$), qui limitent la partie utile, sont parallèles aux arêtes de la surface (²).

755. Nous nous proposons de construire le plan tangent de la surface en un point (*m*, *m′*) situé sur une génératrice (MLN, M′O′N′) (*fig.* 319).

Nous remplaçons les deux cercles par leurs tangentes (X_1Y_1, UM′), (XY, UN′), et, conservant la directrice rectiligne, nous avons un hyperboloïde de raccorde-

---

(¹) Quand une surface gauche est algébrique et de degré *n*, son cône directeur est également algébrique et d'un degré qui s'élève au plus à *n*, car on peut le considérer comme ayant pour directrice la section de la surface par un plan situé à l'infini, et cette courbe ne peut pas être d'un degré supérieur à *n*.

Si les génératrices de la surface sont parallèles deux à deux, trois à trois..., son cône directeur sera double, triple..., et d'un degré égal, au plus, à $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{3}n$, ... On peut quelquefois, par des considérations de cette nature, reconnaître qu'une surface d'un ordre élevé a un cône directeur du second degré, ce qui est d'un grand intérêt pour les constructions.

On est encore assuré qu'une surface gauche a un cône directeur du second degré quand elle est coupée suivant des coniques par une série de plans parallèles, ou plus généralement par une série de plans disposés de telle manière que l'un d'eux soit à l'infini. Dans ce cas, le cône directeur est simple.

Le cône directeur de la surface du biais passé est double et du second ordre; il en résulte que la surface est du quatrième ordre. Cette proposition sera démontrée directement à l'article 770.

(²) Si l'on transporte parallèlement à elles-mêmes toutes les génératrices du conoïde représenté sur la *fig.* 299, de manière à les faire passer par un même point, le lieu de ces droites sera une surface plane limitée aux parallèles des arêtes. On doit donc regarder le cône directeur de cette surface comme ayant des parties parasites, ainsi que celui du biais passé. Cette circonstance se présente toutes les fois que le cône est double; lorsqu'il est simple, il a des rebroussements le long des génératrices parallèles aux arêtes. Nous supposons que les directrices de la surface gauche n'ont ni inflexions ni rebroussements.

ment (art. **739**) [1]. Le plan horizontal contenant l'axe (LO, O'), qui est une directrice de l'hyperboloïde, coupe cette surface suivant une autre droite que l'on obtient en joignant les traces a et b des deux tangentes UM' et UN'.

Une génératrice est parallèle à l'axe de la surface (art. **683**) et, comme elle, perpendiculaire au plan vertical. Les projections sur ce plan des génératrices du second système divergent de sa trace, et, comme nous connaissons deux d'entre elles, M'U, N'U, nous avons immédiatement le point de concours U et nous pouvons tracer la projection Um' de la génératrice du second système qui passe au point considéré, puis obtenir sa trace horizontale q sur ab.

La trace du plan tangent est déterminée par les traces L et q des deux génératrices qui se croisent au point (m, m').

Le point de rencontre U est sur l'axe d'homologie Oz. Les longueurs UM', UN' sont égales, car les cercles ont des positions symétriques par rapport à la droite $O'z$, et par suite les deux tangentes menées du point U à l'un d'eux sont égales aux deux tangentes menées de ce point à l'autre.

755 *a*. On peut employer comme surface auxiliaire de raccordement le paraboloïde qui a pour directrices les tangentes M'R' et N'K', et pour plan directeur le plan tangent au cône directeur le long de la génératrice $\mu'O'\nu'$, puis opérer comme il est indiqué à l'article **746**.

Les traces du plan directeur sur les plans verticaux X_1Y_1 et XY sont les droites $\mu'D'$ et $\nu'G'$, tangentes aux traces du cône. Les directrices M'R' et N'K' du paraboloïde rencontrent respectivement ces lignes en R' et en K'; la droite (RK, R'K') est donc l'intersection du paraboloïde par le plan directeur, c'est-à-dire une génératrice du même système que MN (la génératrice G' de la *fig.* 325).

Le deuxième plan directeur est parallèle aux plans verticaux de projection; la seconde génératrice qui passe par le point (m, m') a donc pour projection horizontale la droite mP, parallèle à XY : nous relevons en P' sur R'K' le point P, où elle rencontre la génératrice RK. Le plan tangent est déterminé par les deux génératrices (MN, M'N') et $(Pp, P'p')$; ses traces verticales sont les droites $M'r'$ et $N'k'$, parallèles à $P'p'$; sa trace horizontale est pLs.

Les trois points (r, r'), (P, P') et (k, k') appartiennent au plan tangent de la surface en (m, m') et au plan tangent du cône directeur le long de la génératrice $\mu'\nu'$; ils doivent donc être sur une droite parallèle à (MN, M'N'). La trace horizontale v de cette droite est l'intersection des traces pLs et DOG des deux plans.

756. On détermine le point où un plan qui contient une génératrice touche la

---

[1] Dans la première édition, nous avions seulement indiqué cette solution. Nous la développons telle qu'elle a été exposée par M. Mannheim dans son Cours à l'École Polytechnique. L'emploi d'un point de concours lui donne une grande analogie avec la construction de l'article 645.

surface par les constructions de l'un des deux articles précédents faites en ordre inverse. En employant un paraboloïde, on peut résoudre le problème par des tracés faits seulement sur le plan vertical.

La génératrice M'N' et les traces M'r' et N's' du plan étant connues (*fig.* 319), nous déterminons les tangentes des traces du cône directeur aux points μ' et ν', les tangentes des directrices circulaires aux points M' et N', et les projections R'K' et $r'k'$ des intersections du paraboloïde et du plan donné avec le plan tangent au cône; nous menons ensuite par le point de rencontre P' de ces droites une parallèle aux traces M'r' et N's' du plan : cette ligne passe par le point cherché m'.

757. Le second plan directeur du paraboloïde est vertical, et par suite les projections horizontales de toutes les génératrices du premier système passent par un même point. Comme d'ailleurs nous savons que les lignes MN et RK sont deux de ces droites, nous connaissons le point de concours H. Une génératrice du paraboloïde de raccordement se projette en H; le plan tangent au point (H, H') est par conséquent vertical, et ce point appartient au contour apparent de la surface par rapport au plan horizontal. Nous pourrions ainsi déterminer cette courbe par points, mais nous allons construire sa projection horizontale plus facilement, en la considérant comme enveloppe des projections des génératrices.

758. *Contour apparent de la surface sur le plan horizontal.* Nous plaçons l'origine au centre O de la surface (*fig.* 320); nous prenons pour axes la directrice rectiligne Oy et sa perpendiculaire Ox.

Nous appelons

r le rayon des directrices circulaires (AB, A'B') et (CD, C'D');
a et b l'abscisse O_2F et l'ordonnée OO_2 du centre (F, F') de l'une d'elles;
ω l'angle M'OF' compris entre la projection verticale d'une génératrice (NM, N'M') et la ligne de terre E'F'.

Nous représentons de plus par λ la longueur du segment M'μ de la droite N'M' compris entre les cercles C'D' et O'F' :

$$\lambda = \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \omega}. \tag{1}$$

L'équation de la droite MN, projection horizontale de la génératrice considérée, est

$$y - b = \frac{2b}{NO_1 + O_2M}(x - O_2M).$$

Mais nous avons

$$N'O' = O'\nu + \nu N' = a\cos\omega + \lambda, \qquad O'M' = O'\mu - \mu M' = a\cos\omega - \lambda,$$
$$NO_1 = a\cos^2\omega + \lambda\cos\omega, \qquad O_2M = a\cos^2\omega - \lambda\cos\omega.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation de MN donne

$$(2)\qquad y = \frac{b}{a\cos^2\omega}x + \frac{b\lambda}{a\cos\omega}.$$

Quand la génératrice considérée est l'une des deux arêtes $(Oq, O'q')$ et $(Oq, O'q'_1)$, λ est nul; on a, d'après (1),

$$\cos^2\omega = \frac{a^2 - r^2}{a^2},$$

et l'équation (2) devient

$$(3)\qquad y = \frac{ab}{a^2 - r^2}x.$$

Si nous éliminons y entre les équations (2) et (3), la valeur de x sera l'abscisse Ok du point de rencontre K de la génératrice MN avec la droite fixe pq. On trouve ainsi

$$Ok = \frac{a^2 - r^2}{\lambda}\cos\omega.$$

Mais, en faisant x nul dans l'équation (2), on obtient, en ayant égard à l'équation (1),

$$OL = \frac{b\lambda}{a\cos\omega};$$

donc

$$(4)\qquad Ok \times OL = \frac{b}{a}(a^2 - r^2).$$

Le produit des segments Ok et OL est donc constant [1]; il en est de même du produit des segments OK et OL, car le rapport de OK à Ok est indépendant de la position génératrice considérée (NM, N'M'). Il résulte de là que les projections horizontales des génératrices sont tangentes à une hyperbole dont les asymptotes sont la directrice rectiligne Oy et la projection pq des deux arêtes. Le point de contact i est le milieu de LK. Les coordonnées de ce point par rapport aux droites Oy et Oq prises pour axes sont les moitiés des segments OK et OL.

759. Si l'on fait y égal à b dans l'équation (3) de la droite pq, la valeur de x sera l'abscisse O_2q du point q; nous avons donc

$$O_2q = \frac{a^2 - r^2}{a},$$

d'où

$$O_2q \times OO_2 = \frac{b}{a}(a^2 - r^2).$$

---

[1] Division homographique (art. 694).

En rapprochant ce résultat de l'équation (4), on voit que la droite O_2D, qui n'est pas la projection d'une génératrice, est cependant tangente à l'hyperbole; cette courbe est donc en partie parasite. Le point où elle est touchée par la génératrice horizontale AC, c'est-à-dire le milieu R du segment If, est l'une des extrémités de l'arc utile. La seconde extrémité est au point S, symétriquement placé sur l'autre génératrice horizontale.

Le contour apparent de la surface sur le plan horizontal se compose, outre l'arc d'hyperbole qui va de R à S en passant par le point situé à l'infini sur l'asymptote pq, des deux génératrices AC et BD aux divers points desquelles le plan tangent est vertical.

760. Sur une surface gauche dont toutes les génératrices sont à distances finies, les branches infinies de la courbe de contact d'un cylindre correspondent les unes aux arêtes, et les autres aux génératrices pour lesquelles le plan tangent à l'infini est parallèle au cylindre (art. **638**); le cône directeur permet de déterminer facilement ces dernières droites. Le cône directeur de la surface du biais passé a des plans tangents verticaux le long des génératrices qui aboutissent aux points F′ et O′ (*fig.* 320); les génératrices de la surface qui leur sont parallèles ne doivent donc rencontrer qu'à l'infini la courbe de contour apparent sur le plan horizontal. La génératrice du cône qui a sa trace en F′ est parallèle aux droites AC et BD qui font partie du contour apparent, comme nous l'avons vu; celle qui perce le plan vertical au point O′ est sur une partie parasite, mais elle indiquerait une branche infinie utile si les directrices circulaires se coupaient sur le plan vertical, parce qu'alors le cône entier serait utile. Nous allons examiner ce cas sur une nouvelle figure, dont nous avons disposé les données de manière que le contour apparent sur le plan horizontal soit une hyperbole identique à celle de la *fig.* 320. Si nous appelons a', b' et r' les nouveaux paramètres, il nous a suffi de faire

$$a' = a, \quad b' = -b, \quad r'^2 = 2a^2 - r^2,$$

car les équations (3) et (4) ne sont pas modifiées et r' est plus grand que a', ce qui est nécessaire pour que la disposition que nous voulons examiner se produise.

La longueur $O'q'$ (*fig.* 320) est égale à $\sqrt{a^2 - r^2}$; par conséquent, si on la porte en $O'q''$ sur $O'z$, la distance des points E′ et q'' sera le rayon r'.

761. La *fig.* 321 représente une surface de biais passé dont les trois paramètres ont les longueurs qui viennent d'être déterminées et qui a par conséquent, sur le plan horizontal, un contour apparent identique à celui que nous avons obtenu pour la surface de la *fig.* 320.

Les deux génératrices (O_2O_1, P), (O_2O_1, P_1) sont parallèles à la génératrice (O_2O_1, O') du cône directeur et déterminent pour la courbe de contact du cylindre circonscrit vertical deux branches infinies qui se superposent en projec-

tion horizontale. Le plan (O_2O_1, $P_1O'P$) touche la surface aux points de cette courbe situés à l'infini, en contient par conséquent les asymptotes et les projette sur la trace O_1O_2.

Nous voyons donc que les deux branches infinies de l'hyperbole correspondent l'une aux arêtes, l'autre à deux génératrices qui sont parallèles à la directrice rectiligne, et par chacune desquelles passe un plan vertical tangent à l'infini. Ces génératrices sont réelles quand les arêtes sont imaginaires, et réciproquement. Il résulte de là que l'une des deux branches infinies est toujours parasite ([1]).

762. Si nous voulons déterminer directement sur la *fig.* 321 la droite pq, projection de deux arêtes imaginaires et asymptotes de la branche parasite de l'hyperbole, nous remarquerons que le point q (*fig.* 320) est sur la droite $q'q'_1$, sécante commune des cercles C'D' et O'F', c'est-à-dire sur la perpendiculaire à la ligne des centres qui passe par le point ε, déterminé par l'équation

$$\varepsilon O' \times \varepsilon F' = \varepsilon C' \times \varepsilon D'.$$

Sur la *fig.* 321, les cercles C'D' et O'F' ne se coupent pas, mais il existe cependant sur A'D' un point ε satisfaisant à l'équation ci-dessus; la droite perpendiculaire à la ligne des centres et passant par ce point jouit, par rapport aux cercles, de toutes les propriétés dans l'expression desquelles les points d'intersection q' et q'_1 n'entrent pas explicitement. Ainsi, par exemple, les tangentes menées d'un point quelconque de cette droite aux deux cercles sont égales entre elles; seulement elles ne peuvent pas être nulles, comme dans la première disposition.

Nous appellerons, avec M. Poncelet, *sécante commune idéale* de deux cercles C'D' et O'F' qui ne se coupent pas (*fig.* 321) la droite $\eta\varepsilon$ qui possède les propriétés des sécantes communes ordinaires, bien qu'elle ne rencontre pas les cercles ([2]).

763. En considérant trois cercles tracés sur un plan comme les projections de trois sphères ayant mêmes centres qu'eux (*fig.* 324), on reconnaît que les droites ab, cd et ef, sécantes communes de ces cercles, se rencontrent en un même point M, projection des deux points où les sphères se coupent ([3]). Chaque sécante commune de deux cercles est d'ailleurs perpendiculaire à la ligne des centres.

D'après cela, pour avoir la sécante commune des cercles C'D' et O'F' (*fig.* 321), nous les coupons par un arc de cercle $\pi\rho\sigma\tau$: le point de concours η des sécantes $\pi\tau$

([1]) M. Leroy a trouvé par l'analyse que le contour apparent de la surface du biais passé sur le plan horizontal est une hyperbole, mais il n'a donné aucune explication géométrique sur ce résultat (*Analyse appliquée à la Géométrie des trois dimensions*, art. 325).

([2]) Quelquefois, sans distinguer les différences de position des deux cercles C'D' et O'F' (*fig.* 320 et 321), on donne à la droite εq le nom d'*axe radical* proposé par M. Gaultier (de Tours).

([3]) Ce théorème et la démonstration que nous en donnons sont dus à Monge.

et $\rho\sigma$ appartient à la droite cherchée $\eta\varepsilon$ et fait ainsi trouver le point q, où l'asymptote pq rencontre la ligne O_2D [1].

Le point η n'est pas la projection de deux points d'intersection des sphères auxquelles appartiennent comme grands cercles les cercles C'D', O'F' et $\pi\rho\sigma\tau$, car les deux premières ne se rencontrent pas; mais les relations graphiques établies dans le cas de la *fig.* 324, étant par elles-mêmes indépendantes de l'existence des sphères, continuent à subsister entre les droites qui possèdent les propriétés des sécantes communes.

764. Pour achever de déterminer la courbe de contour apparent par rapport au plan horizontal, nous allons construire sa projection verticale.

L'abscisse x du point (i, i') (*fig.* 320) est égale à la moitié de Ok; nous avons donc (art. **758**)

$$x = \frac{a^2 - r^2}{2\lambda}\cos\omega \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{(a^2 - r^2)^2}{4(r^2 - a^2\sin^2\omega)}\cos^2\omega.$$

Les axes étant O'D' et O'z, on a

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{tang}\omega = \frac{z}{x}.$$

L'élimination de ω donne l'équation de la projection verticale de la courbe :

$$\text{(6)} \qquad \frac{4r^2x^2}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{4z^2}{(r^2 - a^2)} = 1.$$

La projection verticale est donc une section conique. Ses axes sont les droites A'D' et O'z (*fig.* 320 ou 321). Les sommets sont toujours réels sur l'axe A'D' : ce sont les points R' et S' qui correspondent aux extrémités R et S de l'arc utile de la projection horizontale.

La conique donnée par l'équation (5) ne peut pas avoir de partie parasite, car chacun de ses points ne correspond qu'à un point du contour apparent de la surface par rapport au plan horizontal. La droite indéfinie A'D', projection des génératrices horizontales AC et BD, fait partie de la projection complète de ce contour apparent.

765. Dans le cas de la *fig.* 320, la courbe est une hyperbole qui a pour asymptotes les projections $p'q'$ et $p'_1q'_1$ des arêtes. Sur la *fig.* 321, c'est une ellipse QR'Q_1S' dont l'axe vertical QQ_1 est égal à la moitié de PP_1. Les points Q et Q_1 sont les projections des points du contour apparent situés à l'infini et des asymptotes de cette ligne.

---

(1) La première équation de l'article 759 montre que les droites qui iraient du point P aux points F' et ε seraient rectangulaires. De là résulte un second moyen également très-simple de déterminer ε et par suite q.

Nous avons vu (art. **761**) que les génératrices pour lesquelles le plan tangent à l'infini est vertical se projettent aux points P et P_1; par conséquent, *quand un cylindre est circonscrit à une surface gauche, les génératrices qui correspondent aux branches infinies de première espèce de la courbe de contact* (art. **638**) *ne sont pas, comme les arêtes, asymptotes de cette courbe.*

L'ellipse QQ_1 se compose de quatre arcs. L'un d'eux est vu, un autre caché; les deux qui se trouvent compris entre ceux-là sont les projections des parties de la courbe situées en dehors des plans A_1B_1 et C_1D_1, auxquels nous limitons la partie représentée de la surface.

766. *Contour apparent sur un plan vertical parallèle à la directrice rectiligne.* Nous indiquerons comme un exercice graphique intéressant la construction du contour apparent de la surface sur le plan vertical O_2O_1 (*fig.* 321). Le cône directeur a deux génératrices $O'l$ et $O'l_1$ le long desquelles le plan tangent est perpendiculaire au nouveau plan de projection. A chacune de ces droites correspondent, sur la surface, deux génératrices qui ne rencontrent la courbe qu'à l'infini et dont les projections sont asymptotes du contour apparent sur le plan O_1O_2. Quand la surface a des arêtes, la courbe possède deux autres branches infinies.

Enfin le contour apparent présente des rebroussements aux sommets, parce qu'il y est tangent à la génératrice horizontale, et par suite au plan horizontal de projection, et que ce plan est évidemment un plan principal de la courbe.

767. *Sections de la surface par des plans perpendiculaires à la directrice rectiligne.* Considérons la section de la surface par le plan C_1D_1 parallèle au plan vertical (*fig.* 320) : si y est l'ordonnée de ce plan, la valeur de x donnée par l'équation (2) sera l'abscisse du point (M_1, M'_1) où il est rencontré par la génératrice considérée (NM, N'M'). En divisant cette longueur par $\cos\omega$, on obtient le rayon vecteur $O'M'_1$ du point M'_1 de la courbe

$$O'M'_1 = \frac{ay}{b}\cos\omega - \lambda.$$

La droite EF qui passe par les centres des directrices rencontre C_1D_1 en un point (F_1, F'_1) dont l'abscisse est $\frac{ay}{b}$. Si l'on décrit un cercle sur $O'F'_1$ comme diamètre, la longueur $\frac{ay}{b}\cos\omega$ sera le rayon vecteur $O'\mu_1$ du point μ_1, déterminé sur ce cercle par l'azimut ω; l'équation se réduit donc à

$$O'M'_1 = O'\mu_1 - \mu M'.$$

La longueur λ est donnée par un radical du second degré et doit toujours être considérée comme affectée du double signe, de manière que l'équation (2) représente les deux génératrices parallèles qui correspondent à un même azimut ω. Le

segment $\mu M'$ doit en conséquence être porté sur la droite $O'\mu_1$, de part et d'autre du point μ. On trouve ainsi les points M'_1 et m'_1.

D'après cela, *les cercles* O'F' *et* C'D' *étant établis sur la figure, pour avoir des points de la courbe d'intersection de la surface par un plan perpendiculaire à la directrice rectiligne, il suffit de tracer un troisième cercle ayant pour diamètre l'abscisse* $O'F'_1$ *du point où la droite qui passe par les centres des directrices circulaires perce le plan considéré, puis d'augmenter et de diminuer chaque rayon vecteur de ce cercle, mesuré à partir de l'origine* O', *de la différence des rayons vecteurs des deux premiers cercles.* Cette génération nous permet de considérer la courbe comme une conchoïde à plusieurs directrices ([1]).

Sur la *fig.* 321, nous avons placé les plans A_1B_1 et C_1D_1, qui limitent la partie représentée de la surface, de manière à obtenir pour les conchoïdes des formes différentes de celles que nous avons trouvées sur la *fig.* 320 : le premier, A_1B_1, contient le sommet B_1, et la section qu'il fait a un rebroussement, comme celle d'un conoïde par un plan passant à l'un des sommets (art. **666**); le second, C_1D_1, coupe la directrice rectiligne en un point où elle est utile, et par suite la conchoïde y a un point double. Cette courbe se construit toujours par la même méthode, à l'aide de trois cercles.

768. Si le plan C_1D_1 s'éloigne du centre, la longueur $O'\mu_1$ croîtra indéfiniment et le segment $\mu M'$ restera constant; la courbe se rapprochera donc de la forme circulaire, et elle l'atteindra à la limite, en réunissant ses points deux à deux avec ceux du cercle diamétral $O'F'_1$. Nous pouvions prévoir ce résultat, car le cône directeur est coupé suivant des cercles par les plans qui sont parallèles au plan vertical.

On peut dire d'une manière plus générale que la surface possède à l'infini une ligne double, qui est une section conique. Dans le cas de la *fig.* 321, cette directrice est entièrement utile; dans celui de la *fig.* 320, elle est en partie parasite, et l'on voit d'une manière évidente que les sommets sont sur les arêtes, comme nous savons que cela doit être.

769. En se reportant à la *fig.* 216 (art. **369**), on reconnaît que la sous-normale d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires est égale à la limite du rapport des accroissements du rayon vecteur et de l'azimut; or le rayon vecteur de la section $C'_1D'_1$ (*fig.* 320) est une somme algébrique des rayons vecteurs de trois cercles :

$$O'm'_1 = O'\mu_1 + O'm' - O'\mu.$$

La sous-normale se composera donc, de la même manière, des sous-normales des

---

([1]) On appelle en général *conchoïde* d'une ligne donnée la courbe dont les rayons vecteurs surpassent d'une longueur constante les rayons vecteurs de la ligne directrice.

cercles. Ces lignes étant $O'\alpha$, $O'\gamma$ et $O'\beta$, la sous-normale $O'\delta$ de la conchoïde pour le point m'_1 doit être donnée par l'équation

$$O'\delta = O'\alpha + O'\gamma - O'\beta.$$

Par conséquent, si nous portons la longueur $\beta\gamma$ de α en δ, le point δ appartiendra à la normale de la courbe en m'_1 ([1]).

Cette construction conduit à une détermination facile du plan tangent en un point donné de la surface.

770. *Équation de la surface. Sections planes diverses.* L'élimination de λ et de ω entre les équations (1), (2) et (5) donne l'équation de la surface

$$\left(x^2 + z^2 - \frac{a}{b}xy\right)^2 - r^2x^2 + (a^2 - r^2)z^2 = 0.$$

Cette équation est du quatrième degré, et par suite les sections planes sont du quatrième ordre : toutefois quelques sections se décomposent; ainsi les plans contenant la directrice rectiligne coupent la surface suivant cette droite, qui est une ligne double, et deux génératrices.

771. *Génération de la surface par des coniques.* Nous avons vu à l'article **750** que les génératrices appartiennent deux à deux à des plans verticaux ; dans chacun de ces plans la section de la surface est complétée par une conique. Comme d'ailleurs le plan horizontal est principal, la trace horizontale d'un plan vertical qui contient deux génératrices est un axe de la conique d'intersection, et les sommets correspondants de cette courbe sont sur les génératrices horizontales A_1C_1 et B_1D_1 (*fig.* 320 ou 321).

Si le plan considéré est celui dont la trace est MN (*fig.* 320), les deux génératrices situées dans le plan vertical nm lui sont parallèles, et la courbe a deux branches infinies dont les asymptotes sont parallèles à ces génératrices, et par suite à celles qui sont dans le plan NM lui-même; c'est donc une hyperbole complétement déterminée.

Si le plan sécant se meut de manière que le point de contact i de sa trace sur l'hyperbole de contour apparent s'éloigne, l'axe transverse diminuera et l'angle des asymptotes croîtra d'une manière continue. Quand le point de contact se trouve à l'infini, la trace du plan est pq; les points g et f sont les sommets de l'hyperbole; son centre est au centre de la surface, et ses asymptotes, passant par le point O et étant parallèles aux arêtes, se confondent avec ces droites.

([1]) M. Bour a fait connaître dans son Cours de Mécanique à l'École Polytechnique, pour l'expression de la variation de longueur d'un segment de droite qui se déplace dans son plan, une expression due à M. Mannheim d'où l'on peut déduire immédiatement la construction que nous indiquons.

Le plan continuant son mouvement, le point de contact de sa trace avec l'hyperbole reparaît de l'autre côté; lorsque ce point est parvenu en S, le plan a pour trace BD; la génératrice AC lui est seule parallèle, et la section, n'ayant qu'une branche infinie, est une parabole.

Quand le point de contact arrive en un point j de la partie parasite du contour apparent, les génératrices qu'il contient sont imaginaires, ou du moins elles n'ont de réel que le point v où elles se croisent sur la directrice rectiligne. La section conique n'a donc pas d'asymptotes, et par suite elle est une ellipse : l'un des axes est he; le centre est au point c, et l'on détermine facilement la longueur du second axe, car ses extrémités sont sur les deux génératrices dont la commune projection passe par le point c.

Quand la trace du plan est l'asymptote $O_1 O_2$, l'ellipse se réduit au segment double IJ de la directrice rectiligne.

Nous avons vu, à l'article **759**, que les traces AB et CD des plans des directrices circulaires touchent l'hyperbole de contour apparent : ces cercles appartiennent donc à la série des sections elliptiques dont nous venons de constater l'existence.

Le point i est la projection de deux points où le plan vertical MN touche la surface. Une des génératrices contenues dans le plan passe à chacun de ces points et y coupe l'hyperbole d'intersection.

Les hyperboles contenues dans les plans verticaux parallèles NM et mn sont identiques; il en est de même des ellipses situées dans les plans parallèles eh et $e_1 h_1$. Les paraboles sections de la surface par les plans verticaux AC et BD sont identiques, mais tournées de sens opposé.

Quand la surface n'a pas d'arêtes (*fig.* 321), sa génération par des coniques présente les mêmes dispositions générales; mais il y a quelques différences de détail à l'étude desquelles nous ne nous arrêterons pas.

772. *Ligne de striction. Paramètres des génératrices.* Pour déterminer le point central d'une génératrice, on fait passer par cette droite un plan perpendiculaire au plan tangent du cône directeur le long de la génératrice parallèle, et l'on cherche son point de contact. Le paramètre est la distance du point central au point de contact d'un plan passant par la génératrice et incliné à 45° sur le plan central (art. **623** et **721**).

Si l'on opère simultanément sur les quatre génératrices d'un groupe, les constructions présentent des symétries qui montrent d'une manière évidente : 1° que le plan horizontal est un plan principal de la ligne de striction; 2° que cette courbe a un centre qui est le centre de la surface; 3° que les paramètres des quatre génératrices d'un groupe ont des grandeurs absolues égales. Il est d'ailleurs facile de reconnaître que dans un groupe deux génératrices qui se rencontrent ont des paramètres de signes contraires.

La ligne de striction passe à chaque sommet et y a nécessairement un rebrous-

sement, parce qu'elle est divisée en deux parties symétriques par le plan horizontal qui est plan de rebroussement. La ligne de striction du conoïde droit présente une disposition analogue, car on doit la considérer comme ayant à chaque sommet un rebroussement dont les bras sont superposés.

773. Pour une arête comme pour toute autre génératrice, le plan central est perpendiculaire au plan tangent du cône directeur le long de la génératrice parallèle; on peut donc facilement le construire et déterminer ensuite l'angle θ' sous lequel il rencontre le plan tangent à la surface le long de l'arête.

Le cône directeur étant placé de manière à avoir son sommet au centre de la surface (*fig.* 320), l'arête est une de ses génératrices; les deux plans tangents le long de cette droite, l'un à la surface et l'autre au cône, ont pour équations

$$rx - \sqrt{a^2 - r^2}.z = 0,$$
$$b(2r^2 - a^2)x + a(a^2 - r^2)y - 2br\sqrt{a^2 - r^2}.z = 0.$$

L'angle que comprennent ces plans est complémentaire de θ'. On trouve, d'après cela,

$$\tang\theta' = \frac{br}{\sqrt{(a^2 - r^2 + b^2)(a^2 - r^2)}}.$$

Aucun des paramètres a, b et r ne peut être nul, et d'ailleurs a est plus grand que r, car sans cela la surface n'aurait pas d'arêtes. Il résulte de là que la tangente de θ' n'est jamais nulle ni infinie, et que le plan tangent le long d'une arête ne peut pas se confondre avec le plan central de cette génératrice ni lui être perpendiculaire. Les arêtes du biais passé appartiennent donc au même genre que celles du conoïde oblique (art. **677**), c'est-à-dire que leur point central est à l'infini et que leur paramètre est infini. Nous aurions pu arriver à ce résultat en déterminant les expressions analytiques du paramètre d'une génératrice et de l'ordonnée de son point central; mais ces formules n'offrent pas assez d'intérêt pour que nous nous arrêtions à leur recherche.

774. Quand a est plus grand que r (*fig.* 320), le paramètre change de signe aux arêtes et aux génératrices situées dans le plan horizontal. Lorsque a est plus petit que r (*fig.* 321), le paramètre ne change de signe qu'à ces génératrices, c'est-à-dire en passant par zéro; il a donc un maximum positif et un maximum négatif. Mais ses valeurs absolues étant égales pour les génératrices d'un même groupe, il doit atteindre son maximum dans le groupe simple formé par les génératrices (O_2O_1, P) et (O_2O_1, P_1); il est positif pour la première de ces droites et négatif pour la seconde.

On voit d'après cela qu'un paramètre maximum n'indique pas nécessairement une arête, comme on aurait pu le supposer par l'exemple du cylindroïde.

Déformation des surfaces gauches (¹).

775. L'étude des différentes formes que peut prendre une surface donnée lorsqu'on la suppose flexible et inextensible est, en général, un problème difficile; mais il se simplifie beaucoup pour les surfaces gauches lorsqu'on exige que les génératrices restent droites. D'après cette condition, la déformation ne peut résulter que de plis faits le long des génératrices. Une génératrice G′ tourne autour de la génératrice voisine G en décrivant une aire qui appartient à un hyperboloïde de révolution. La position relative des génératrices G et G′ n'est pas modifiée, et par conséquent la valeur du paramètre de distribution de G n'éprouve pas d'altération, et le point central reste le même.

776. En se reportant à la *fig.* 111, on reconnaîtra facilement que, si l'on fait tourner d'un même angle la génératrice $(ae, a'e')$ d'un hyperboloïde de révolution et la génératrice correspondante $(\alpha O, a'e')$ de son cône directeur, ces droites resteront parallèles. L'angle de rotation pour l'hyperboloïde est celui que décrit une droite $(pO, p'i)$ abaissée d'un point quelconque de la génératrice sur l'axe. On peut, d'après cela, assujettir la déformation d'une surface gauche à celle de son cône directeur.

Considérons deux génératrices consécutives G et G′ de la surface, et leurs parallèles g et g' sur le cône : si les droites g' et G′ tournent respectivement autour de g et de G d'angles égaux, elles seront encore parallèles, et, comme un cône peut être appliqué sur un autre cône quelconque et sur un plan, on voit qu'*il est toujours possible de déformer une surface gauche de manière à rendre ses génératrices parallèles à celles d'un cône donné ou à un plan.*

L'angle infiniment petit dont la génératrice G′ a tourné autour de G est celui qui est décrit par toutes les droites infiniment courtes abaissées des points de G′ sur G; donc, *quand on déforme une surface gauche, l'angle de contingence de toutes les sections perpendiculaires à une même génératrice varie précisément de la quantité dont on augmente ou dont on diminue l'angle de contingence correspondant du cône directeur.*

(¹) La question de la déformation des surfaces gauches a été étudiée successivement par MM. Minding, O. Bonnet et Bour. Nous ne donnons ici qu'une indication de cette importante théorie.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

4945 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

OUVRAGES DE L'AUTEUR.

DISCOURS sur l'art du Trait et la Géométrie descriptive .... 1 fr. 25 c.

TRAITÉ DE PERSPECTIVE, contenant les Tracés pour les Tableaux plans et courbes, les Bas-Reliefs et les Décorations théâtrales, avec une Théorie des effets de perspective; 1 vol. in-4°, avec atlas in-folio de 45 planches, dont 8 doubles.. 40 fr.

RECHERCHES sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques.............................. 4 fr.

MÉMOIRE sur l'appareil de l'arche biaise, suivi d'une analyse des principaux Ouvrages publiés sur cette question et d'une réponse à des critiques sur l'enseignement de la Stéréotomie à l'École Polytechnique. (Extrait des *Annales du Conservatoire des Arts et Métiers*.).............................. 2 fr.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

PAR JULES DE LA GOURNERIE,

MEMBRE DE L'INSTITUT, INSPECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES,
EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Les Mathématiques ont des inventions très subtiles, et qui peuvent beaucoup servir tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et diminuer le travail des hommes.

DESCARTES (*Discours de la Méthode*).

SECONDE ÉDITION.

DEUXIÈME PARTIE. — ATLAS DE 52 PLANCHES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1880

AVERTISSEMENT.

Les tailles ou hachures que l'on voit sur un grand nombre de figures ont différentes significations. Sur les quinze premières Planches, elles indiquent des ombres propres ou des ombres portées.

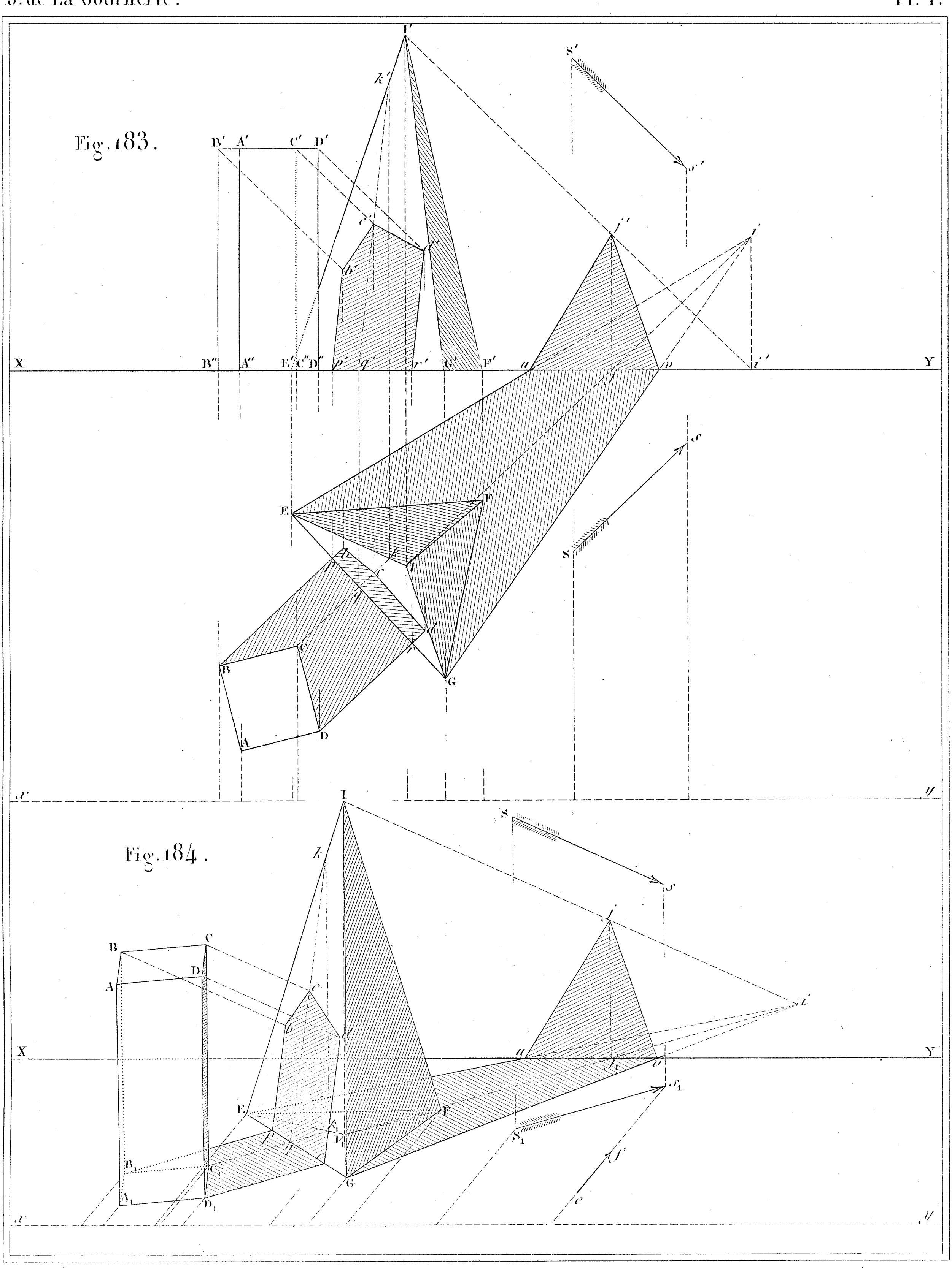
Les *Planches XXIV*, *XXV*, *XXVI* et *XXVII* sont consacrées à l'étude d'une surface d'ombre. La partie de cette surface qui limite l'ombre est indiquée par des hachures. Sur la *fig.* 254, les hachures indiquent l'étendue occupée par l'ombre dans une section de la surface.

Les surfaces représentées sont, en général, considérées comme recouvrant des corps : on a mis des hachures sur les sections planes auxquelles ces corps sont limités. Par exception, les surfaces représentées sur les *fig.* 288, 306, 307, 310 et 311 sont considérées comme de simples feuilles; pour distinguer leurs deux faces, on a supposé que l'une était blanche et l'autre noire : cette dernière est indiquée par des hachures.

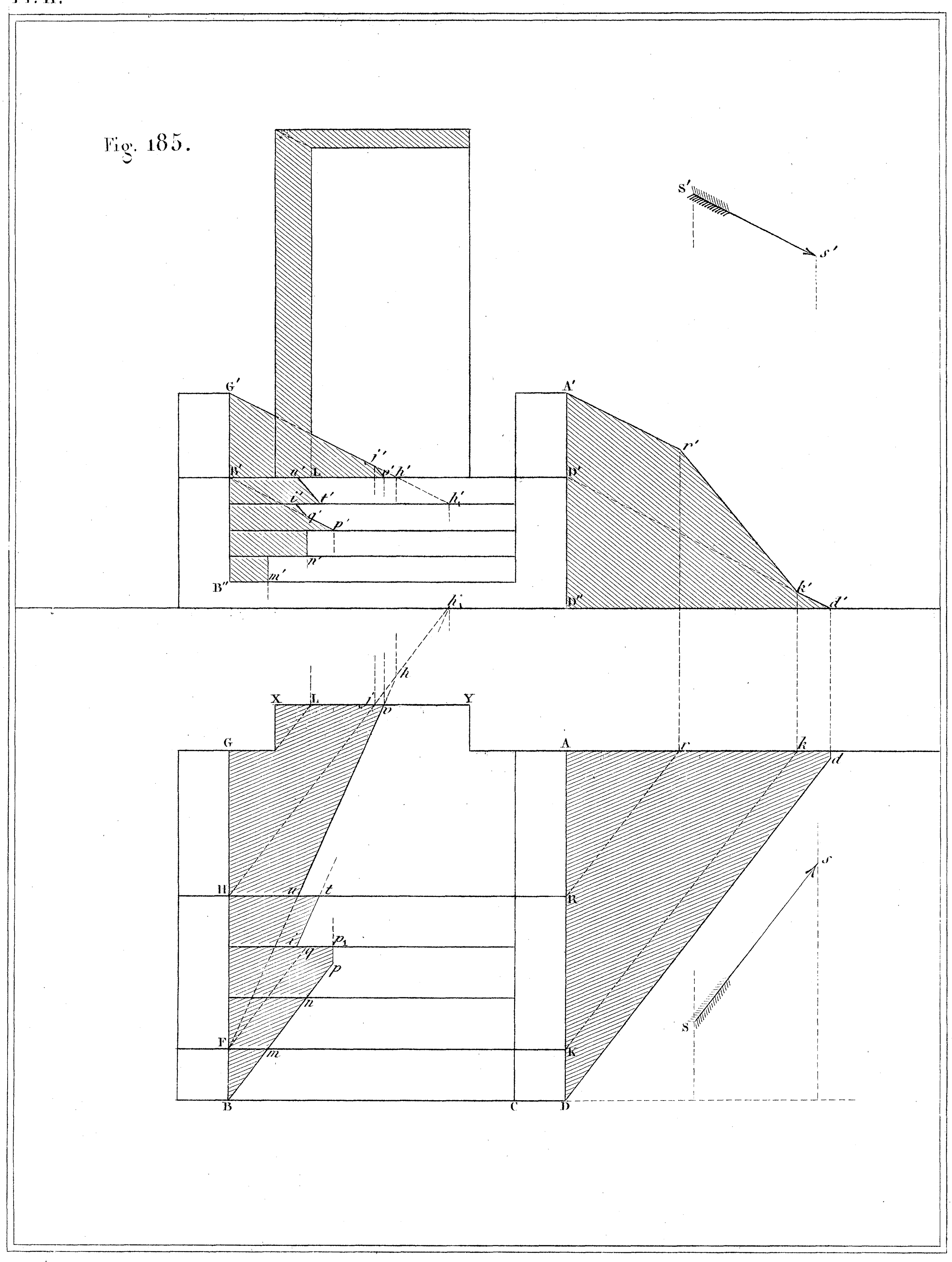
Sur la *fig.* 194, des tailles ont été mises sur la partie coupée du mur de la cheminée. Aux *fig.* 272 et 273, la section du terrain est indiquée par de petites tailles.

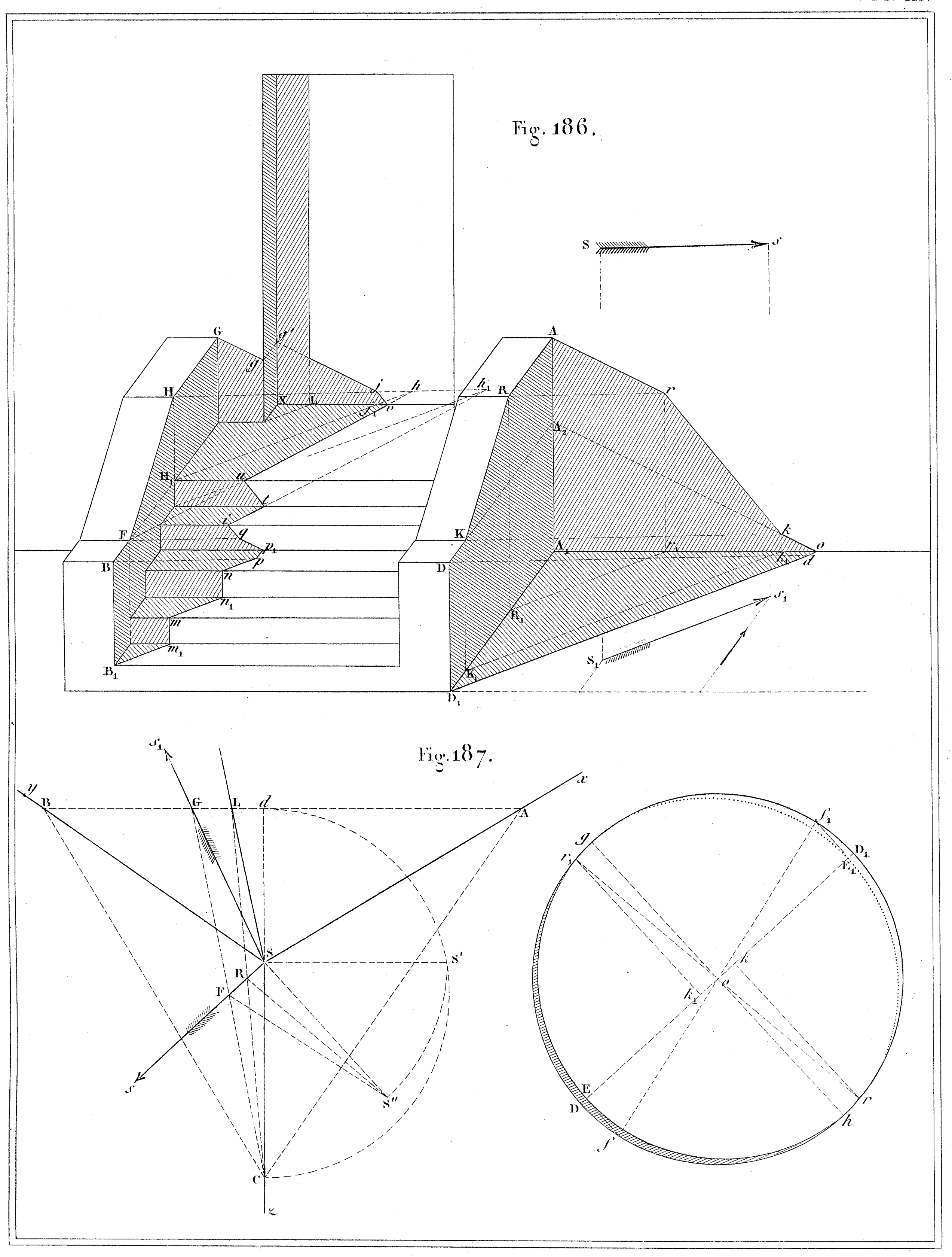
Sur les figures consacrées à la démonstration des théorèmes et à l'explication des constructions, on ne considère sur les surfaces que les lignes représentées, et, par suite, les parties de ces lignes qui ne dépassent pas les plans coordonnés sont toujours en trait plein. A cette catégorie appartiennent les *fig.* 237, 242, 243, 244, 264, 276, 282, 296, 297, 300, 302, 303, 305, 317, 318 et 319.

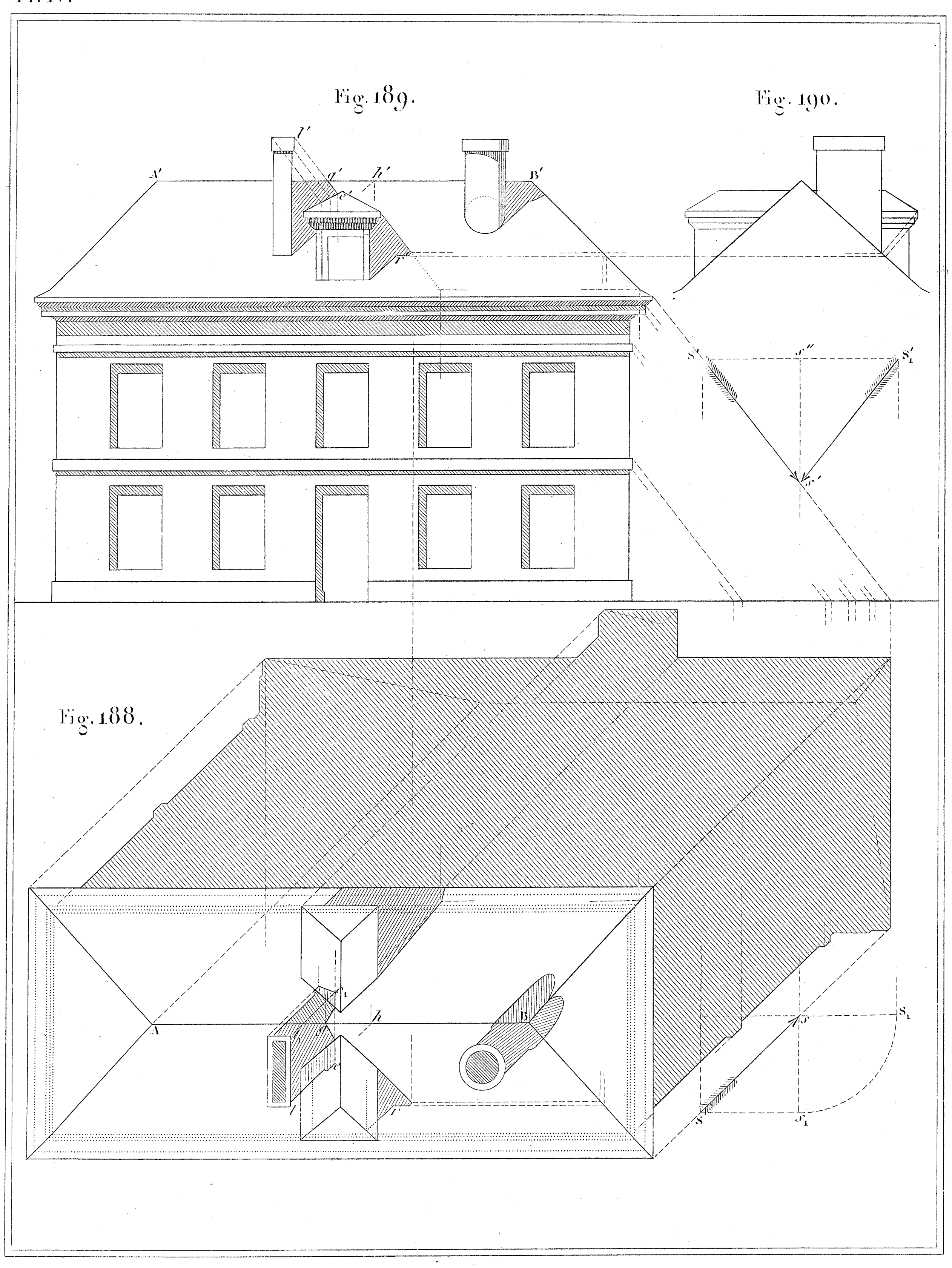
TABLE DES FIGURES.

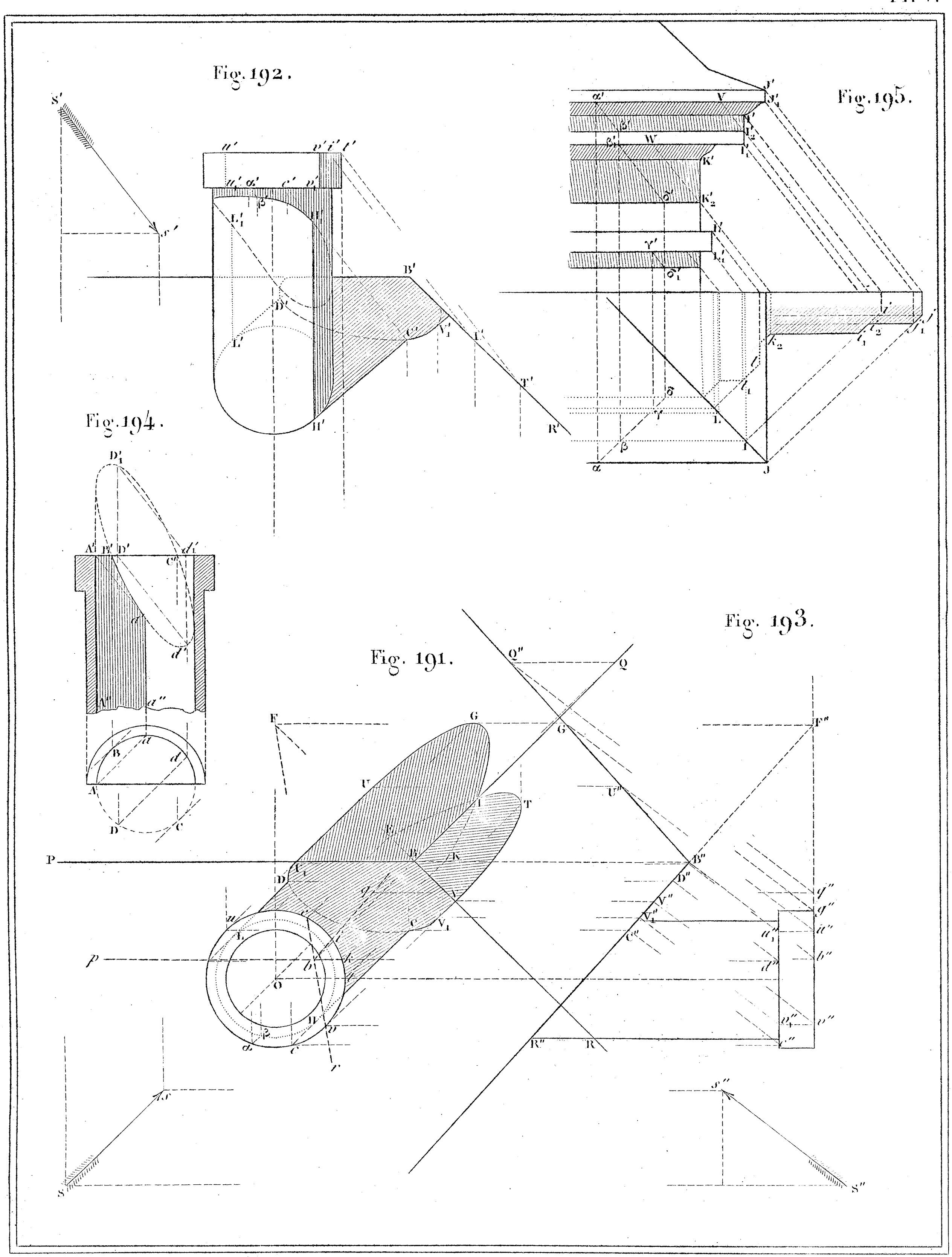


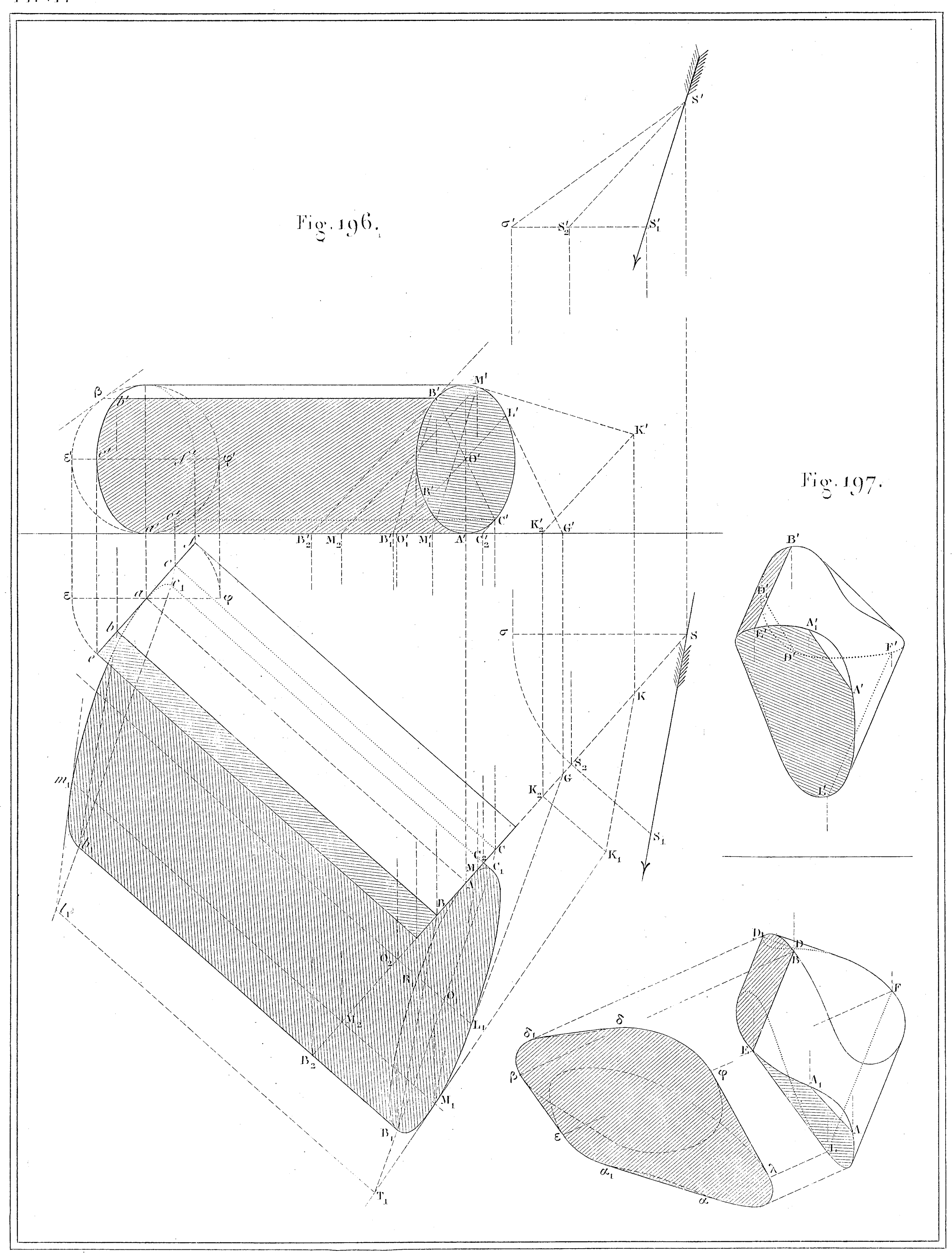
J. de La Gournerie del. Mallet-Bachelier, Libraire. Dulos sc.

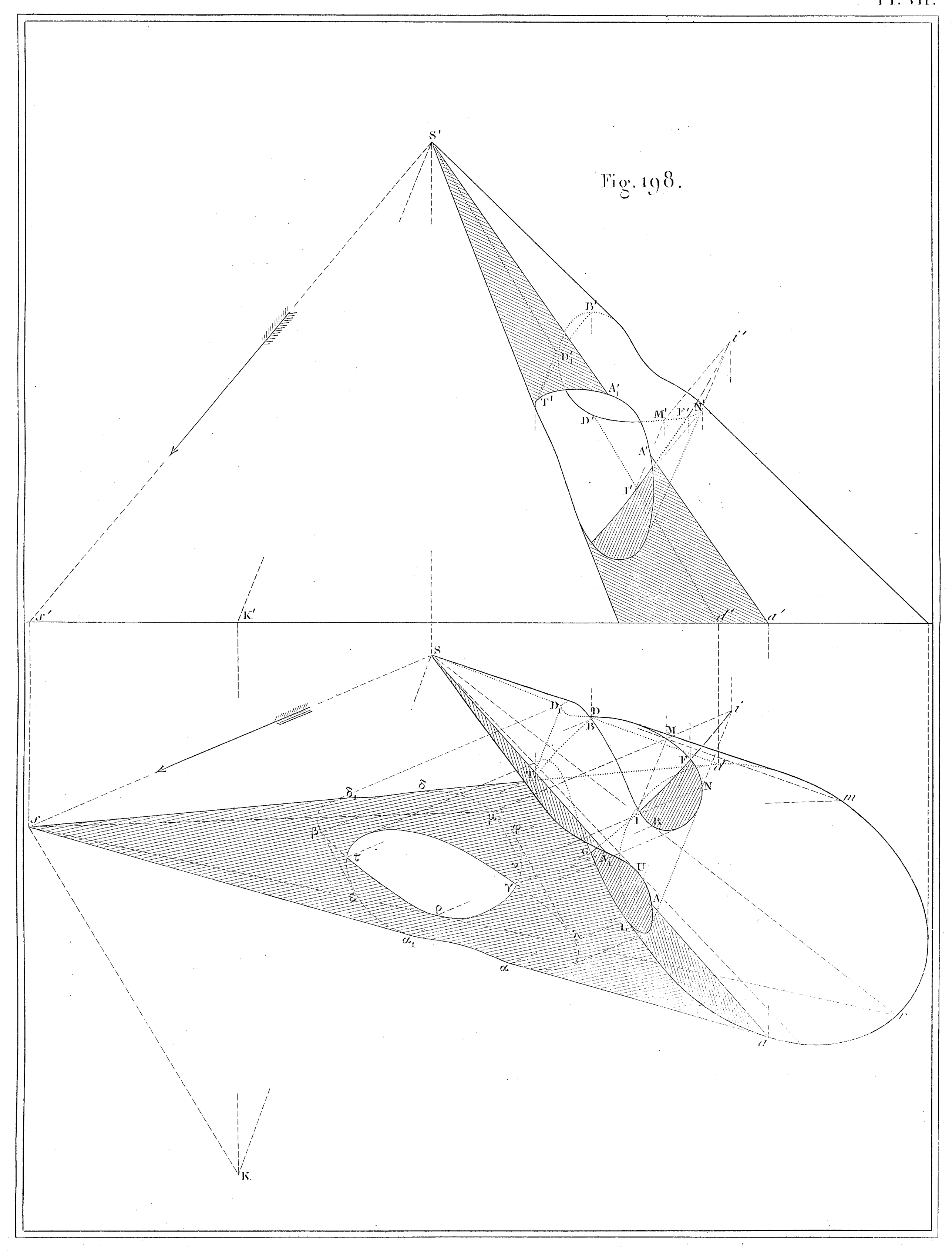

Fig. 185.
S'
s'
G'
A'
j'
r'
B'
u'
L
v'
h'
D'
t'
i'
h'_1
q'
p'
n'
B''
m'
D''
k'
d'
h_1
h
X
L
j
v
Y
G
A
r
k
d
H
u
t
R
i
p_1
q
p
n
s
S
F
m
K
B
C
D

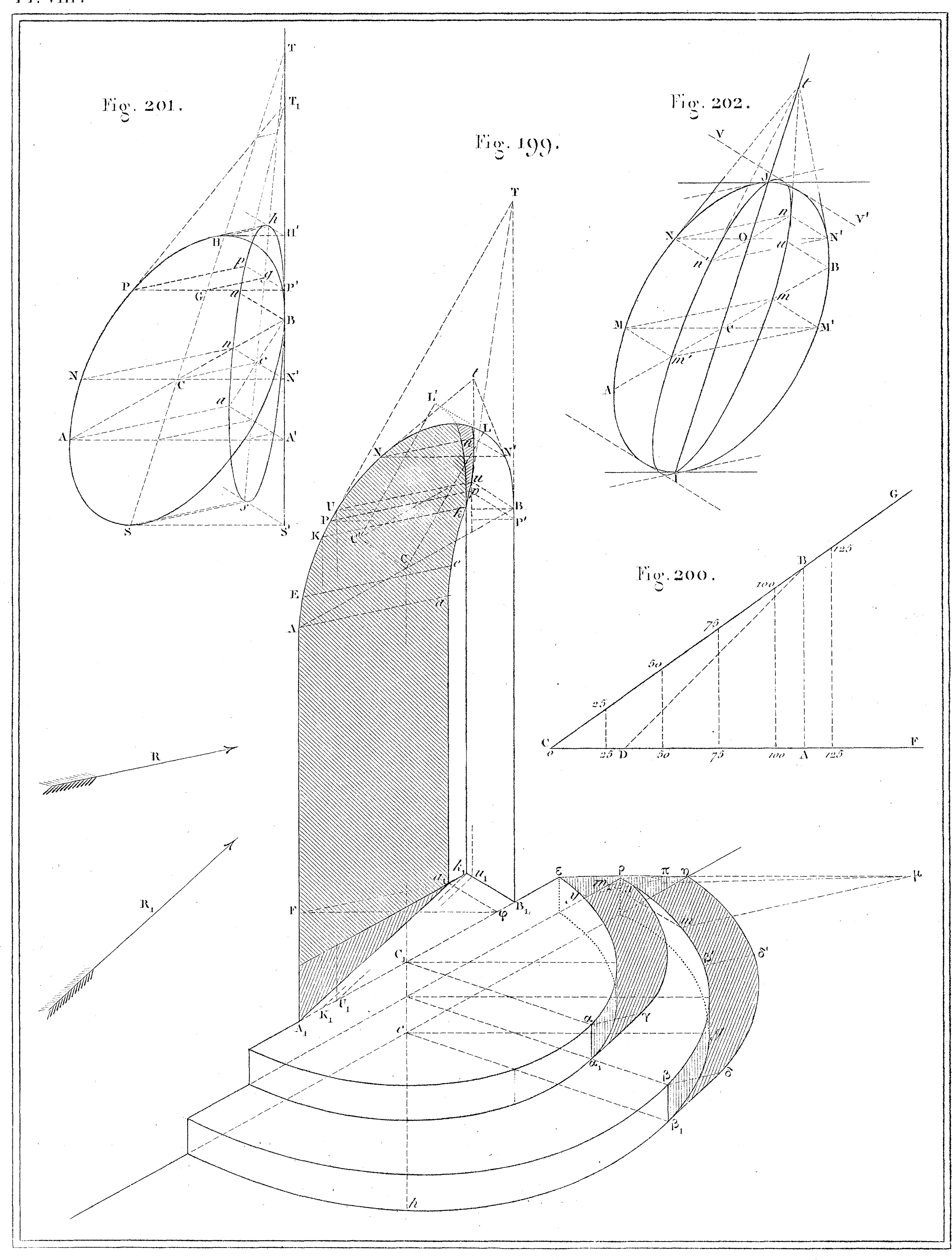

Fig. 186.
Fig. 187.

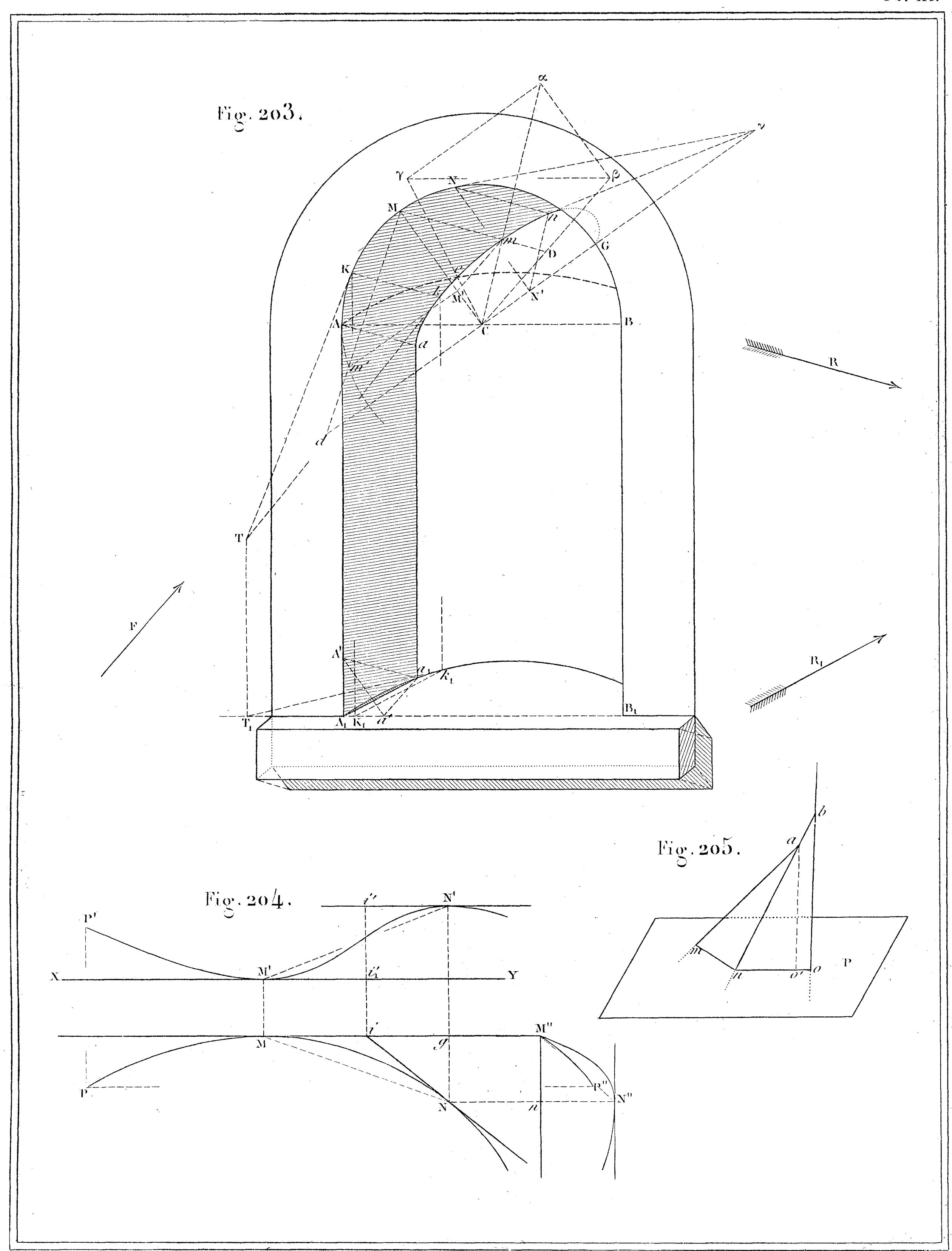

Fig. 189.
Fig. 190.
Fig. 188.
A'
B'
A
B

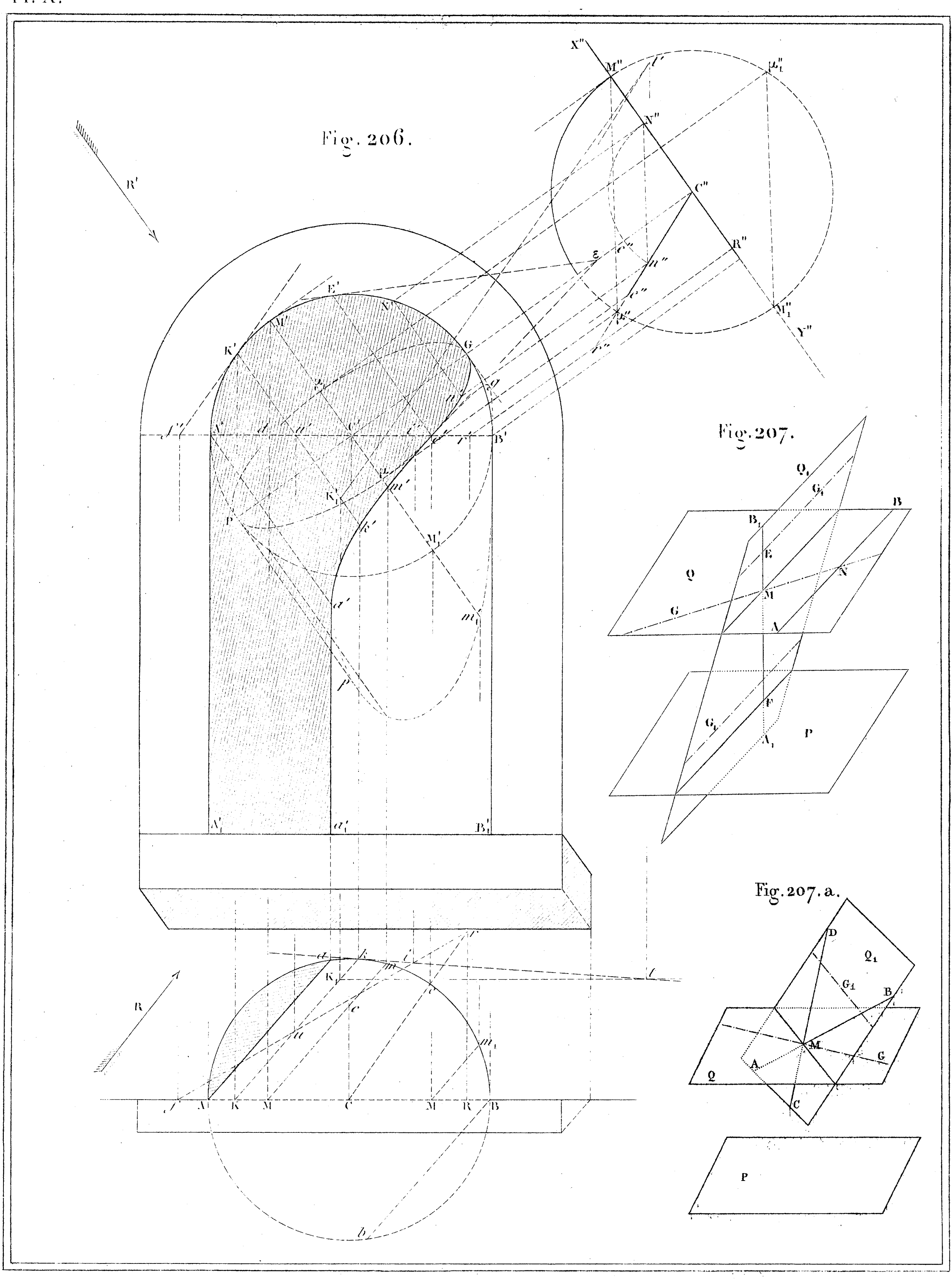

Fig. 192.
Fig. 195.
Fig. 194.
Fig. 193.
Fig. 191.

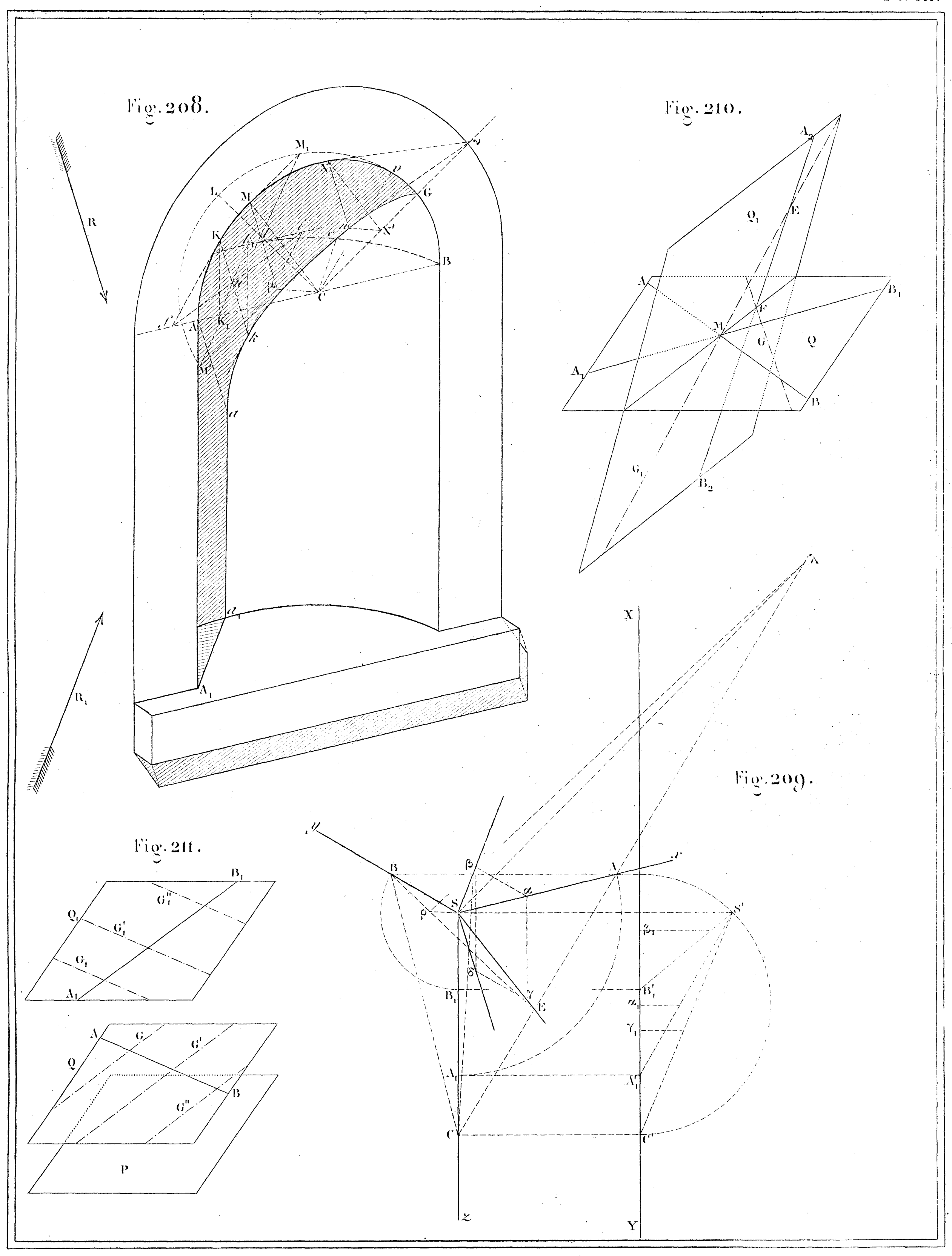

Fig. 196.
Fig. 197.

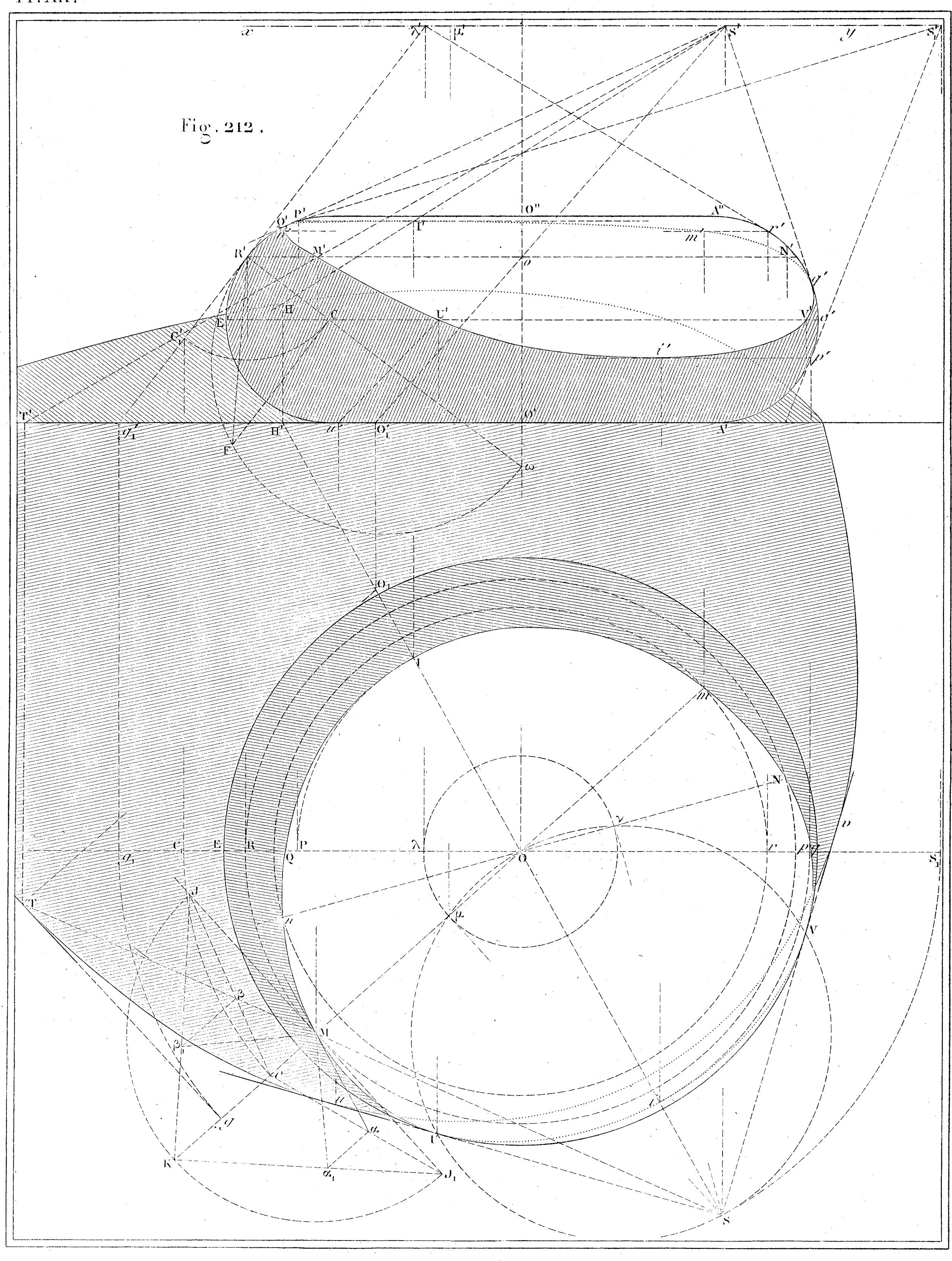

Fig. 198.
S'
B'
D'1
A'1
T'
D'
M'
F'
A'
I'
t'
s'
K'
d'
a'
S
D1
D
B
M
F
t
d
N
I
R
G
U
A
L
m
δ1
δ
s
μ
β
τ
γ
ε
ρ
α
a
r
K


Fig. 201.
Fig. 199.
Fig. 202.
Fig. 200.


Fig. 203.
Fig. 204.
Fig. 205.


Fig. 206.
Fig. 207.
Fig. 207. a.


Fig. 208.
Fig. 210.
Fig. 211.
Fig. 209.


Fig. 212.

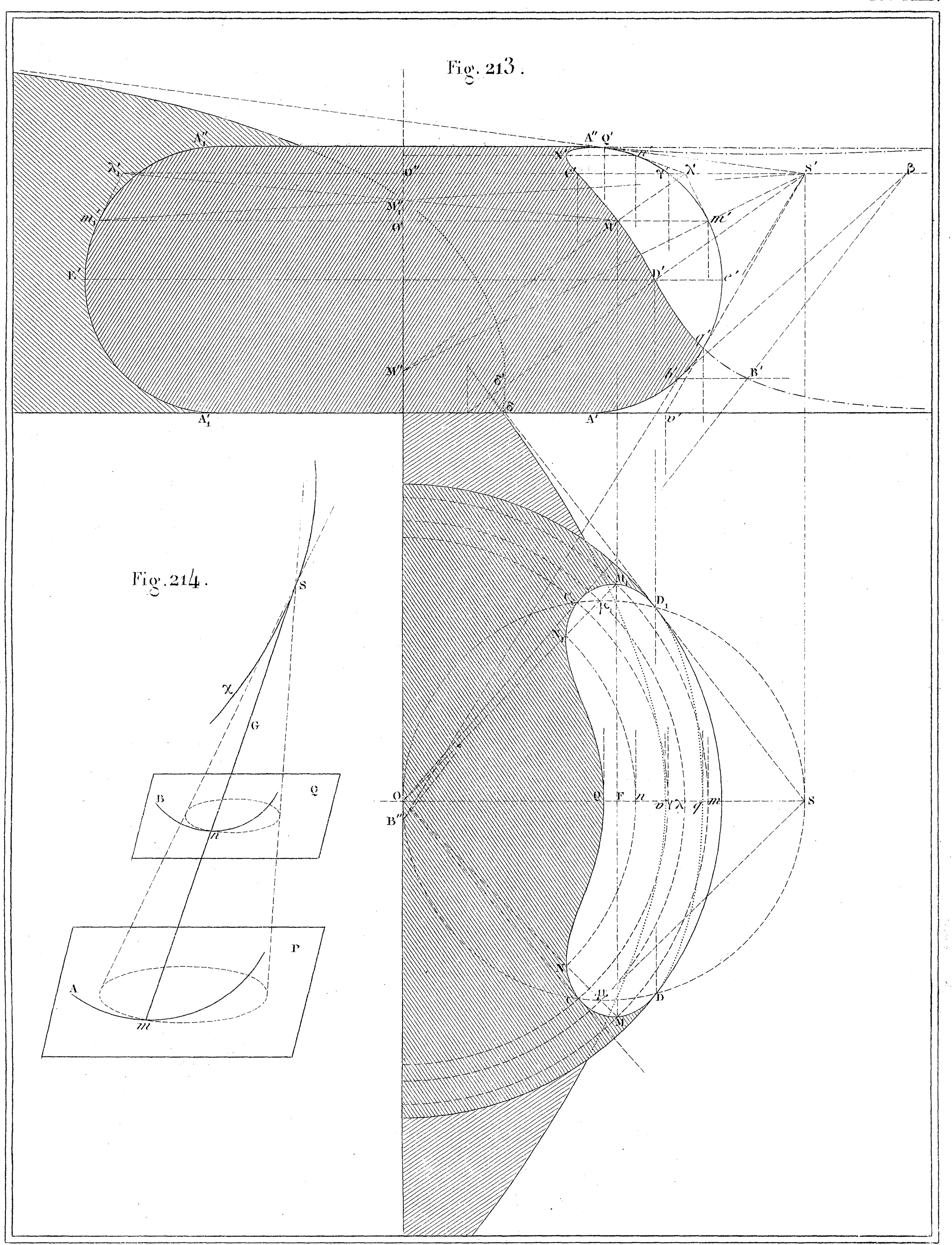
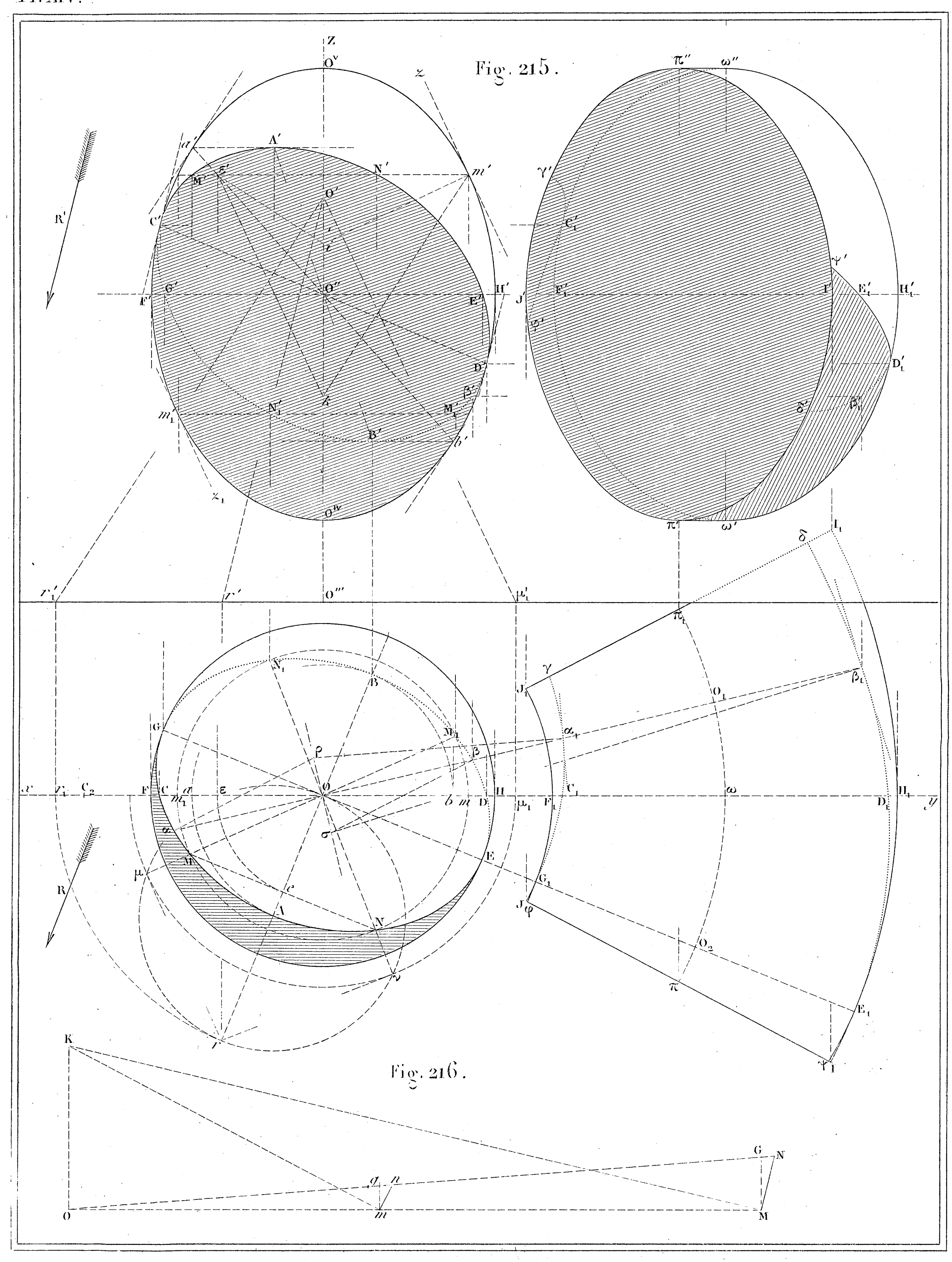
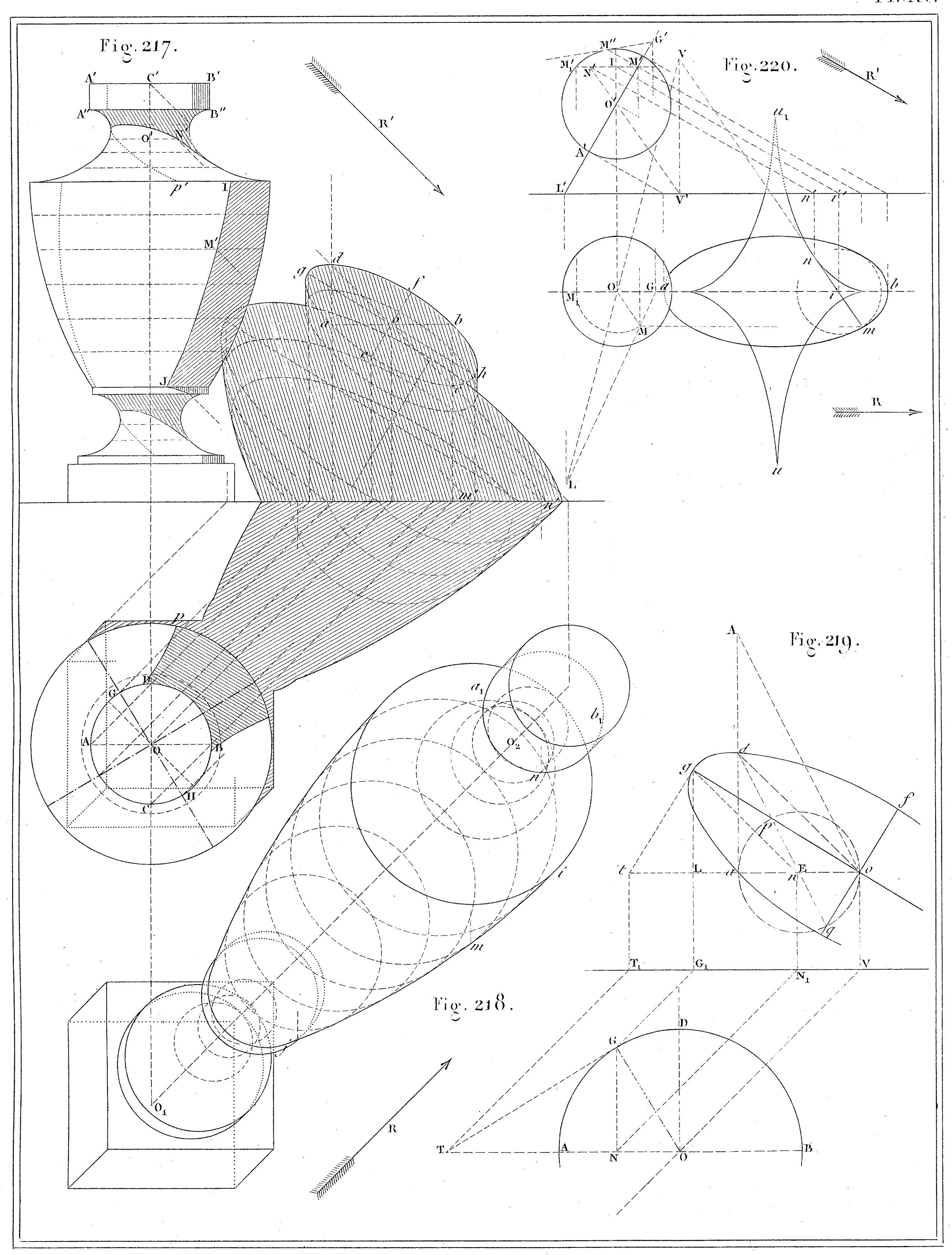


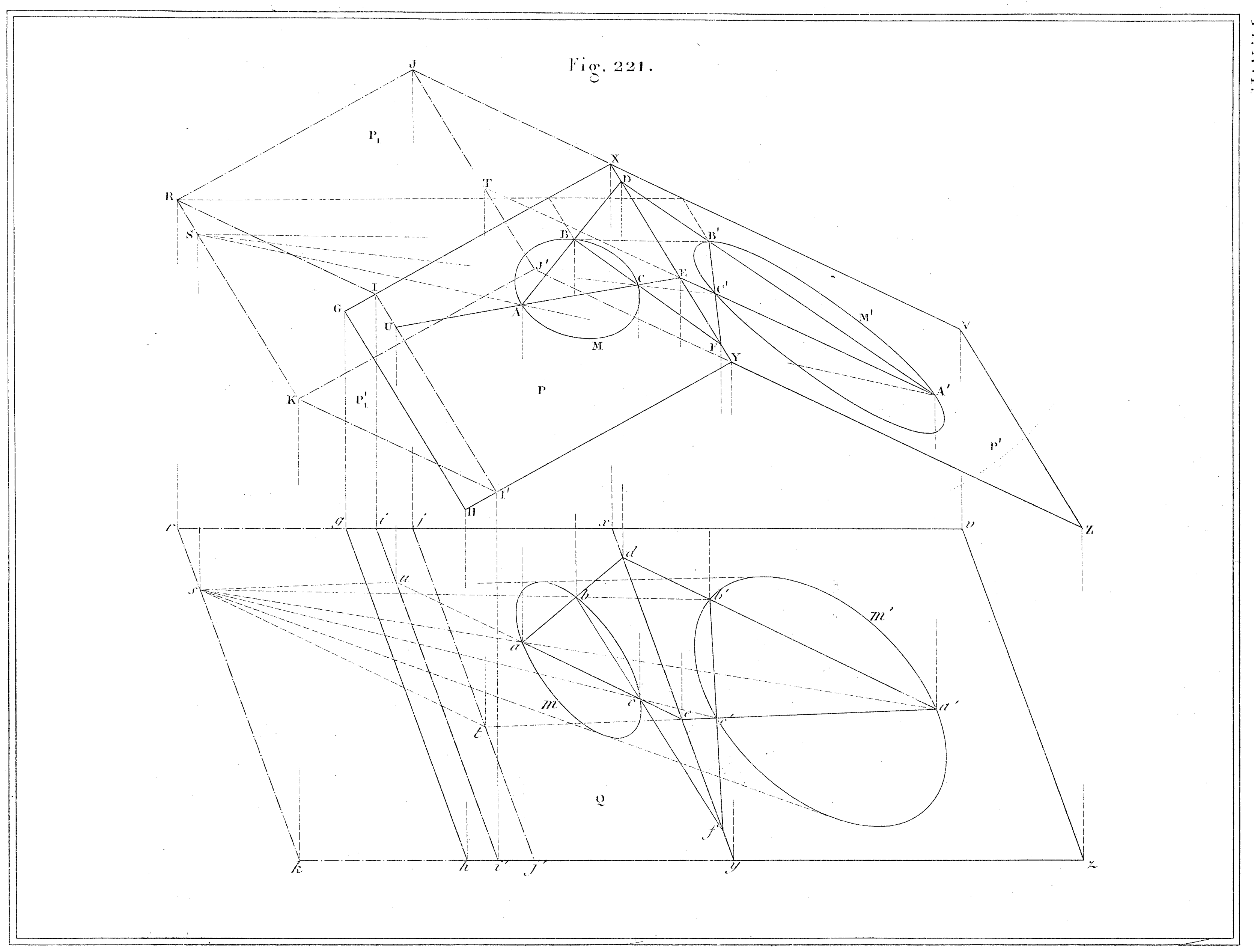
Fig. 213.
Fig. 214.

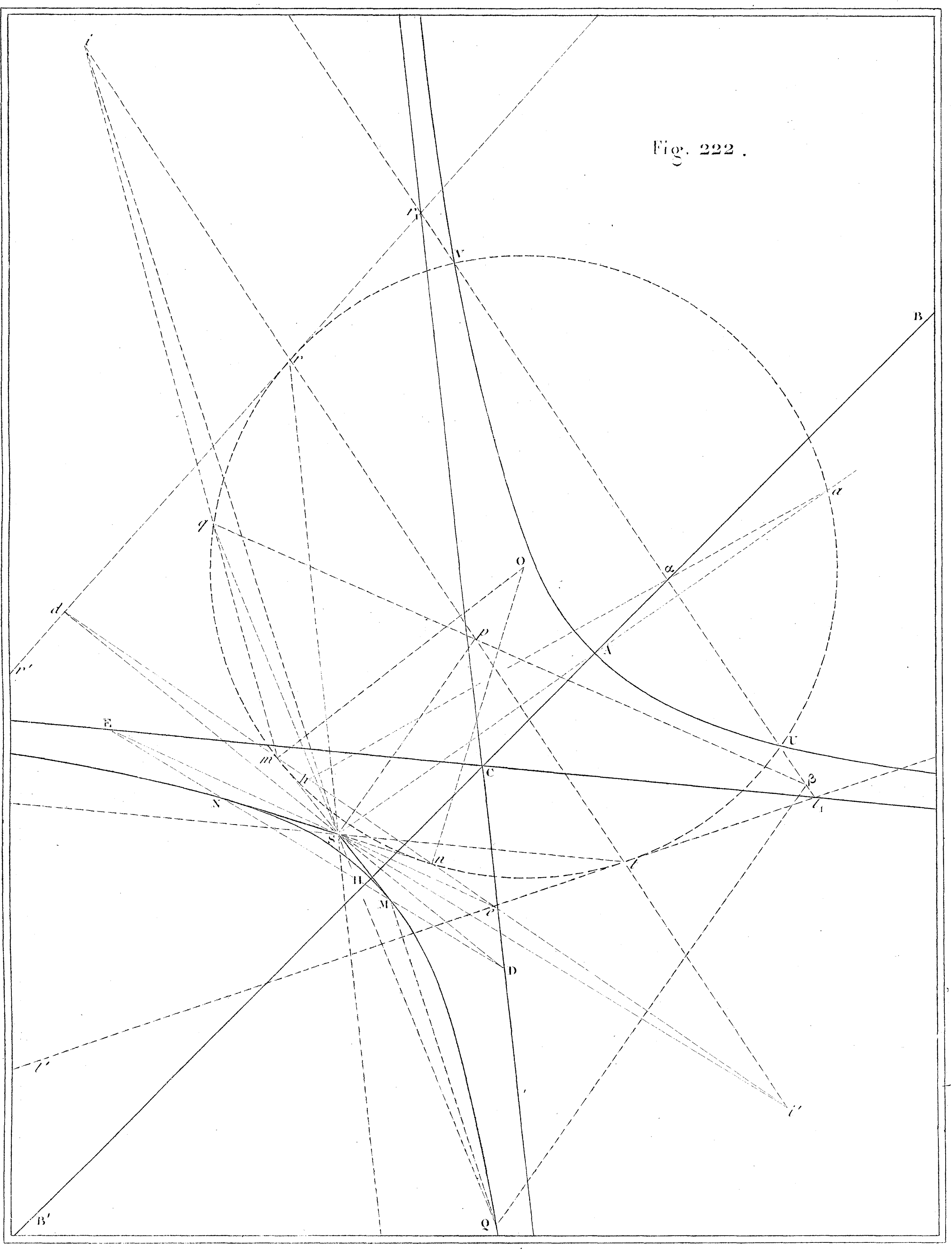

Fig. 215.
Fig. 216.

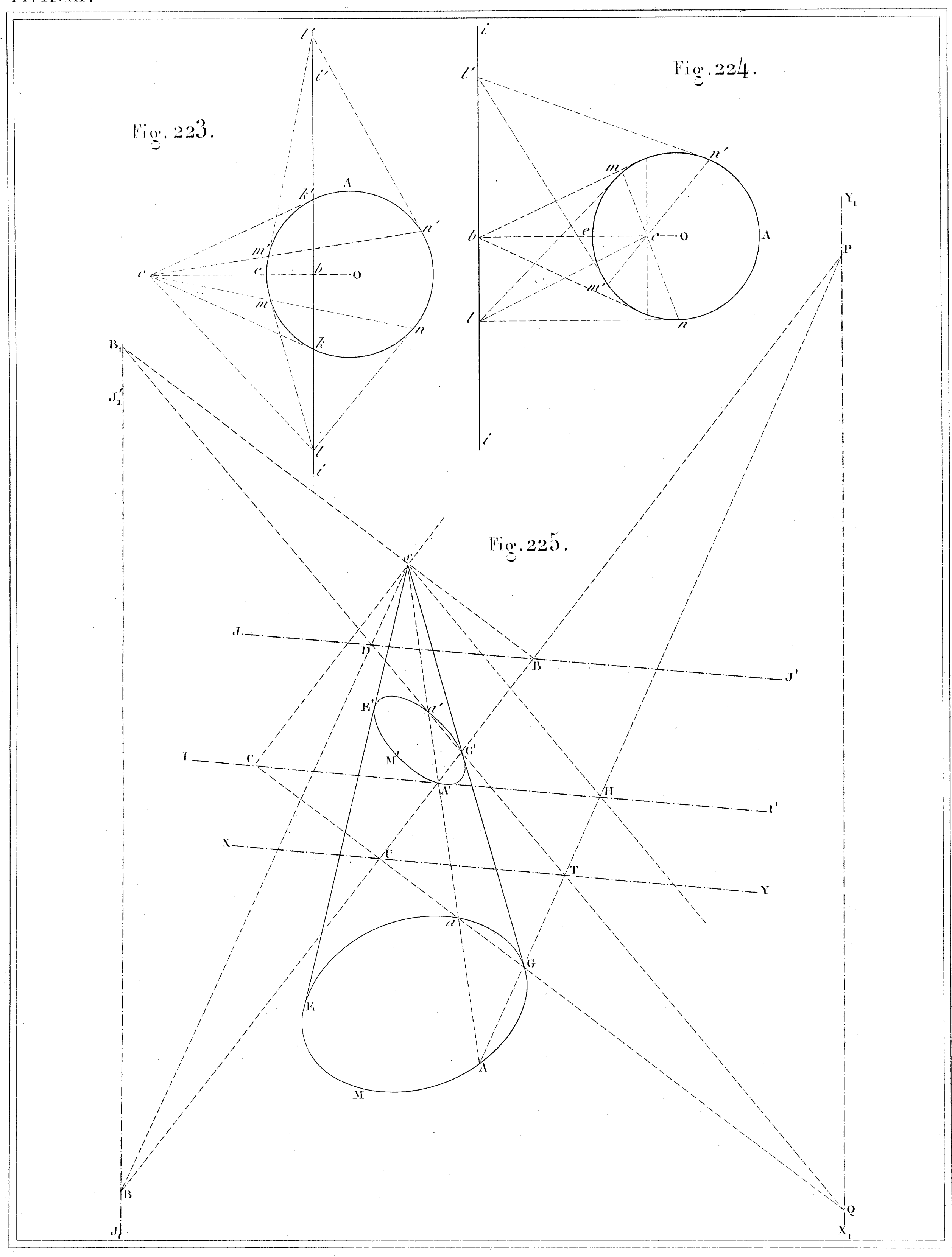

Fig. 217.
Fig. 218.
Fig. 219.
Fig. 220.

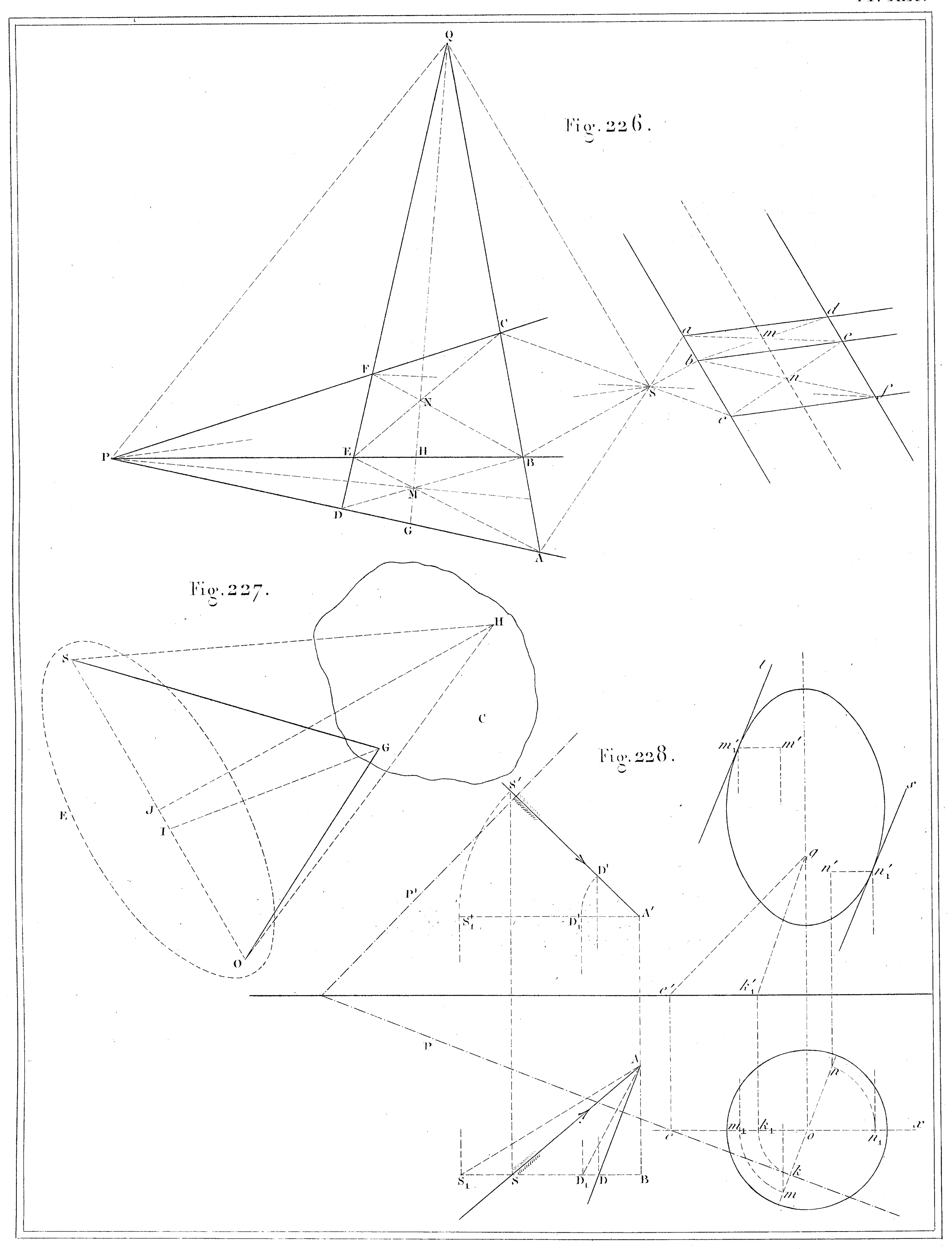
Pl. XVI.

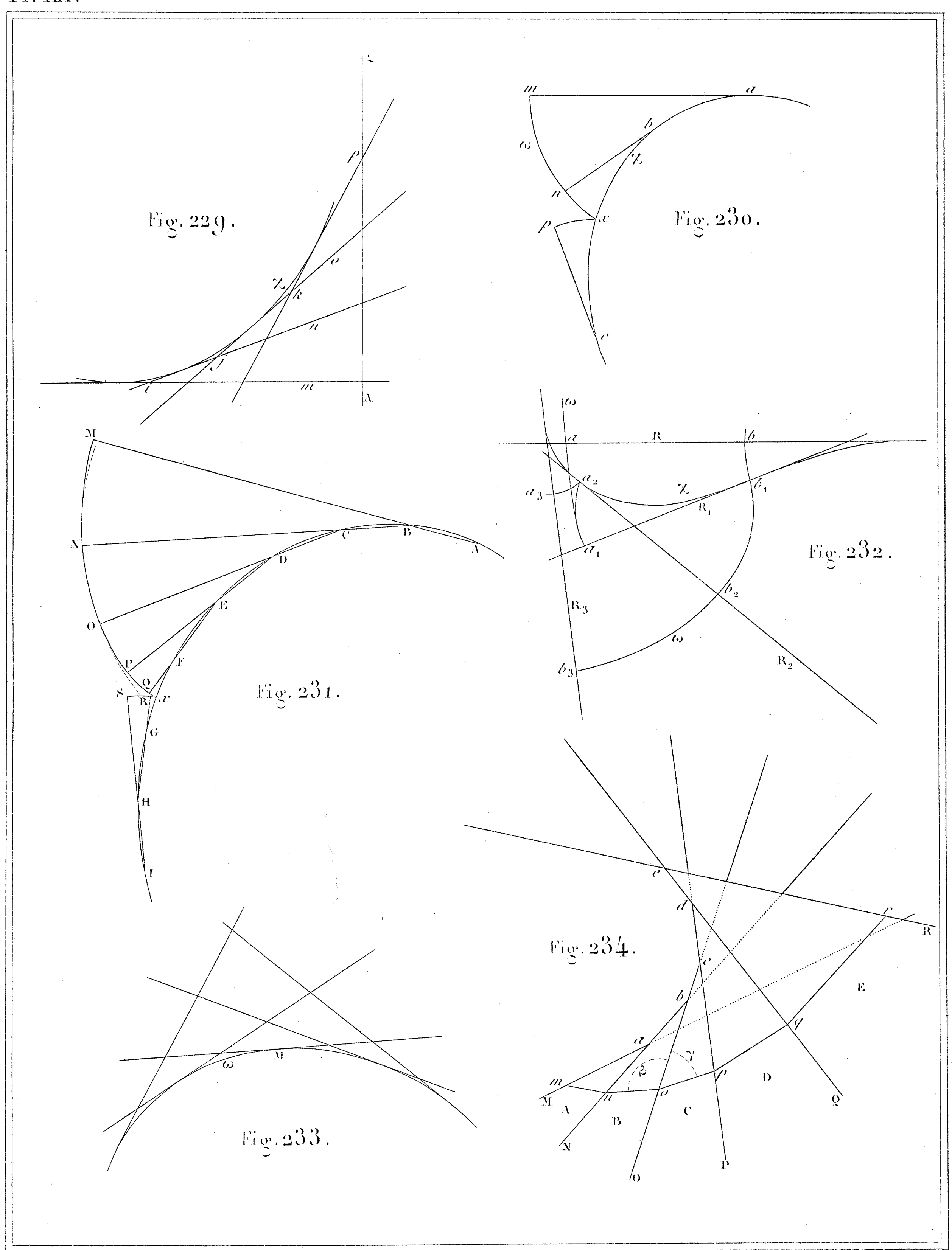
Fig. 221.




Fig. 222.
B
B'
V
O
P
A
U
C
E
N
S
H
M
D
Q
a
q
d
m
n
β


Fig. 223.
Fig. 224.
Fig. 225.


Fig. 226.
Q
C
F
N
S
P
E
H
B
M
D
G
A
a
b
c
d
e
f
m
n
Fig. 227.
H
S
G
C
J
I
E
O
Fig. 228.
S'
D'
A'
P'
P
A
S
D
B


Fig. 229.
Fig. 230.
Fig. 231.
Fig. 232.
Fig. 233.
Fig. 234.

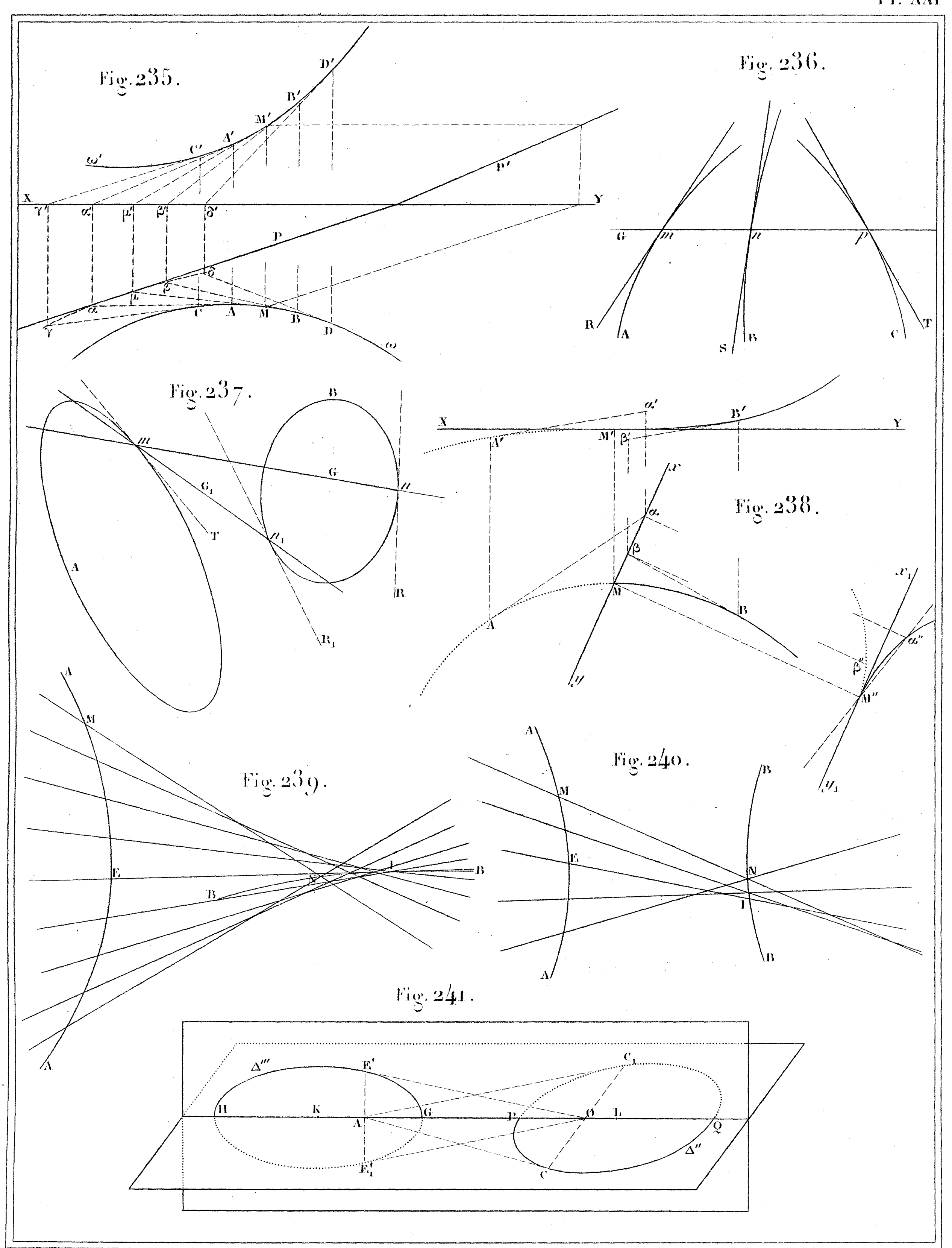
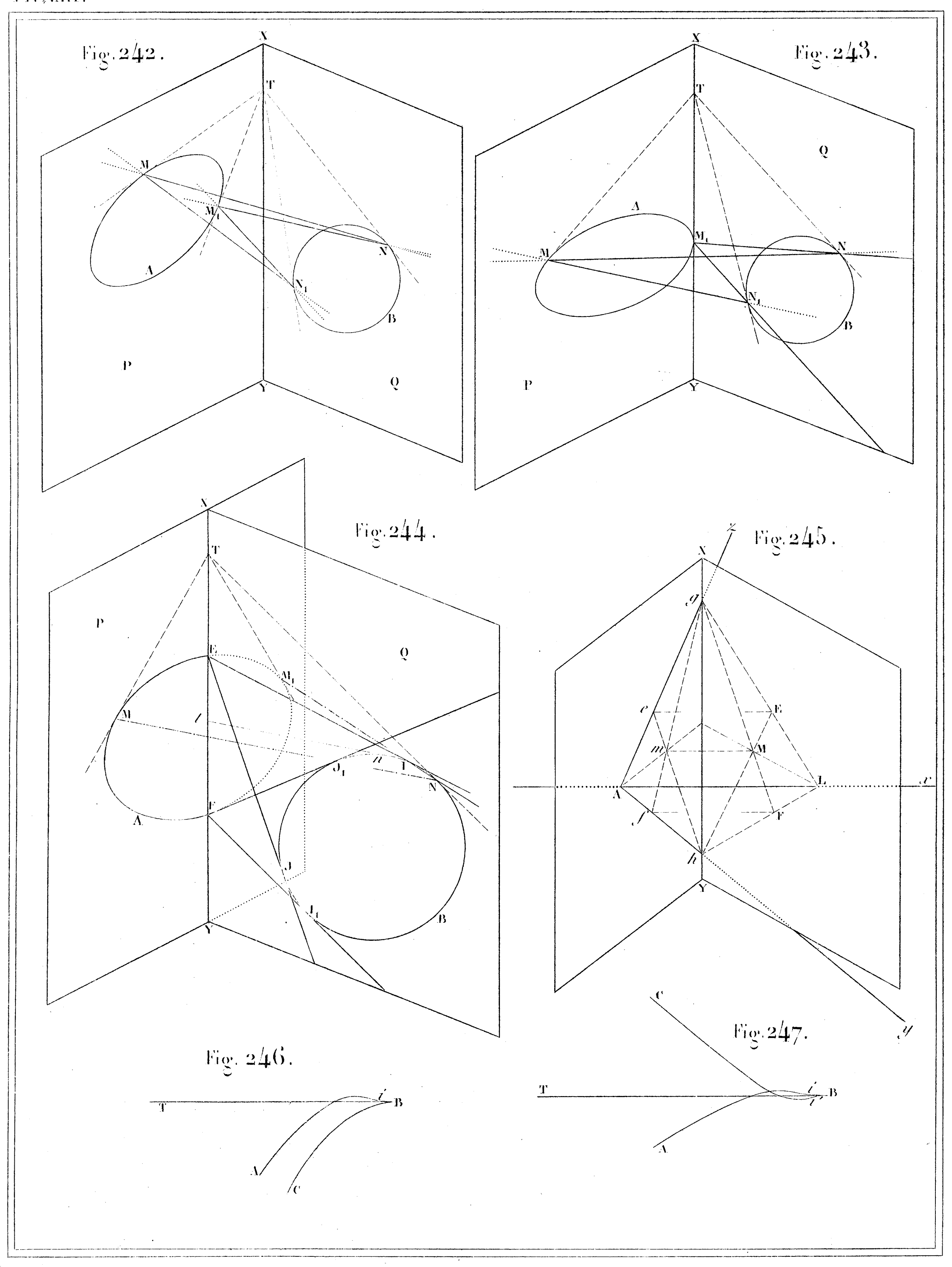
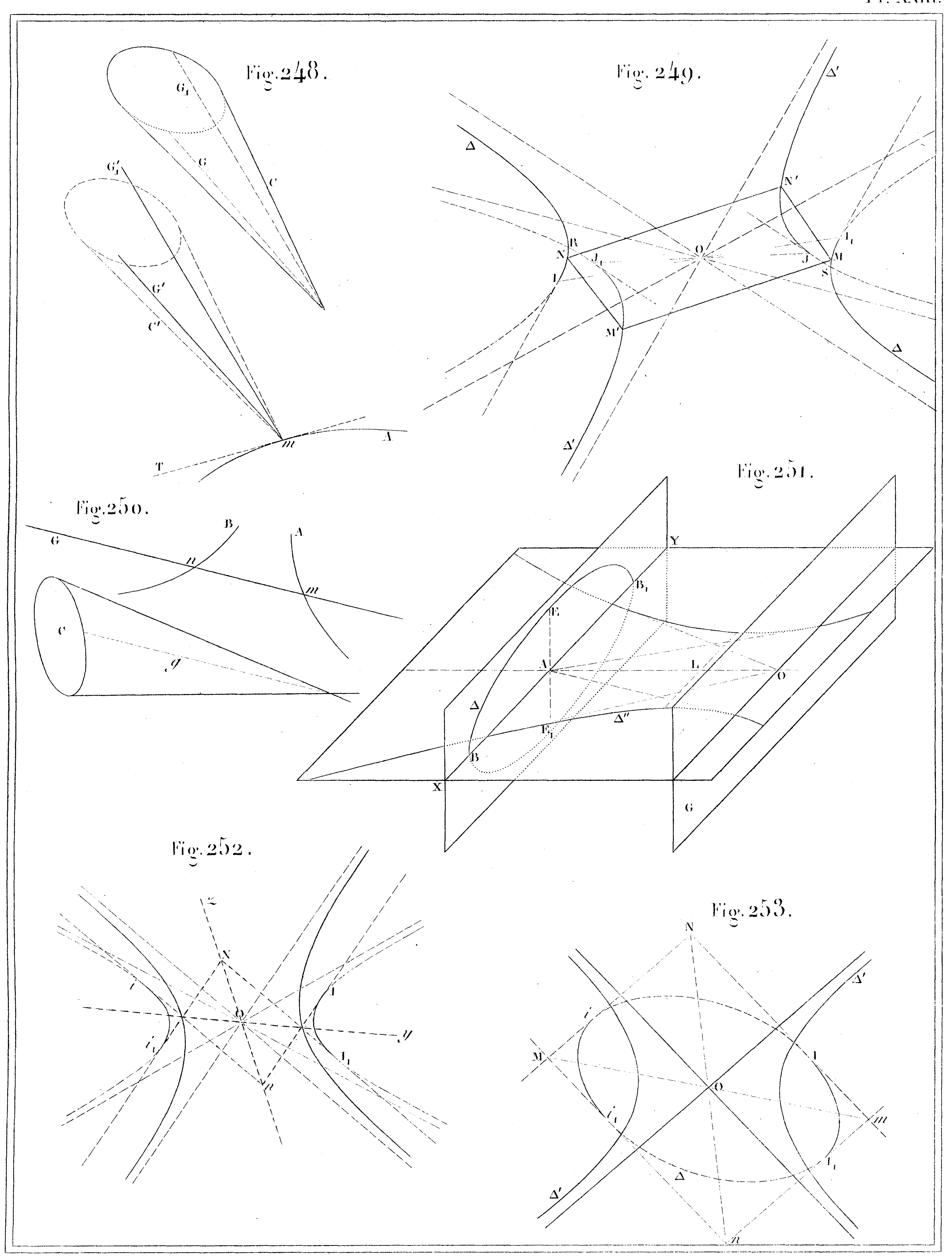
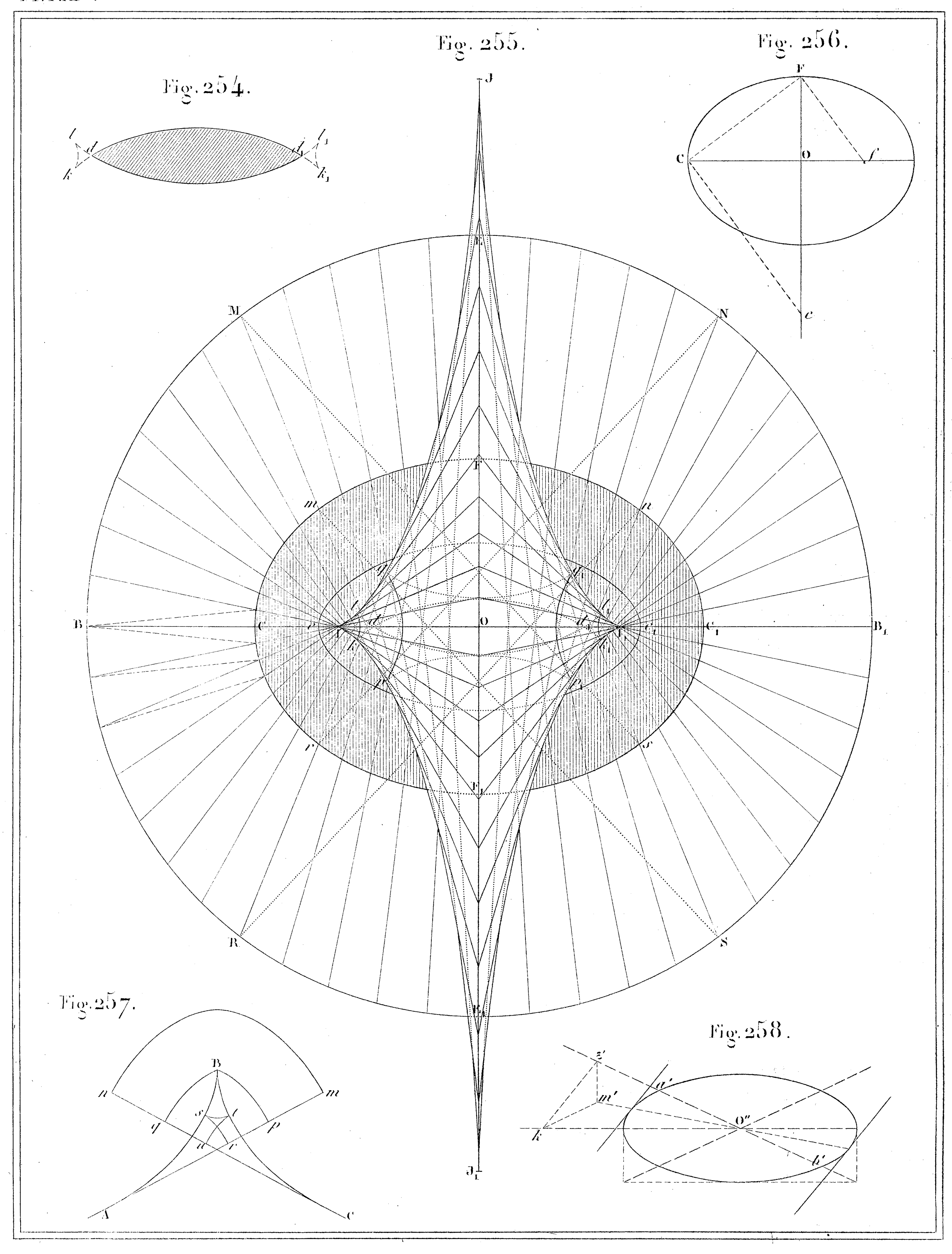


Fig. 235.
Fig. 236.
Fig. 237.
Fig. 238.
Fig. 239.
Fig. 240.
Fig. 241.


Fig. 242.
X
T
M
M_1
N
N_1
A
B
P
Q
Y
Fig. 243.
X
T
Q
A
M
M_1
N
N_1
B
P
Y
Fig. 244.
X
T
P
Q
E
M_1
M
I
J_1
n
I
N
F
A
J
I_1
B
Y
Fig. 245.
z
X
g
e
E
m
M
A
L
x
f
F
h
Y
y
Fig. 246.
T
i
B
A
C
Fig. 247.
C
T
i
B
A


Fig. 248.
Fig. 249.
Fig. 250.
Fig. 251.
Fig. 252.
Fig. 253.


Fig. 254.
Fig. 255.
Fig. 256.
Fig. 257.
Fig. 258.
J
M
N
m
n
B
C
O
C_1
B_1
R
S
J_1
F
C
O
f
c
B
n
m
q
p
s
t
u
r
A
C
z'
a'
m'
O''
k
b'

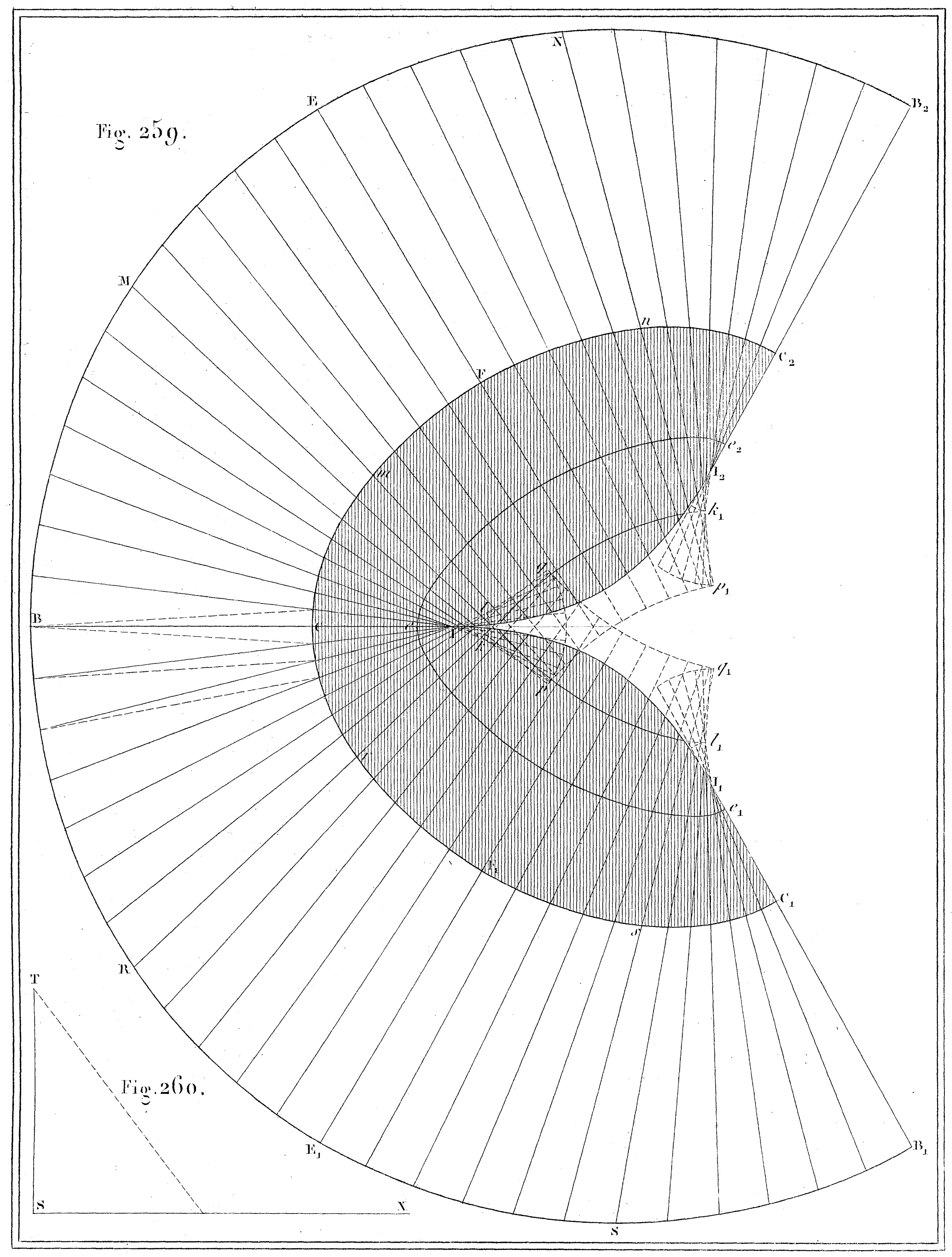
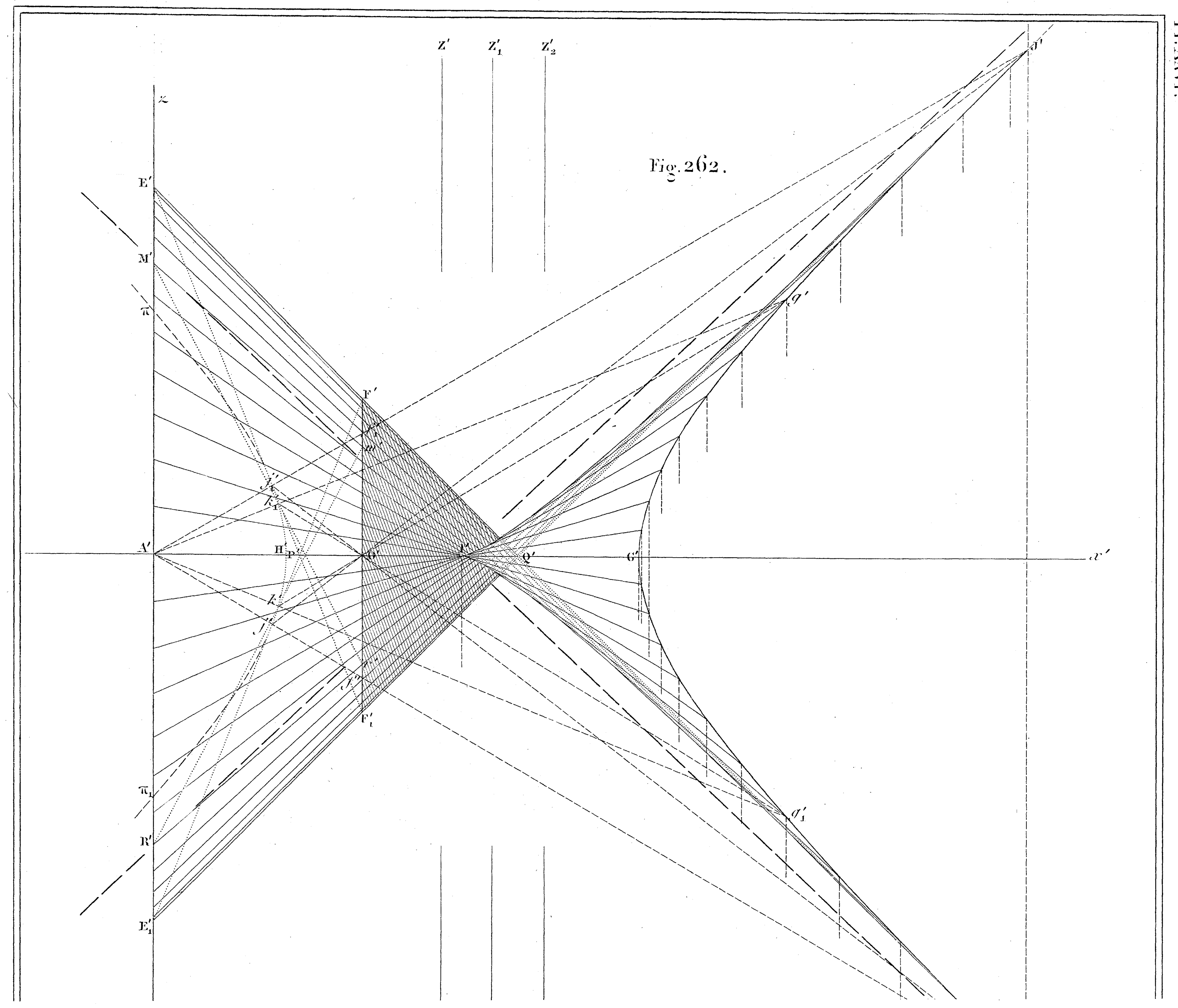
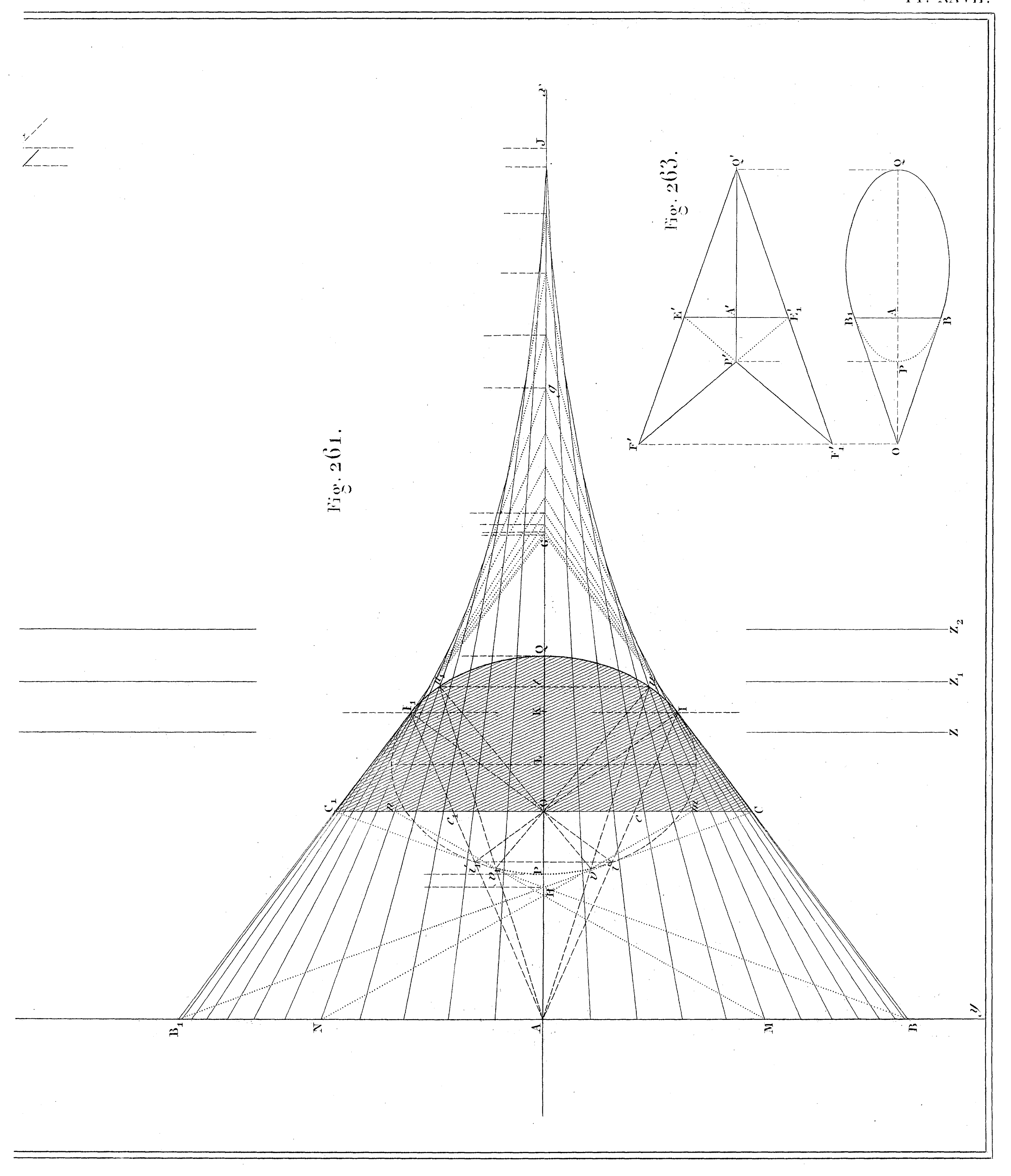


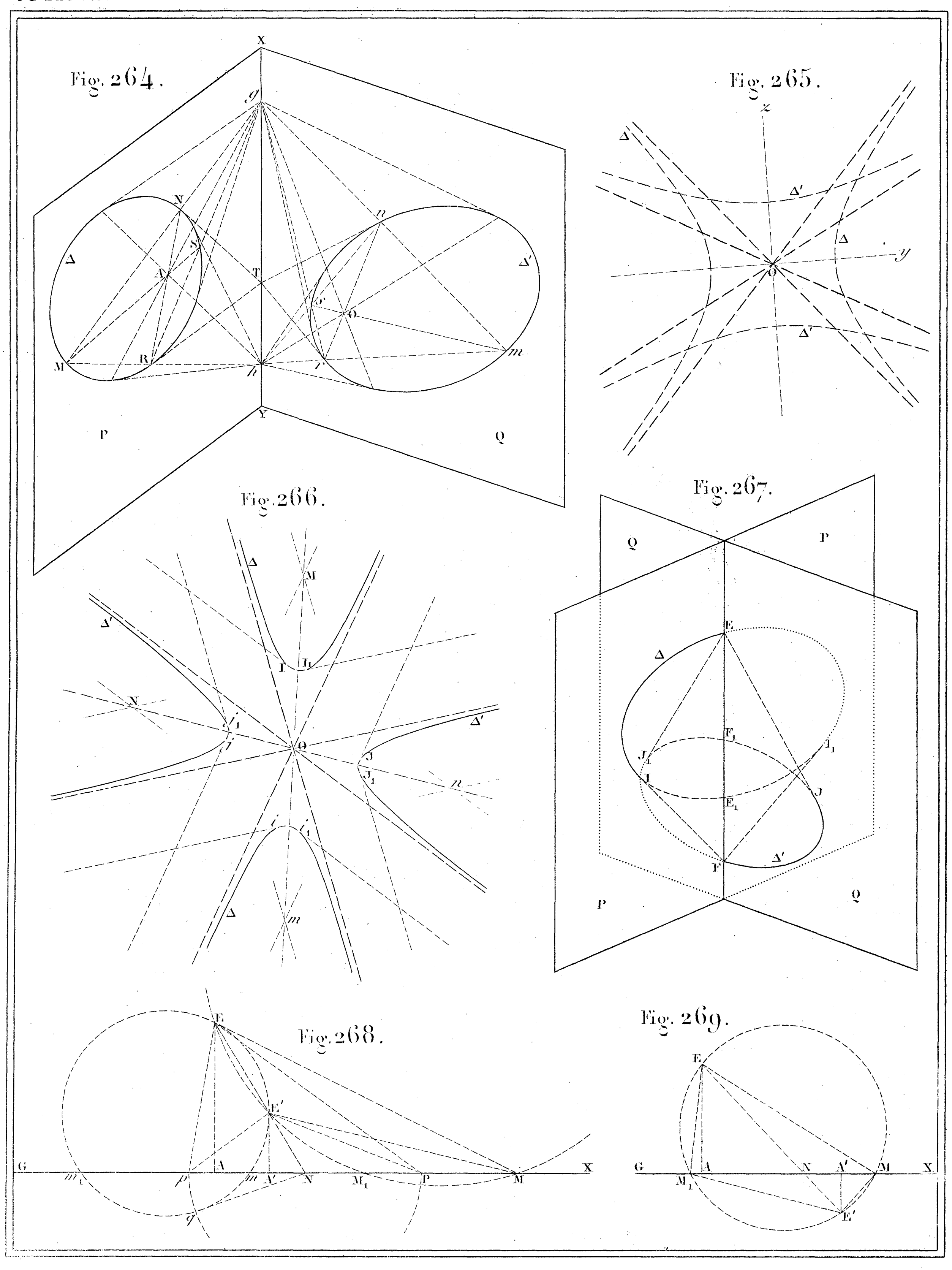
Fig. 259.
Fig. 260.

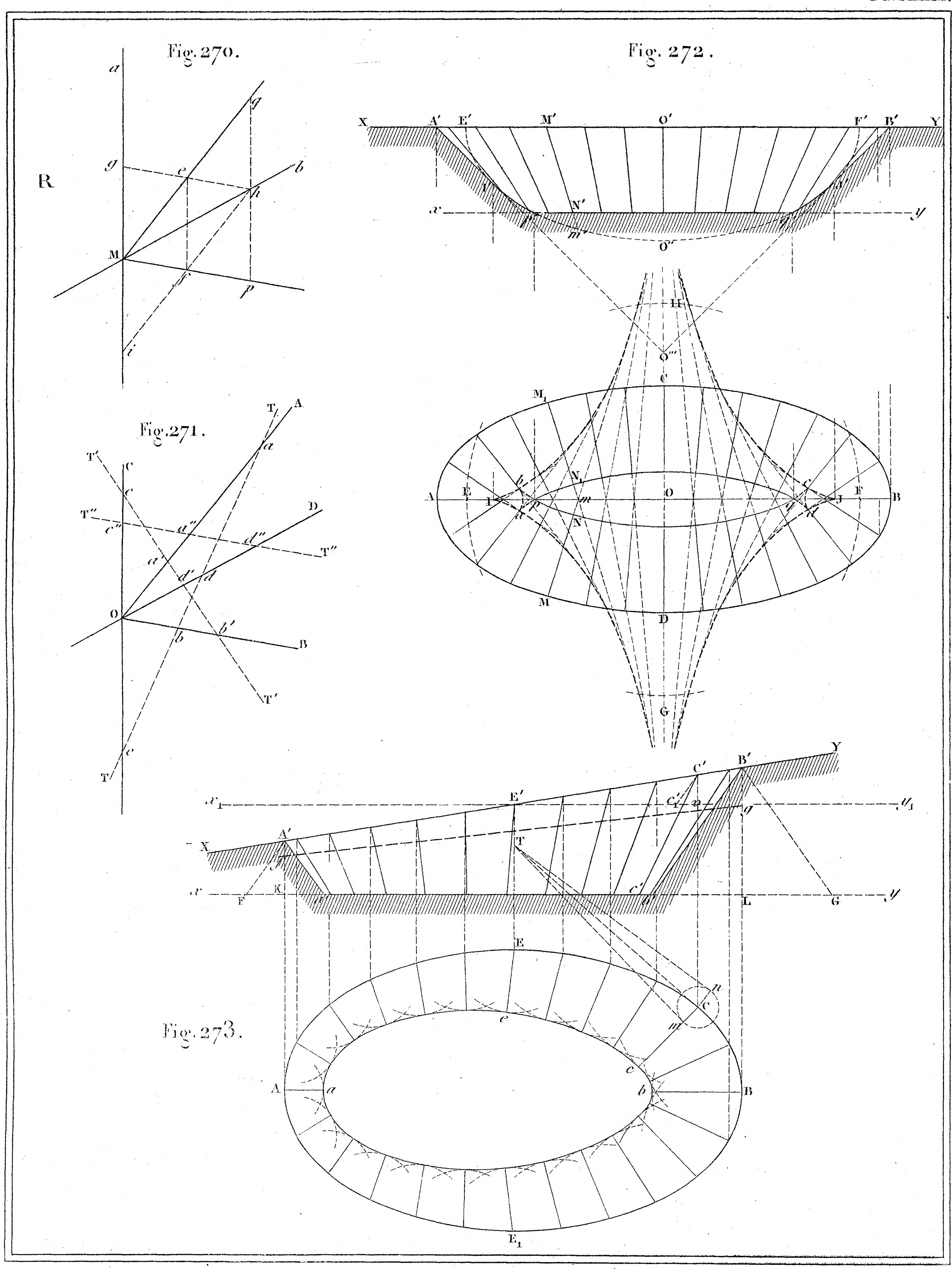
Pl. XXVI.




Fig. 261.
Fig. 263.

Pl. XXVIII.


Fig. 264.
X
g
N
S
A
T
n
o
O
Δ
Δ'
M
R
h
r
m
Y
P
Q
Fig. 265.
z
Δ
Δ'
Δ
y
O
Δ'
Fig. 266.
Δ
M
Δ'
I
I_1
N
i_1
i
O
J
J_1
Δ'
n
i
i_1
Δ
m
Fig. 267.
Q
P
E
Δ
F_1
J_1
I_1
I
J
E_1
F
Δ'
P
Q
Fig. 268.
E
E'
G
m_1
p
A
m
A'
N
M_1
P
M
X
q
Fig. 269.
E
G
M_1
A
N
A'
M
X
E'


Fig. 270.
Fig. 271.
Fig. 272.
Fig. 273.

Pl. XXX.

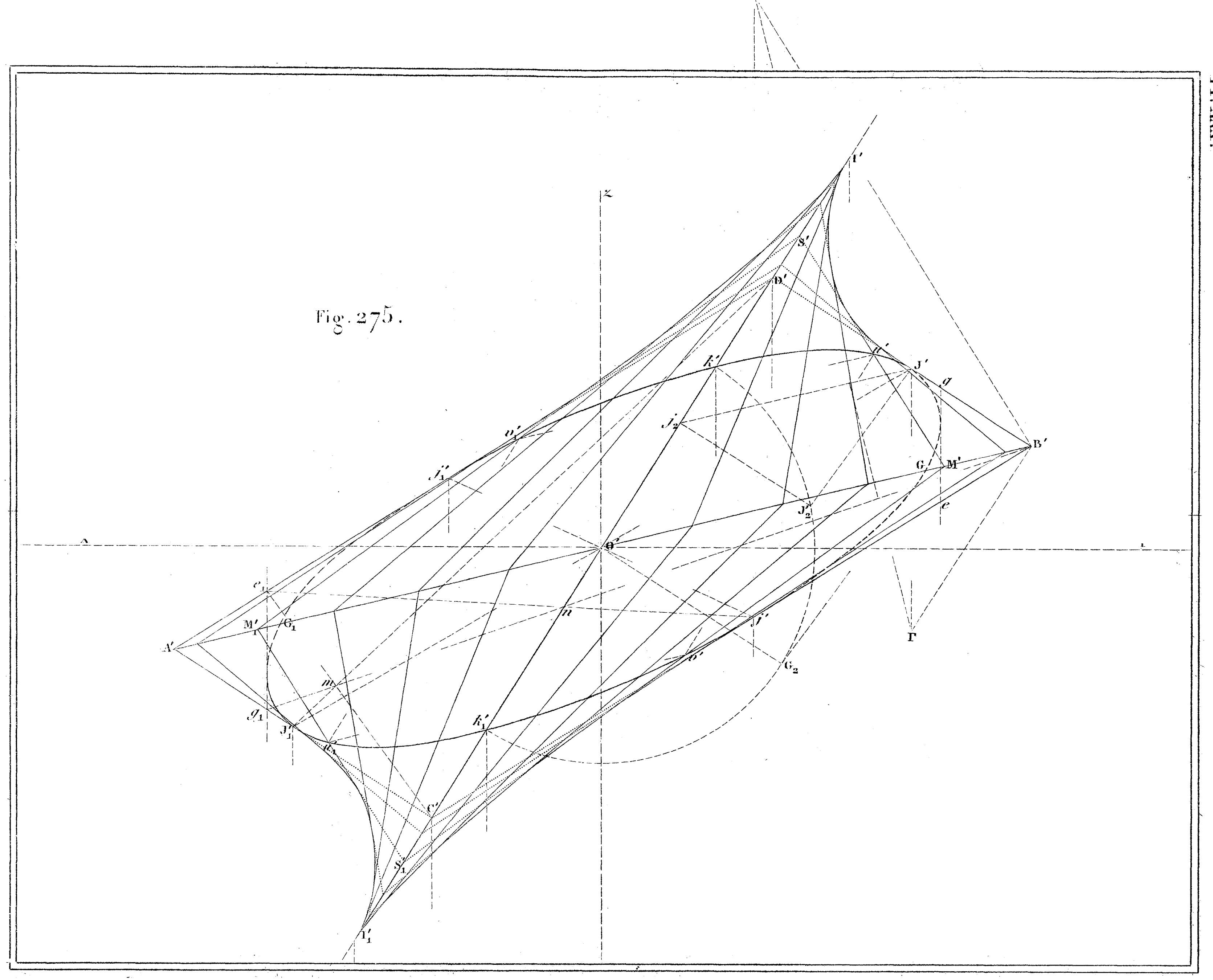


Fig. 275.

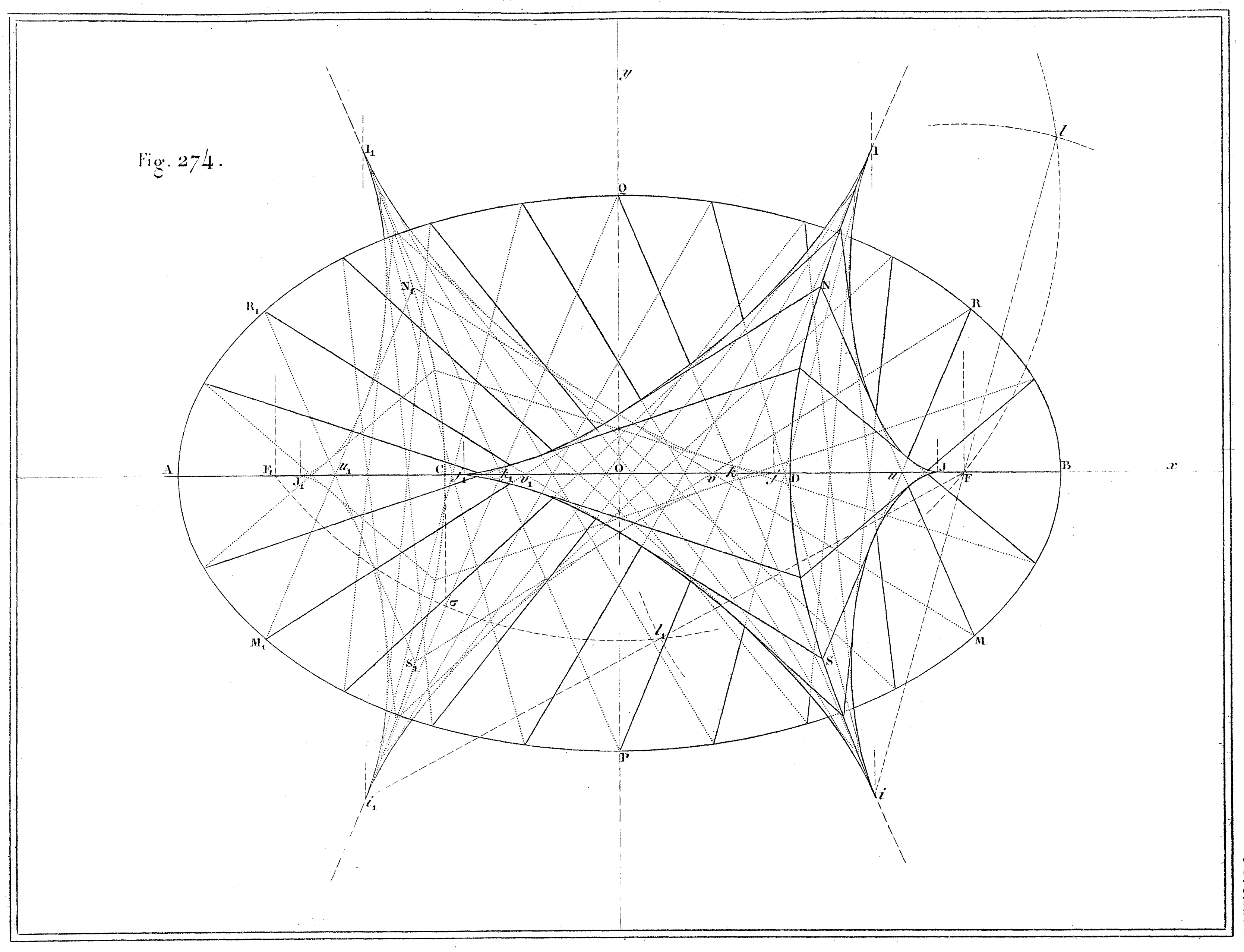
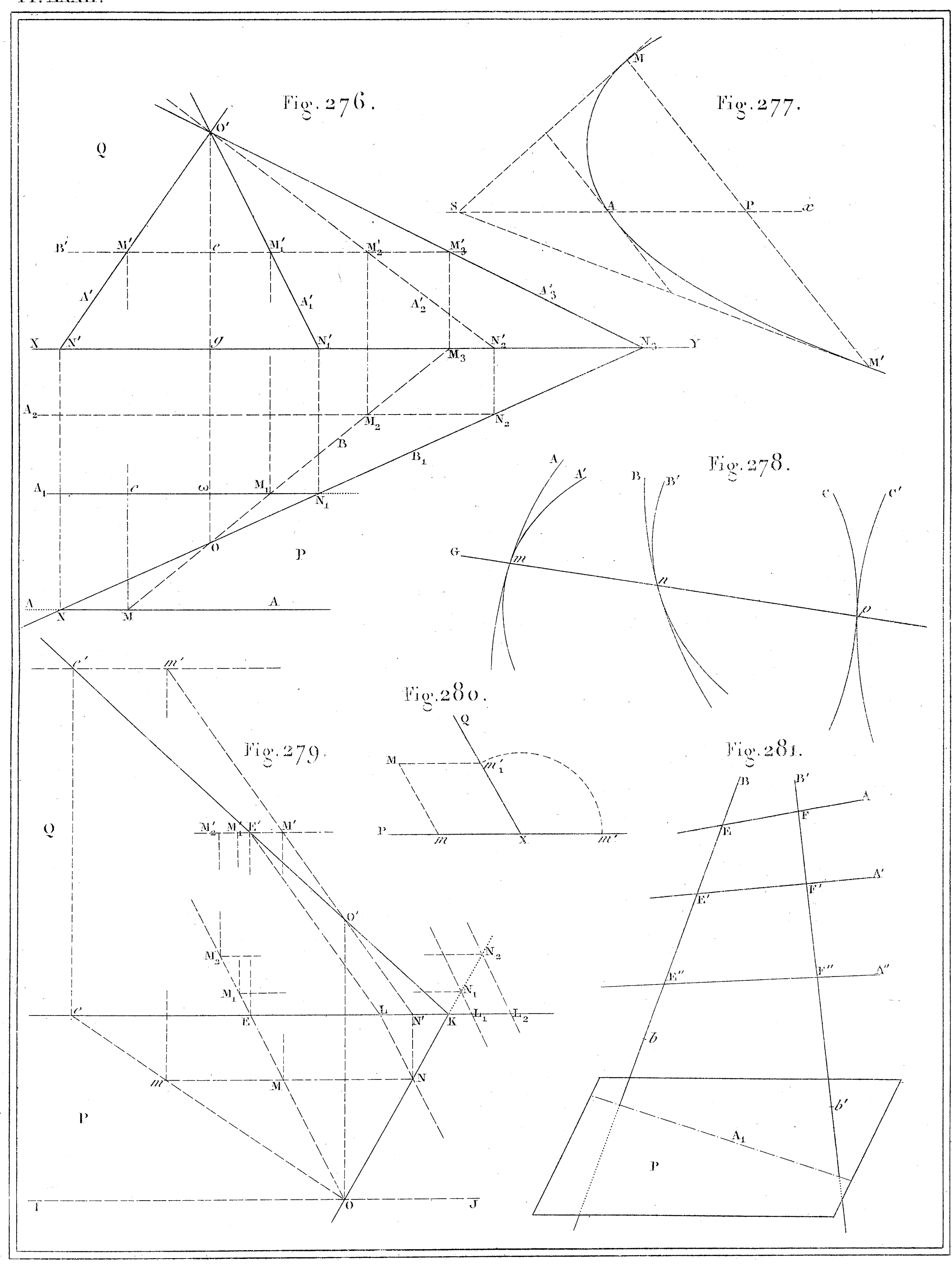
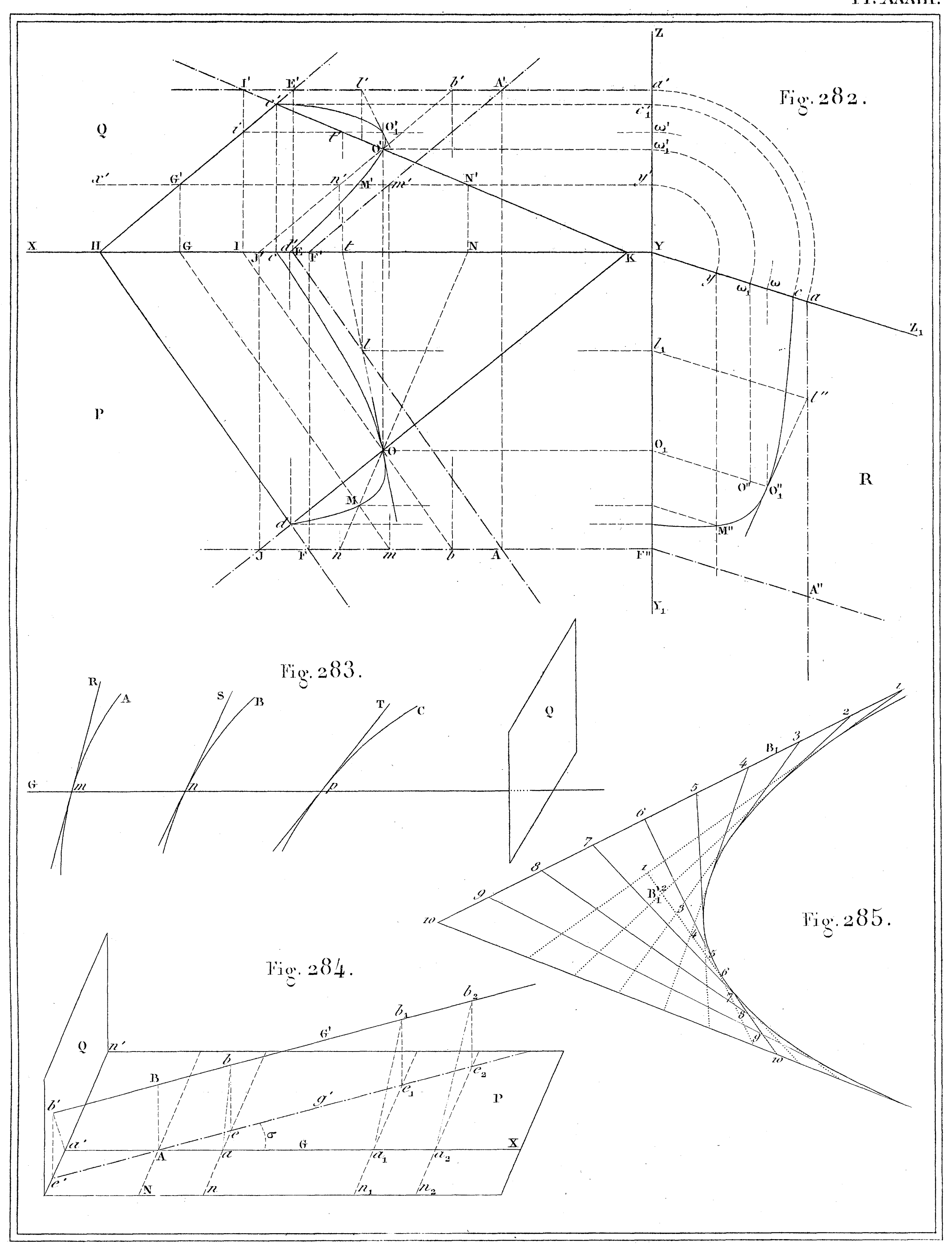
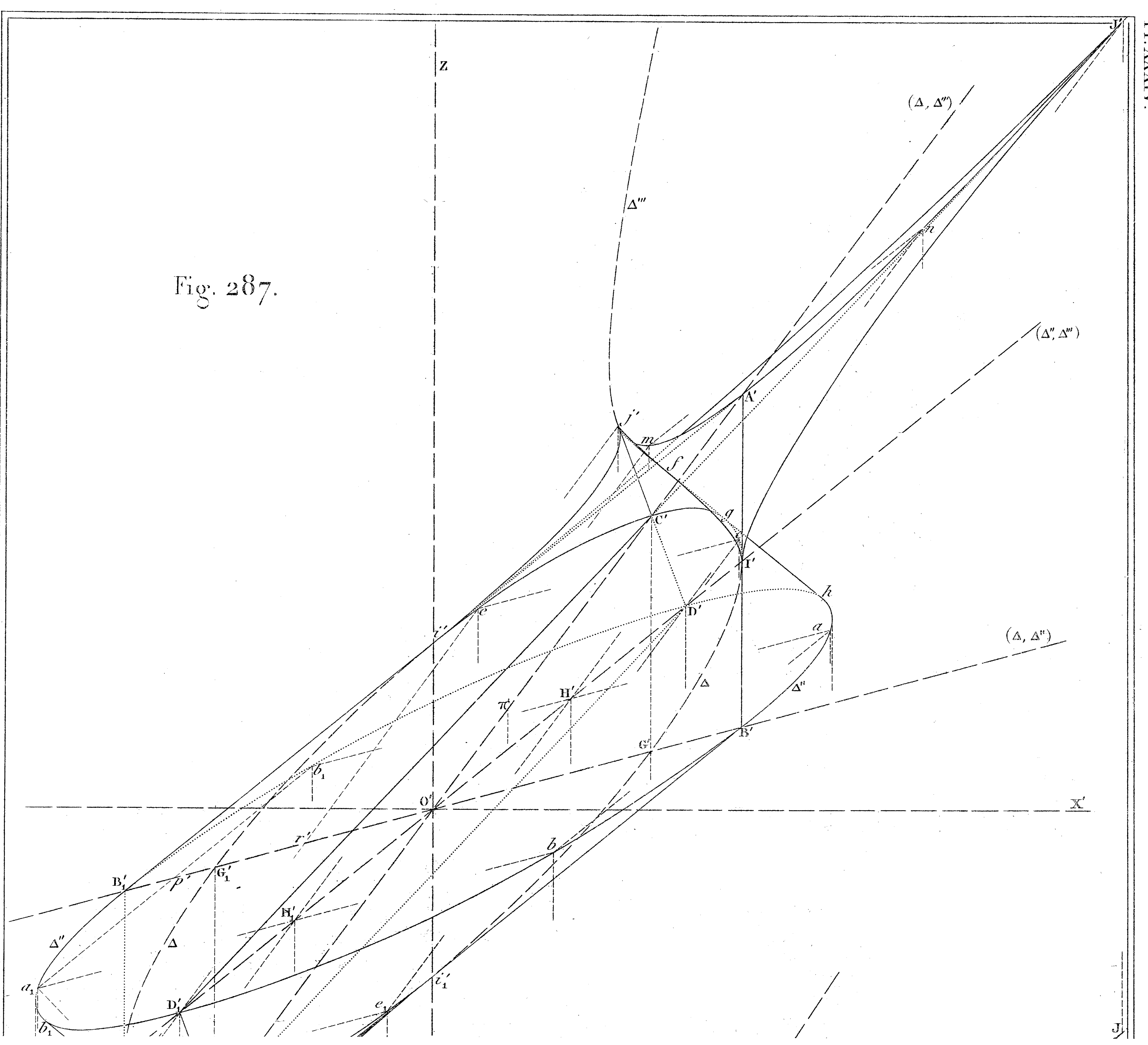
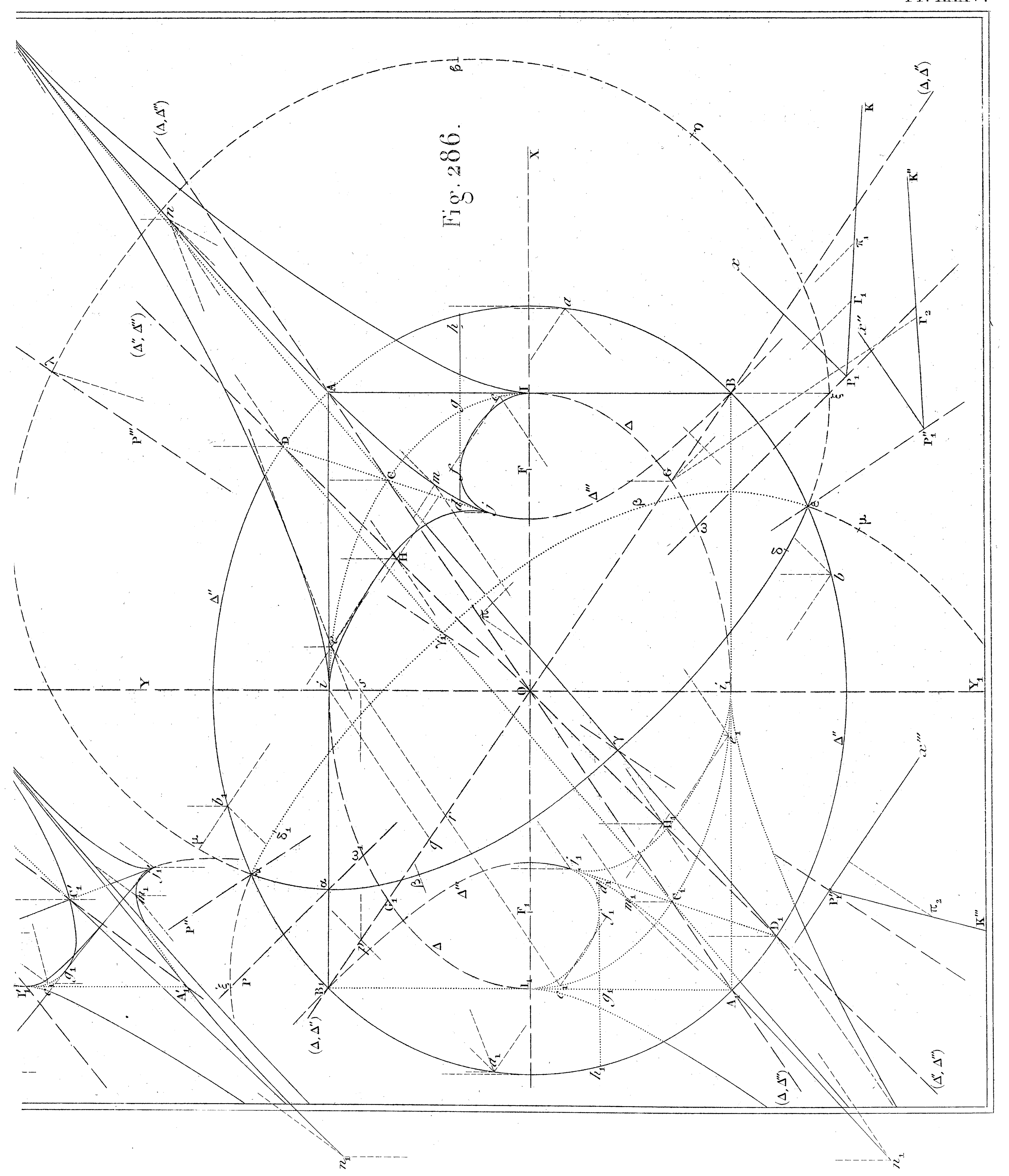


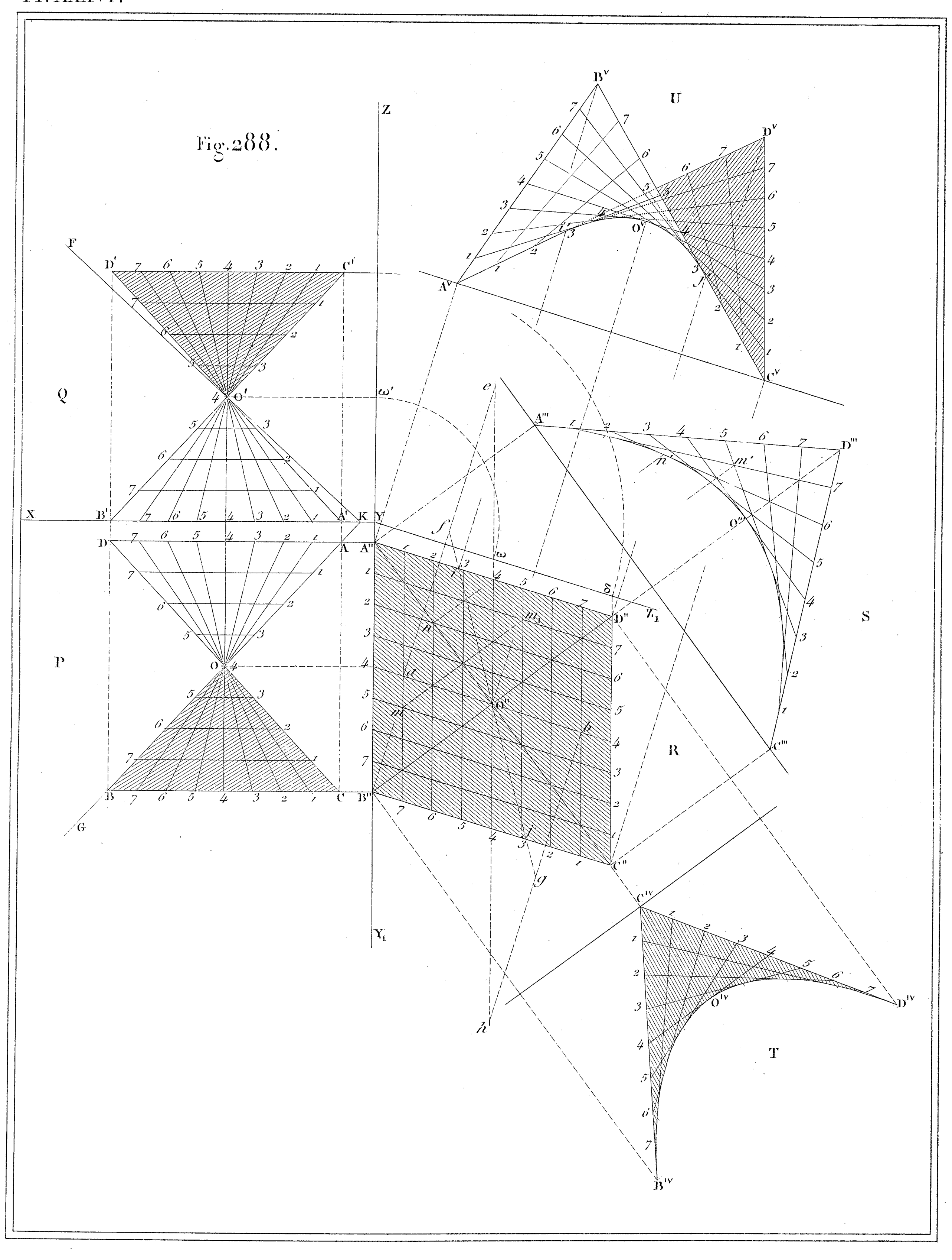
Fig. 274.

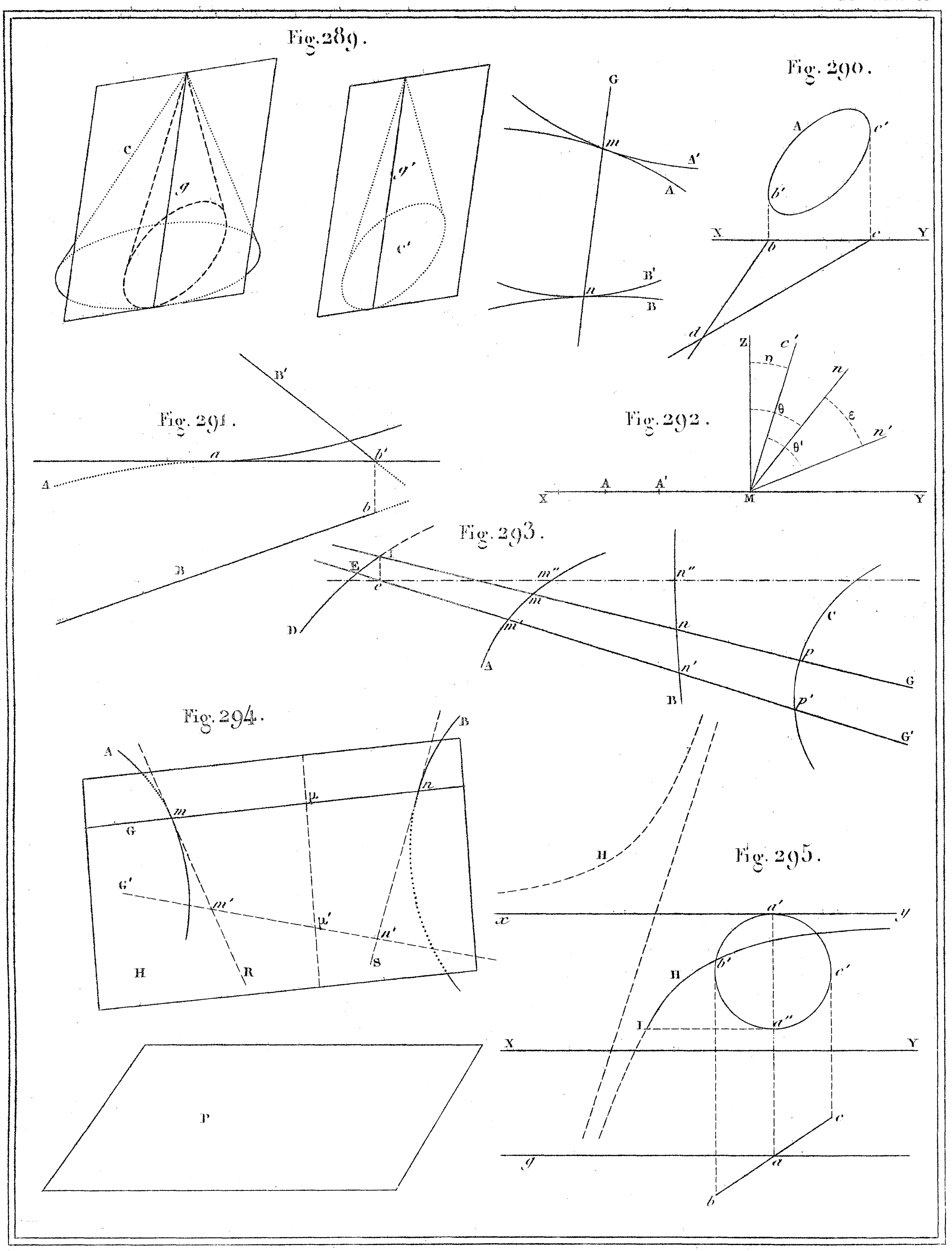

Fig. 276.
Fig. 277.
Fig. 278.
Fig. 279.
Fig. 280.
Fig. 281.

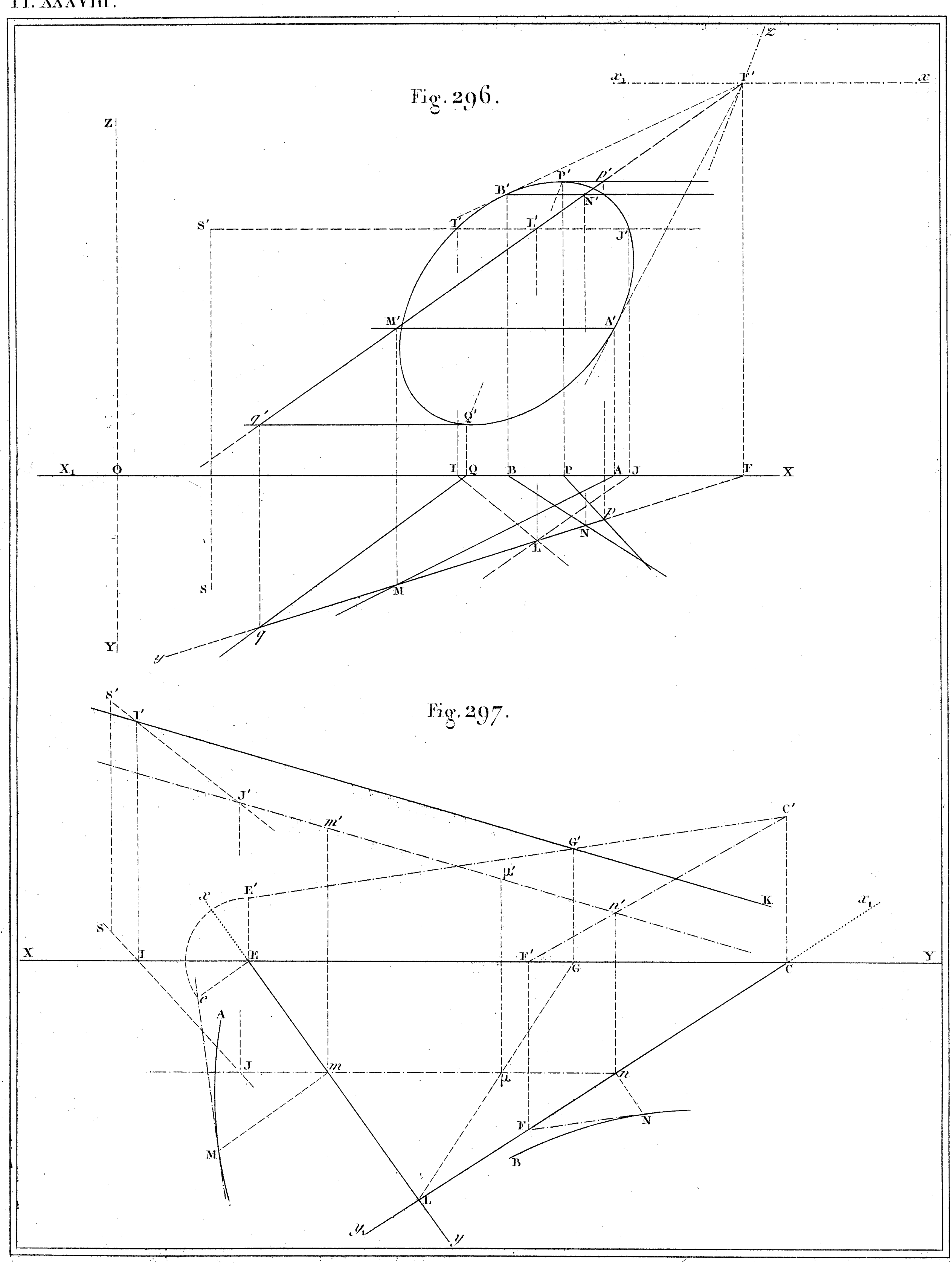

Fig. 282.
Fig. 283.
Fig. 284.
Fig. 285.


Fig. 287.
(Δ, Δ''')
(Δ'', Δ''')
(Δ, Δ'')
Δ'''
Δ''
Δ
Z
X'
O'
π'


Fig. 286.


Fig. 288.


Fig. 289.
Fig. 290.
Fig. 291.
Fig. 292.
Fig. 293.
Fig. 294.
Fig. 295.


Fig. 296.
Fig. 297.

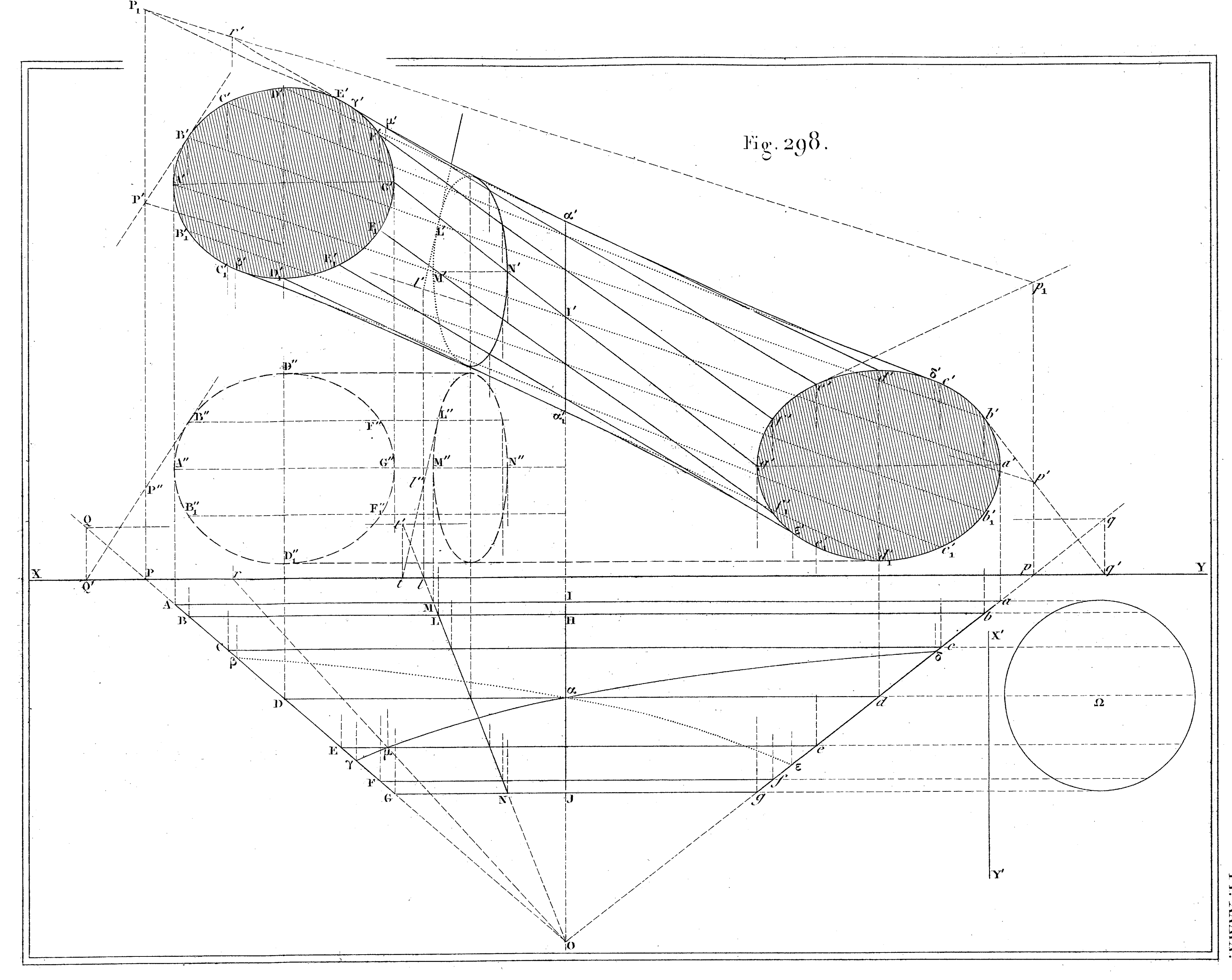


Fig. 298.

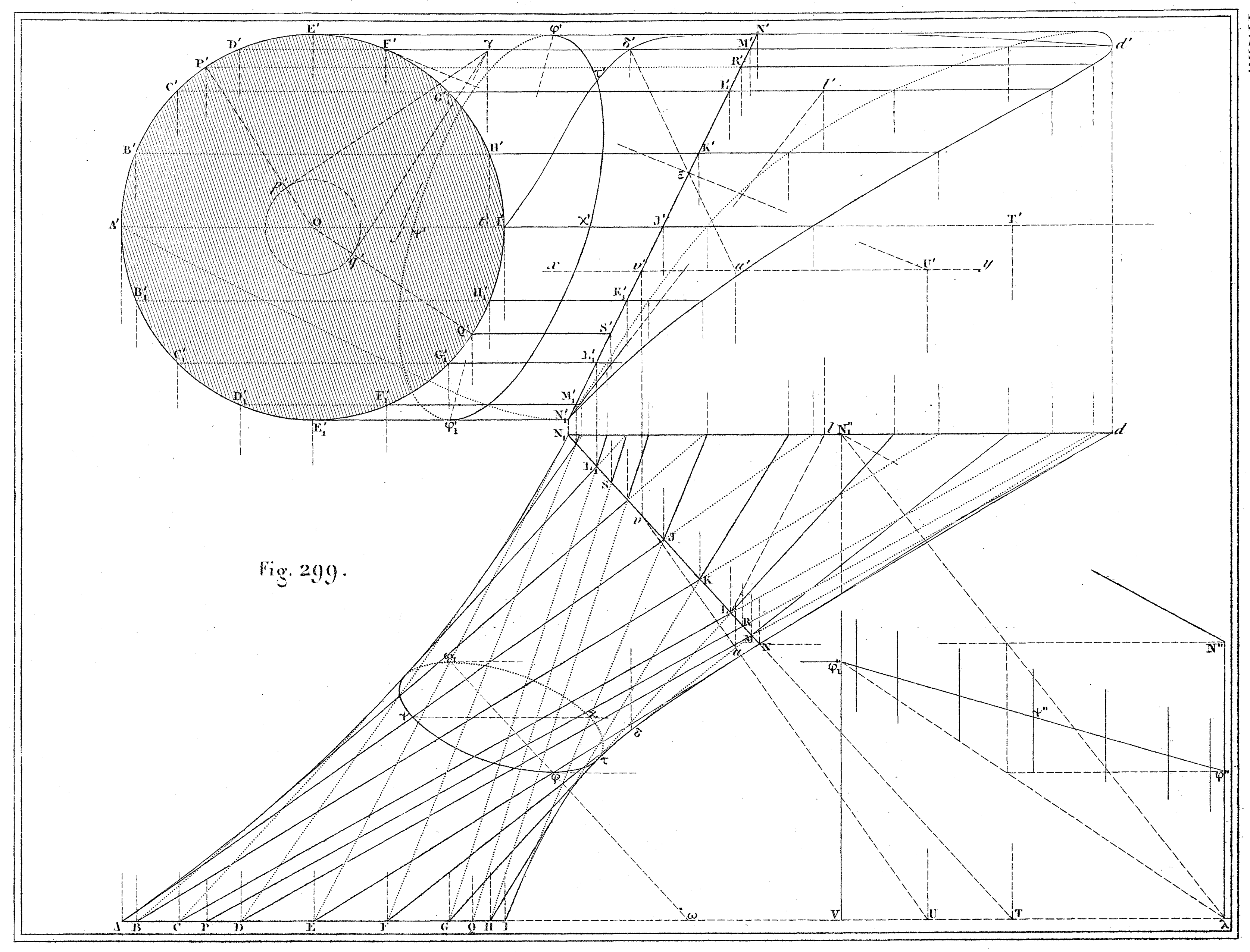
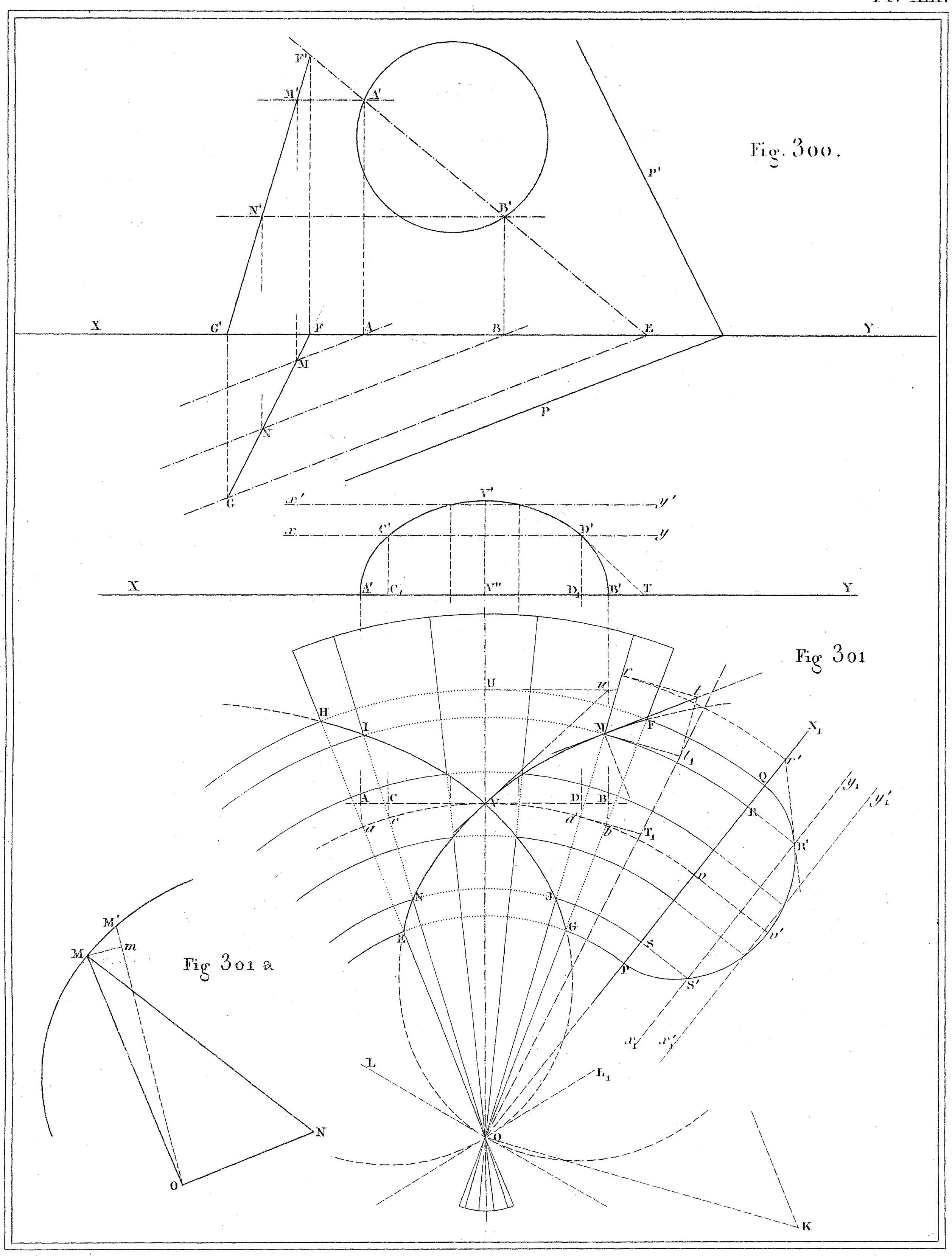
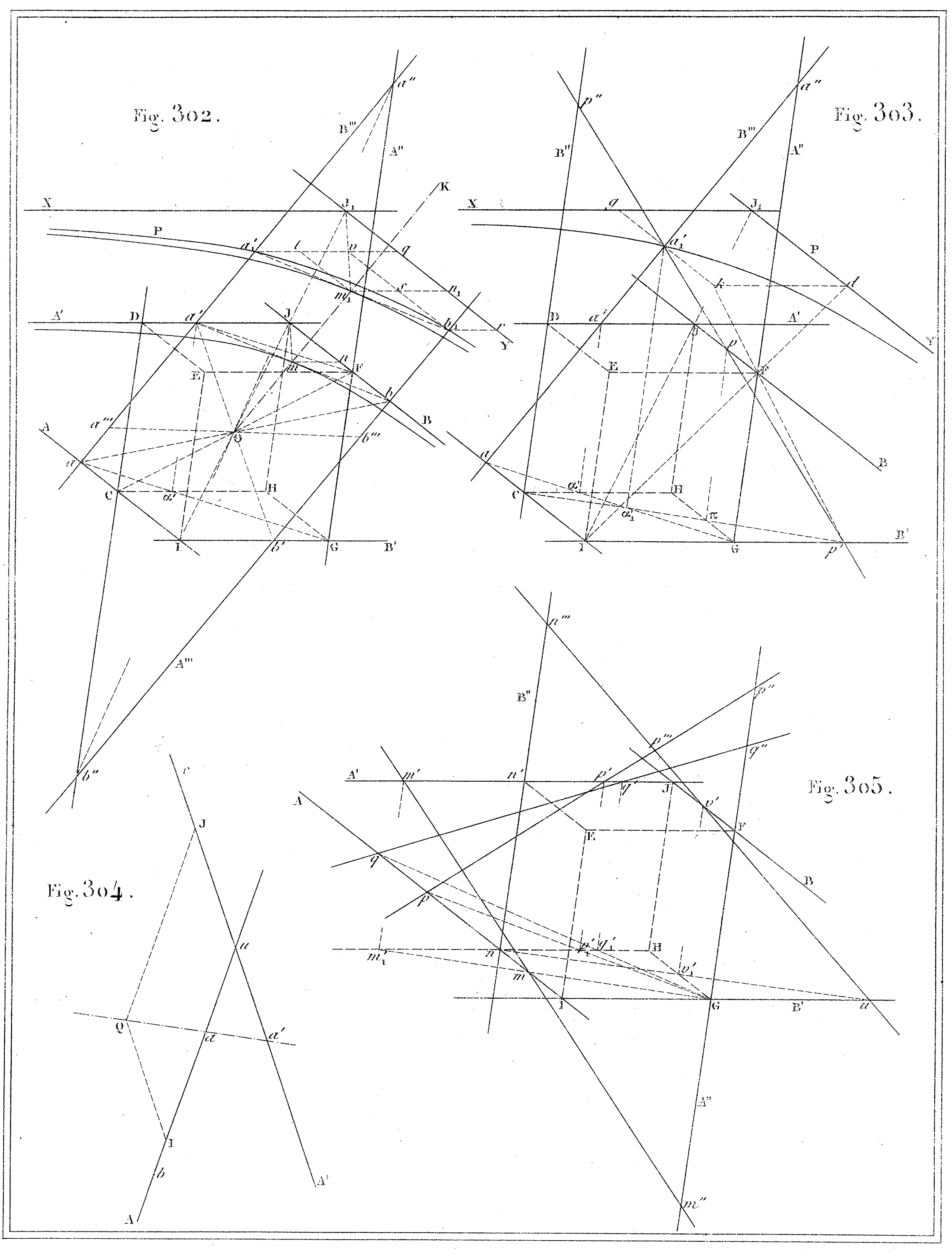
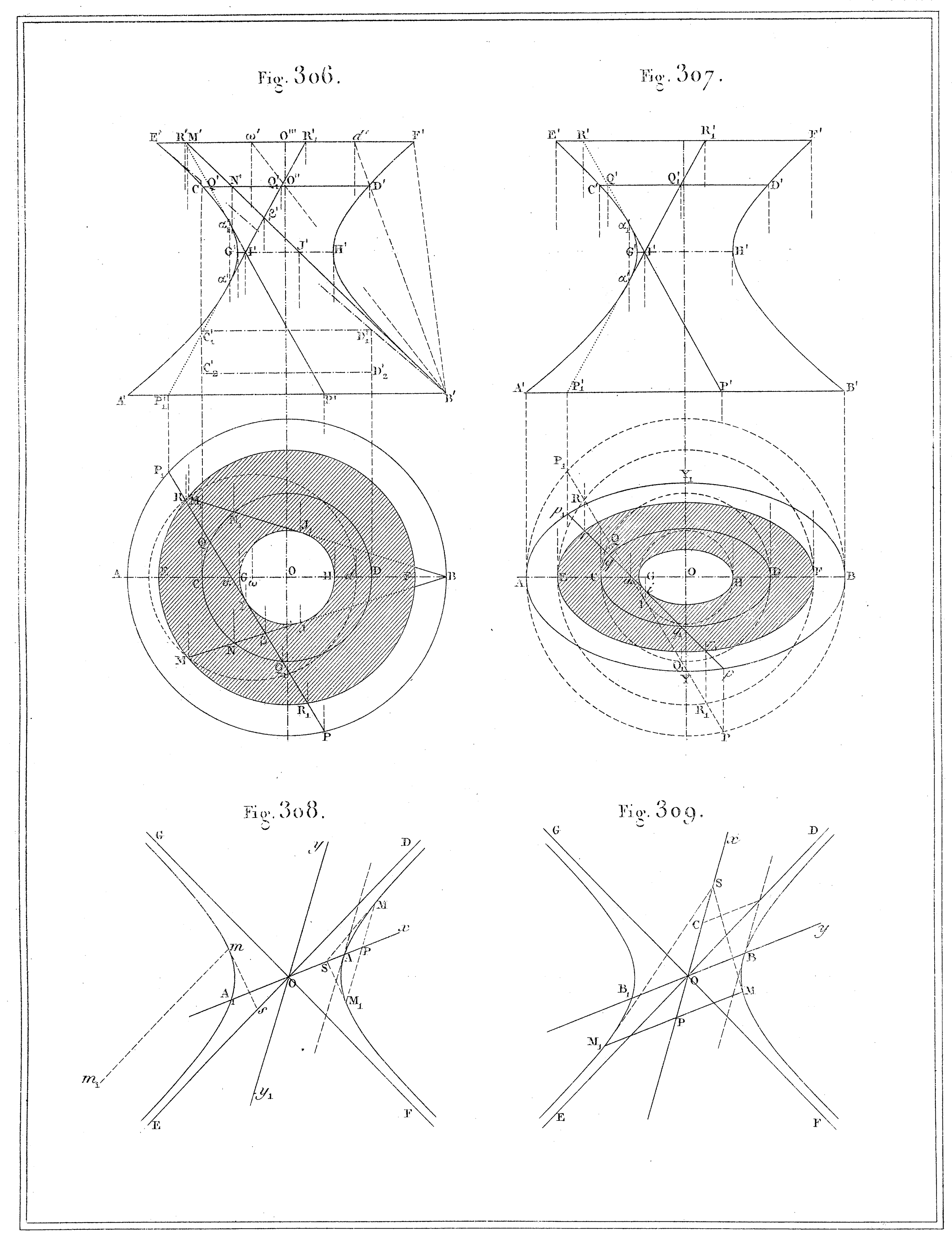
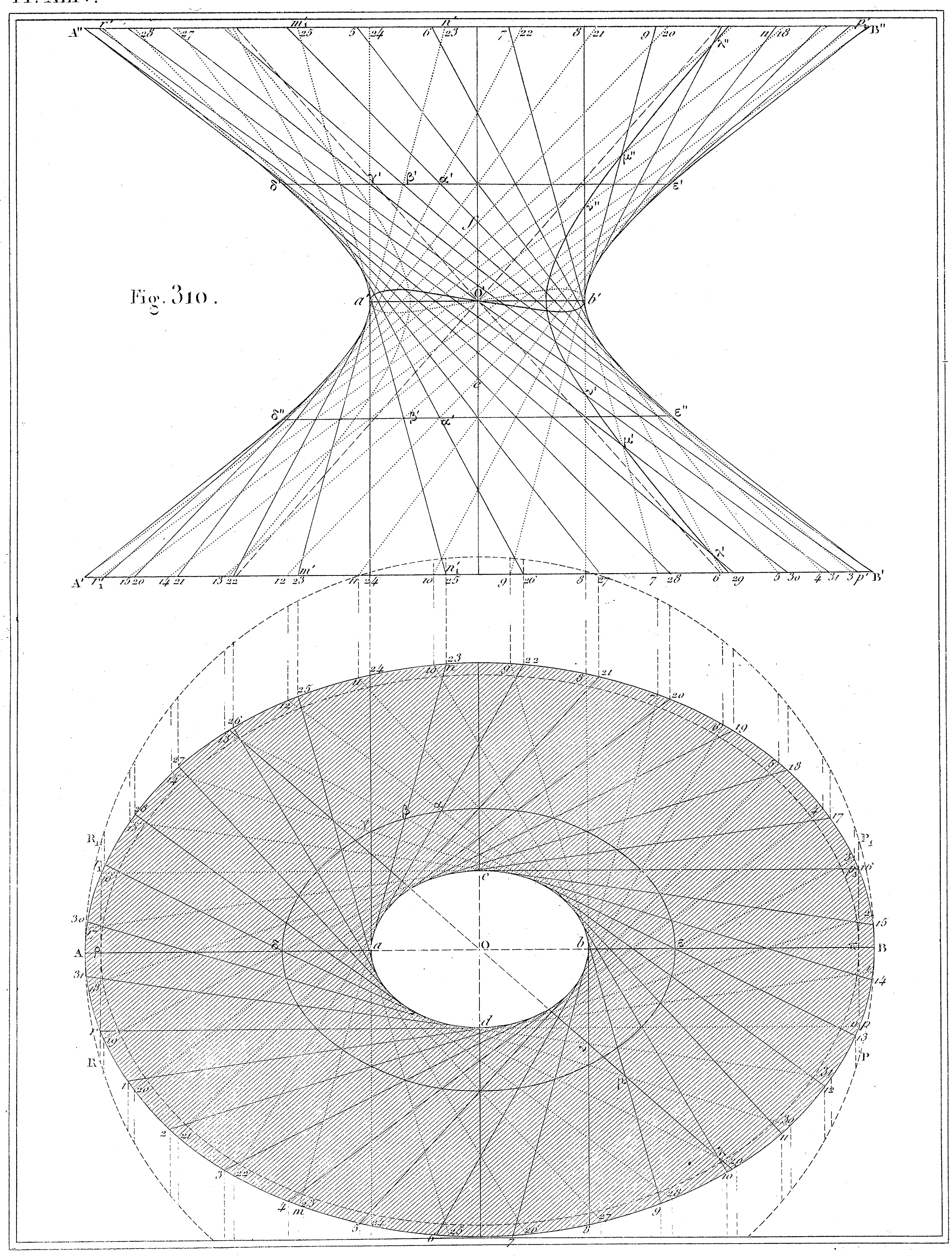


Fig. 299.


Fig. 300.
F'
M'
A'
N'
B'
P'
X
G'
F
A
B
E
Y
M
N
P
G
V'
C'
D'
X
A'
C1
V''
D1
B'
T
Y
Fig 301
U
H
I
M
F
X1
Q
R
R'
A
C
V
D
B
T1
N
J
G
S
S'
P
L
L1
O
K
M'
m
M
Fig 301 a
N
O


Fig. 302.
Fig. 303.
Fig. 304.
Fig. 305.


Fig. 306.
Fig. 307.
Fig. 308.
Fig. 309.


Fig. 310.

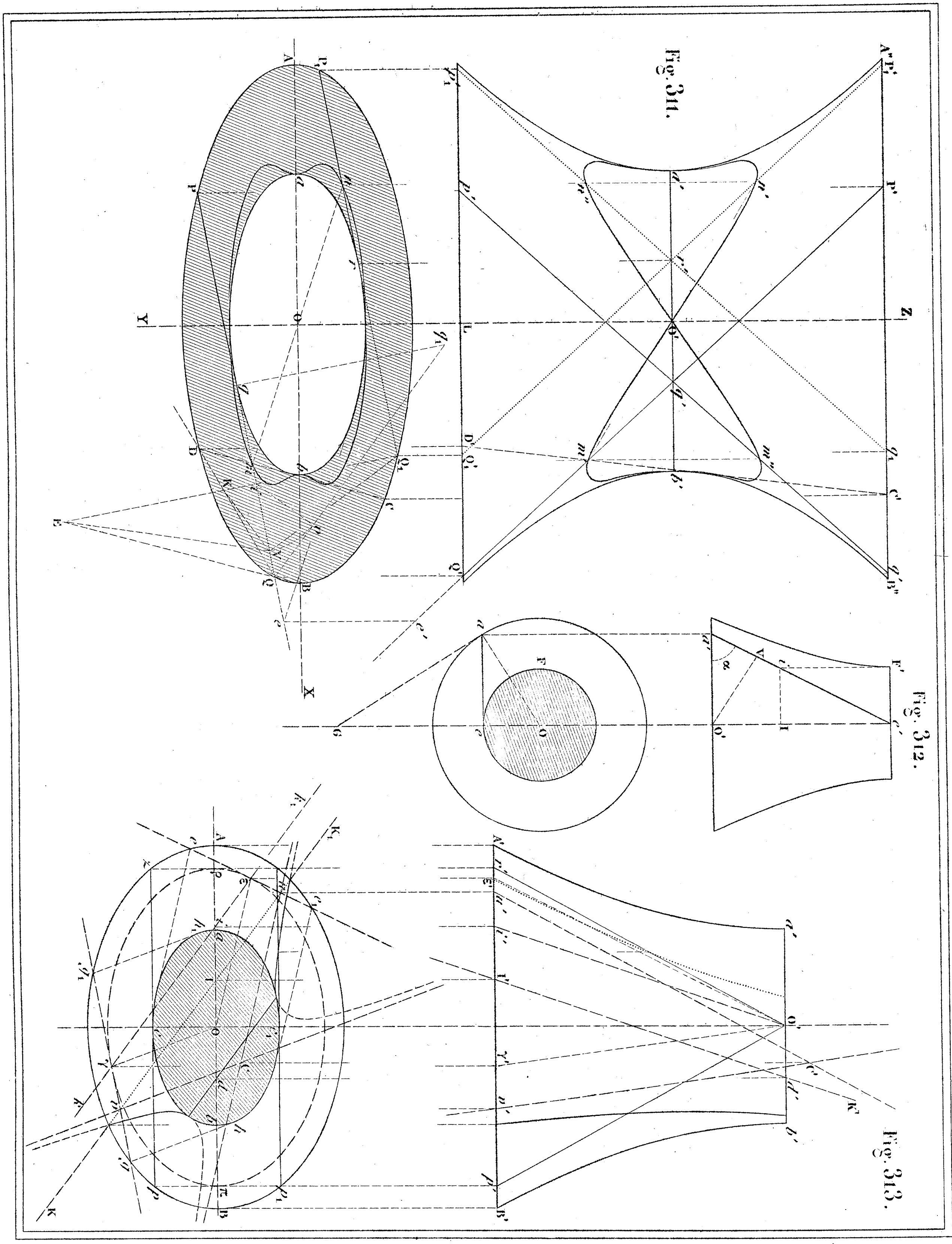
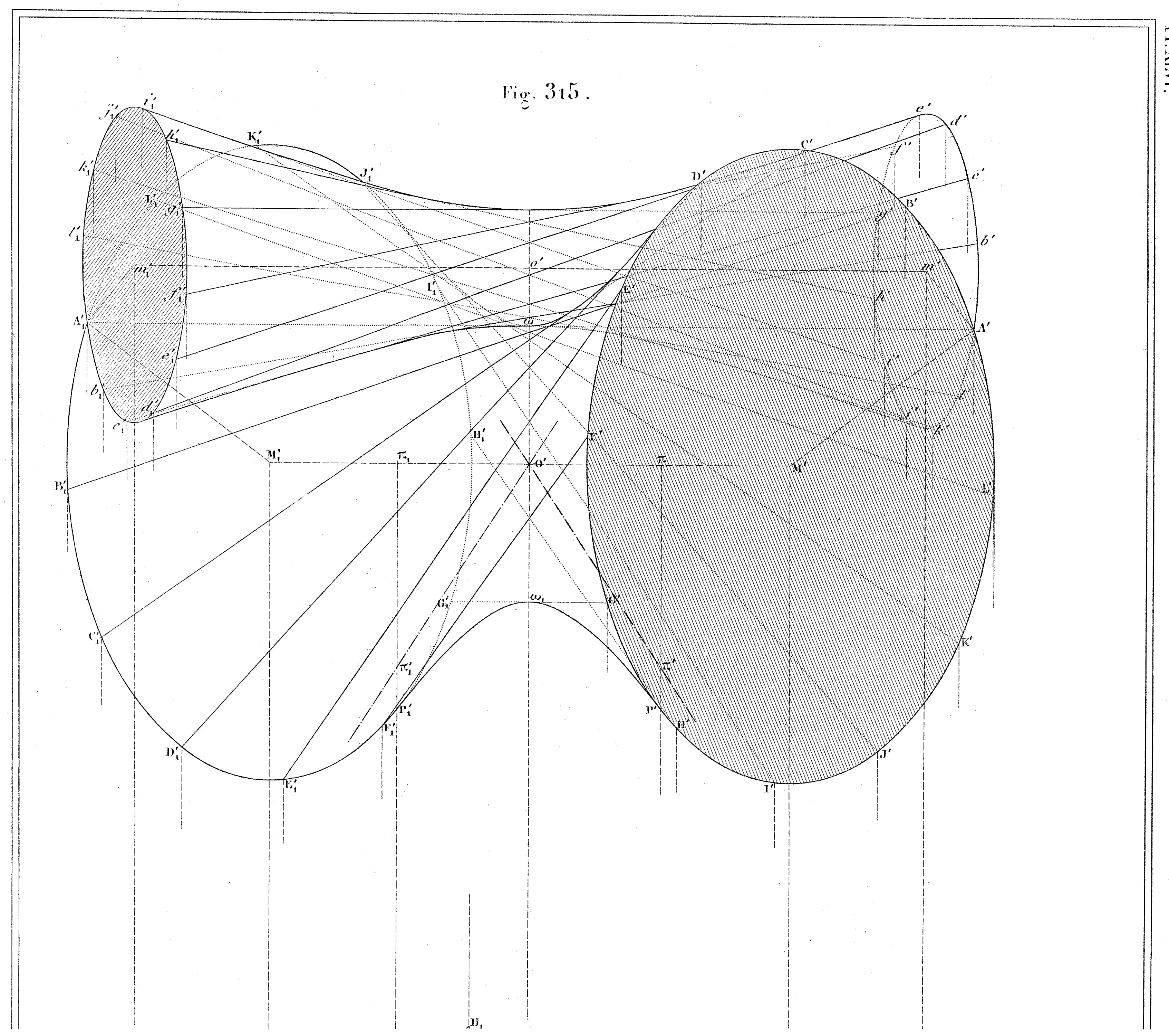
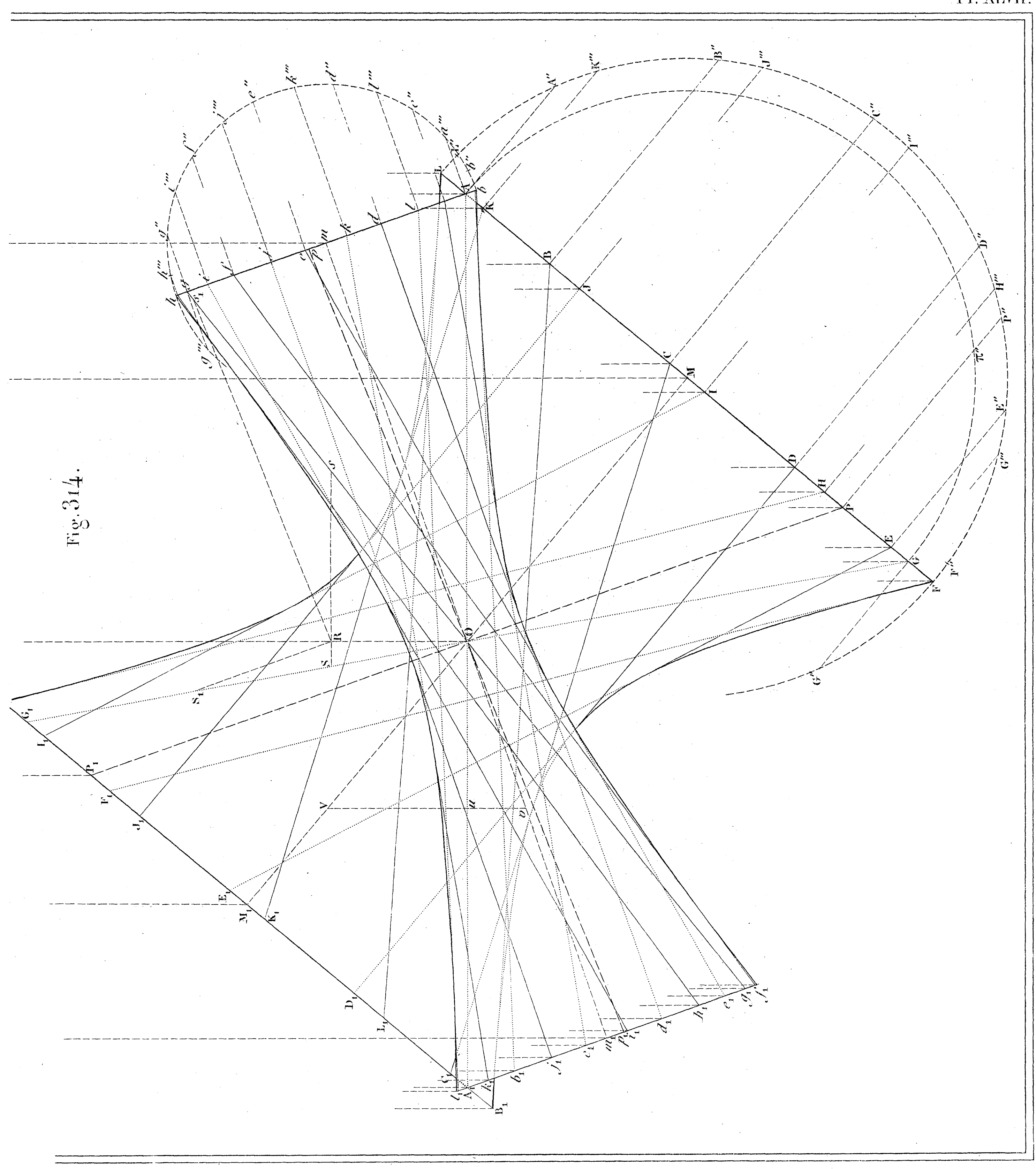
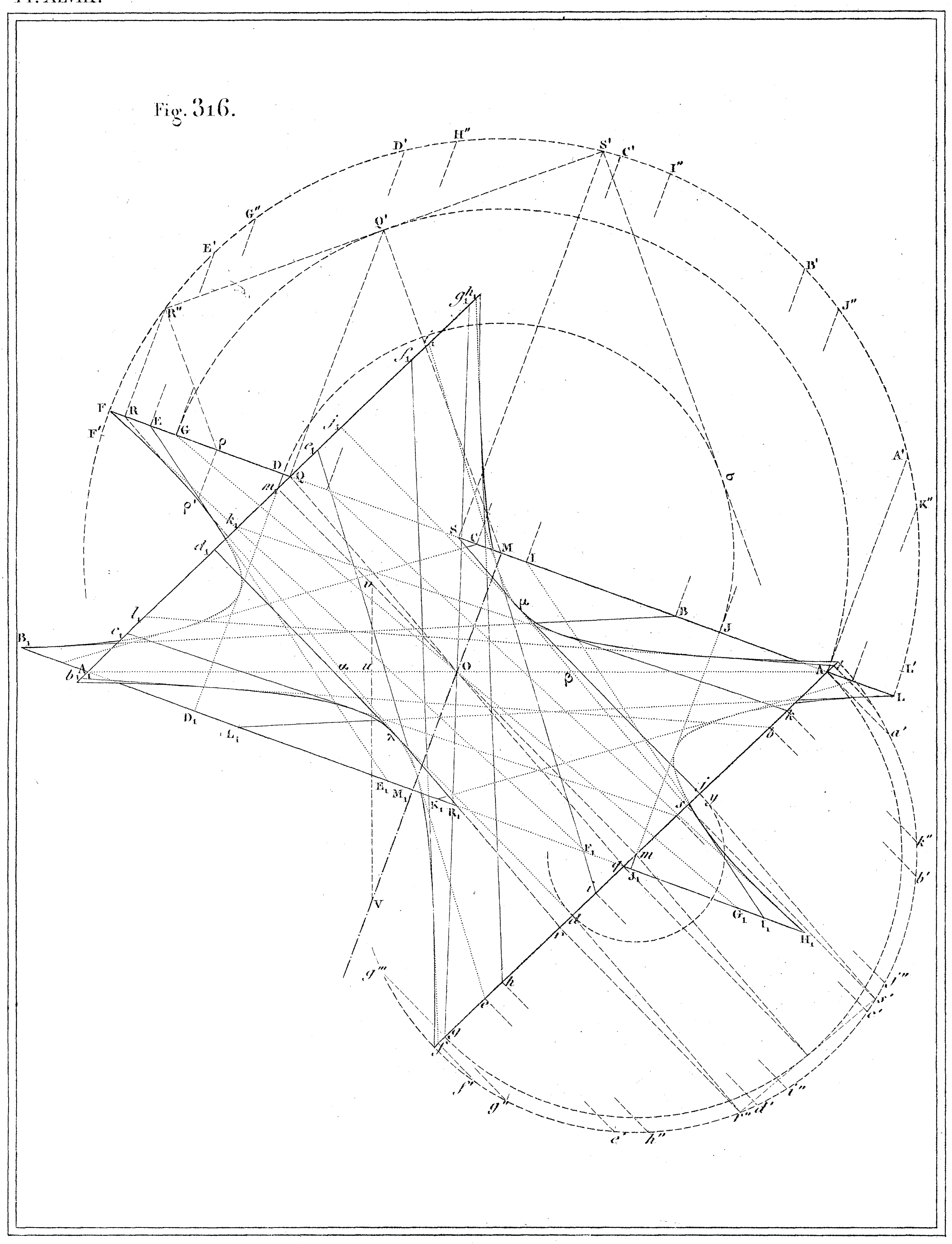

Fig. 311.
Fig. 312.
Fig. 313.

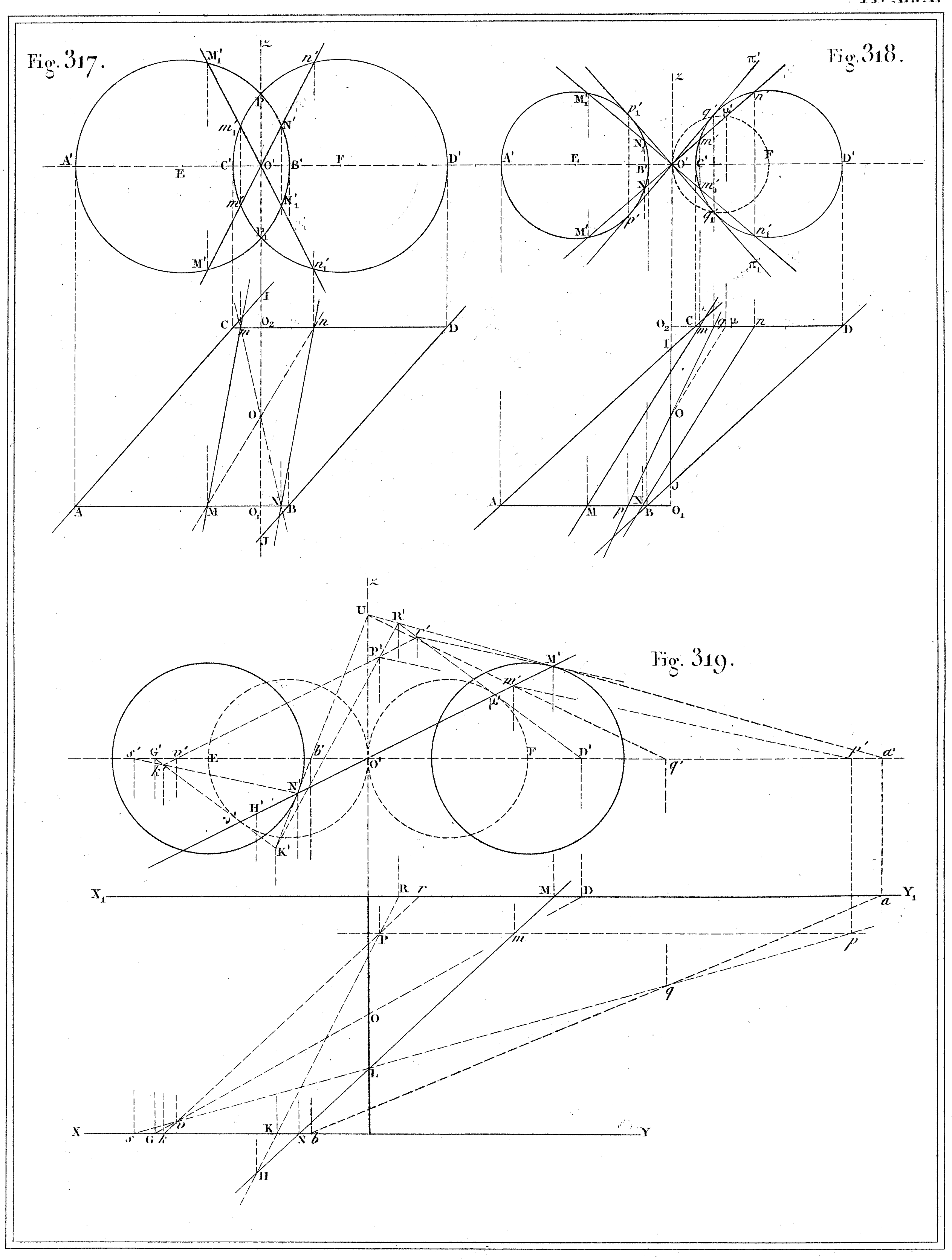
Fig. 315.

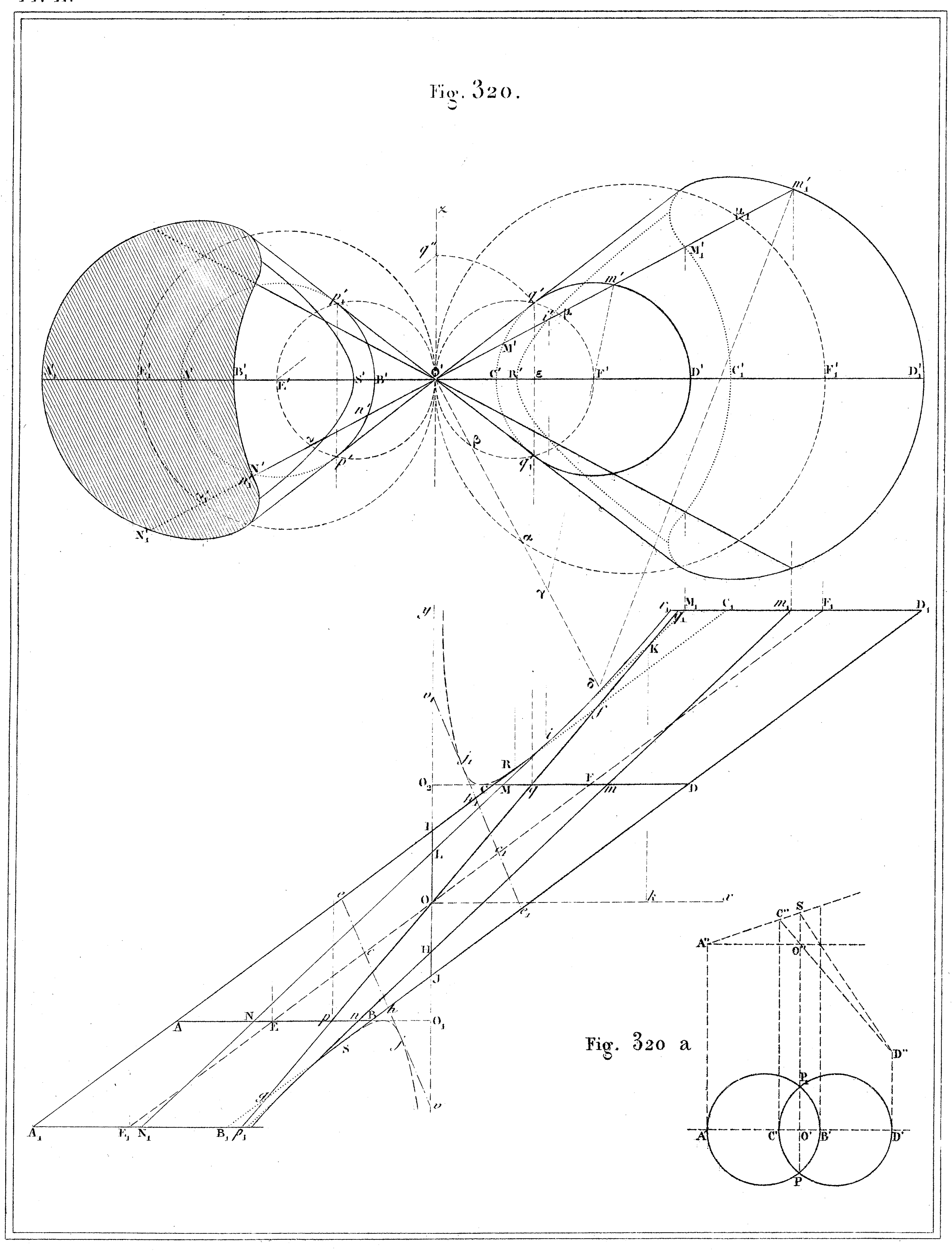



Fig. 314.

Pl. XLVIII.




Fig. 317.
Fig. 318.
Fig. 319.


Fig. 320.
Fig. 320 a

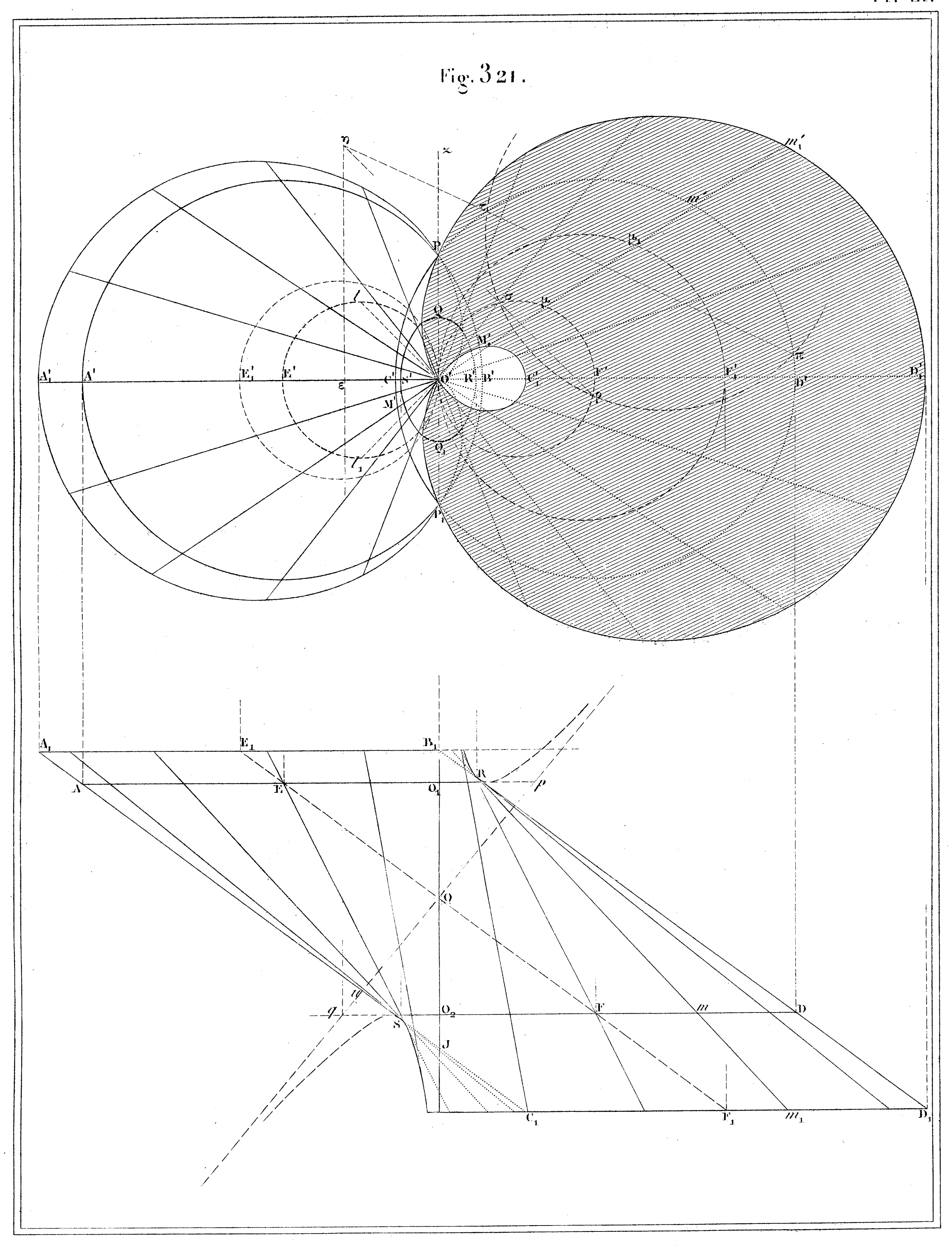
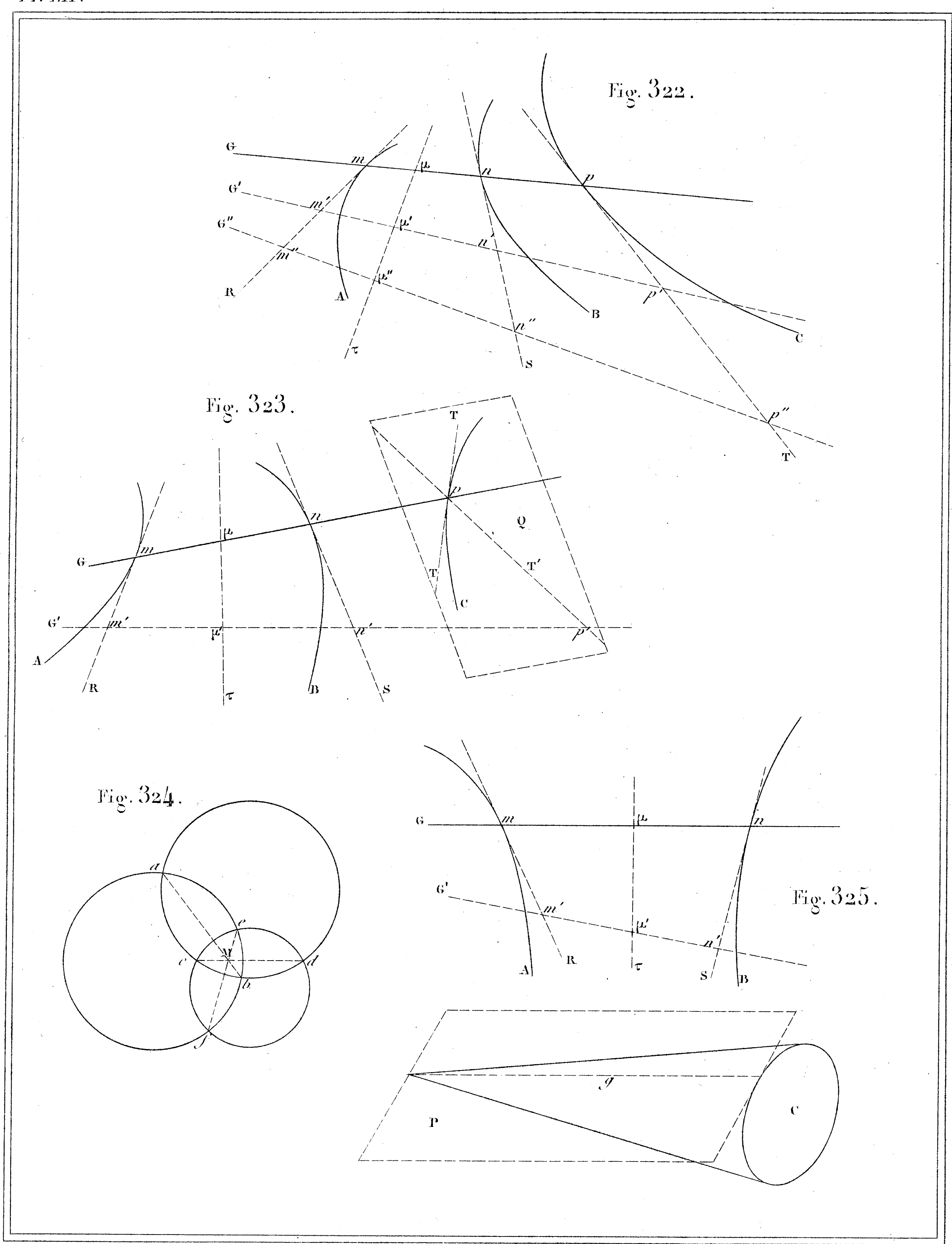


Fig. 321.


Fig. 322.
G
G′
G″
m
m′
m″
μ
μ′
μ″
n
n′
n″
p
p′
p″
R
A
τ
S
B
C
T
Fig. 323.
G
G′
m
m′
μ
μ′
n
n′
p
p′
T
T′
Q
C
A
R
τ
B
S
Fig. 324.
a
b
c
d
e
f
M
Fig. 325.
G
G′
m
m′
μ
μ′
n
n′
A
R
τ
S
B
P
g
C

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

OUVRAGES DE L'AUTEUR.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. In-4°, publié en *trois Parties* avec Atlas; 1873-1880-1885 .... 30 fr.

Chaque Partie se vend séparément .... 10 fr.

La Ire Partie (2e édition) contient tout ce qui est exigé pour l'*admission à l'École Polytechnique*. Elle est suivie d'un *Supplément contenant la solution de deux problèmes et des figures cavalières pour l'explication des constructions les plus difficiles*.

La IIe Partie (2e édition) et la IIIe Partie (2e édition) sont le développement du *Cours de Géométrie descriptive* professé à *l'École Polytechnique*.

TRAITÉ DE PERSPECTIVE LINÉAIRE, contenant les Tracés pour les Bas-Reliefs et les Décorations théâtrales, avec une Théorie des effets de perspective; 2e édition, entièrement revue. In-4°, avec Atlas in-folio de 40 planches, dont 8 doubles; 1884 .... 25 fr.

RECHERCHES sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques. In-8°; 1867 .... 6 fr.

MÉMOIRE sur l'appareil de l'arche biaise, suivi d'une analyse des principaux Ouvrages publiés sur cette question, et d'une réponse à des critiques sur l'enseignement de la Stéréotomie à l'École Polytechnique. (Extrait des *Annales du Conservatoire des Arts et Métiers*.) .... 2 fr.

ÉTUDES ÉCONOMIQUES sur l'exploitation des chemins de fer. Grand in-8°; 1880 .... 4 fr. 50

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

PAR JULES DE LA GOURNERIE,

MEMBRE DE L'INSTITUT, OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR,
INSPECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES EN RETRAITE, PROFESSEUR HONORAIRE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ANCIEN EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ET PROFESSEUR DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Les Mathématiques ont des inventions très subtiles et qui peuvent beaucoup servir tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et diminuer le travail des hommes.

DESCARTES (*Discours de la Méthode*).

SECONDE ÉDITION.

TROISIÈME PARTIE. — TEXTE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES,

Quai des Augustins, 55.

1885

AVANT-PROPOS DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

Je présente au public la troisième Partie de mon *Traité de Géométrie descriptive;* elle contient les VIIIe, IXe et Xe Livres de cet Ouvrage.

Le VIIIe Livre est relatif à la courbure des surfaces; j'y expose les parties de cette importante théorie qui sont utiles dans les arts graphiques. Les démonstrations simples que je donne des principales propositions sont, en général, nouvelles ([1]). On sait que le théorème de Meusnier ne peut pas servir à déterminer les rayons de courbure de la section d'une surface par son plan tangent : je donne une formule pour la solution de ce problème, et j'en fais l'application au tore ([2]).

Les lignes d'ombre des surfaces gauches présentent des circonstances intéressantes lorsque le point lumineux est dans le plan tangent le long d'une génératrice singulière. J'examine cette question avec quelques détails, et je présente toute une théorie sur la courbure des surfaces gauches aux divers points de ces génératrices ([3]).

Les surfaces lieux de normales ont de l'importance en Stéréotomie; je les étudie d'une manière assez minutieuse, et je fais connaître des constructions fort simples qui conduisent à des démonstrations élémentaires de leurs propriétés ([4]).

Dans un Chapitre consacré au théorème des tangentes conjuguées, je discute avec soin la manière dont les parties utiles des lignes d'ombre propre et d'ombre portée se succèdent et se continuent sur les surfaces

---

([1]) Art. 781, 784, 811, 814, 815, 826.
([2]) Art. 817, 873-876.
([3]) Art. 828-844.
([4]) Art. 845-858.

à courbures opposées. Je crois avoir levé les incertitudes que cette question délicate pouvait encore présenter.

J'examine dans le dernier Chapitre du VIIIe Livre les lignes de courbure, les lignes asymptotiques, et ensuite les courbes tracées sur une surface, et telles, qu'en chaque point la section normale qui leur est tangente soit surosculée par un cercle. Ces dernières lignes sont faciles à déterminer sur les surfaces du second ordre. Considérées sur l'ellipsoïde, elles ont de l'importance dans la question de la rotation des corps.

Le IXe Livre est relatif aux surfaces hélicoïdes. Un grand nombre des constructions que j'y expose m'appartiennent; j'en ai emprunté quelques-unes à des Notes que Bour avait écrites en lisant mon Mémoire sur les hélicoïdes gauches [1], et qu'il a bien voulu me communiquer. J'ai cité Bour pour tous les emprunts que je lui ai faits.

Les hélicoïdes me donnent l'occasion de présenter plusieurs applications importantes des théories relatives aux surfaces réglées et à la courbure des surfaces. Je donne plusieurs théorèmes nouveaux sur la surface de la vis à filets carrés et sur les surfaces hélicoïdes à génératrices quelconques [2].

Je m'occupe dans le Xe Livre des surfaces représentées par des lignes de niveau, et je fais connaître d'abord les opérations graphiques qui les concernent. Sur ce sujet, j'ai pris pour guide le général Noizet [3]; je reproduis la plupart des constructions qu'il donne, en les rattachant d'ailleurs aux théories exposées dans les Livres précédents.

J'ai traité avec beaucoup de réserve la question des lignes de plus grande pente, parce qu'elle est intimement liée à celle des faîtes et des

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique,* XXXIVe cahier.

(2) Art. 1038, 1041, 1049, 1050.

(3) Mémoire sur le dessin de la fortification (*Mémorial de l'Officier du Génie,* 1823). — Leçons sur le dessin de la fortification, 1836 (Lithographie de l'École de Metz).

thalwegs sur laquelle règne une certaine obscurité. Breton (de Champ), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, a publié sur les faîtes deux articles fort intéressants, mais qui ont montré les difficultés du problème plutôt qu'ils ne l'ont résolu ([1]).

Un dernier Chapitre, relatif à l'emploi d'une surface topographique pour remplacer les Tables à double entrée, est le résumé d'un Mémoire publié par M. Lalanne, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à qui cette méthode doit ses plus grands développements ([2]).

Par la publication de cette troisième Partie, je remplis les engagements que j'avais pris avec le public. Mon Ouvrage présente sans doute des lacunes, mais cependant, sous le rapport des applications aux arts graphiques, je le crois plus complet qu'aucun des Traités de Géométrie descriptive publiés jusqu'à ce jour.

En terminant, je dois adresser mes remercîments à M. Mannheim, mon ami et mon collègue à l'École Polytechnique, qui a bien voulu lire mon manuscrit, et dont les observations judicieuses m'ont été fort utiles. On verra dans les Livres VIII et IX que M. Mannheim m'a souvent communiqué des démonstrations très simples et des constructions élégantes ([3]).

Paris, 12 août 1864.

NOTE DE L'ÉDITEUR.

Dans l'Avant-Propos de la seconde édition du tome II de son *Traité de Géométrie descriptive,* Jules de la Gournerie dit qu'il « a eu particulièrement égard à des observations qui lui avaient été transmises par M. Ernest Lebon, connu par ses travaux en Géométrie descriptive. »

Plus tard, J. de la Gournerie choisit M. E. Lebon pour le remplacer dans sa chaire du Conservatoire

([1]) *Comptes rendus,* 1er semestre 1854 et 2e semestre 1861.

([2]) *Annales des Ponts et Chaussées,* 1er semestre 1846. Pour l'historique de cet utile mode de solution graphique, on pourra consulter le Mémoire de M. Lalanne et le Rapport fait par Cauchy à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus,* 2e semestre 1843).

([3]) Notes des articles 814, 845, 851, 935, 943 *bis,* 1006.

des Arts et Métiers, et, à sa mort, il le pria de terminer la publication de la seconde édition de son *Traité de Perspective linéaire*.

C'était donc se conformer à la pensée de ce regretté et célèbre savant que de confier à son disciple la revision de la seconde édition du tome III du *Traité de Géométrie descriptive*. M. E. Lebon a bien voulu accepter cette tâche, qu'il a remplie avec un soin éclairé et consciencieux dont tous lui seront reconnaissants.

Dans cette nouvelle édition, M. E. Lebon a tenu compte des modifications que l'Auteur lui avait indiquées, et il a ajouté seulement quelques notes succinctes. Le texte a été, du reste, scrupuleusement respecté.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE VIII.

COURBURE DES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS DIVERSES.

CHAPITRE III.

THÉORÈME DES TANGENTES CONJUGUÉES.

CHAPITRE IV.

LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE ET RELATIVES A SES COURBURES.

§ I. — *Lignes de courbure.*

§ II. — *Lignes asymptotiques.*

§ III. — *Lignes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles.*

LIVRE IX.

SURFACES HÉLICOIDES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

CHAPITRE II.

HÉLICOÏDE DÉVELOPPABLE.

CHAPITRE III.

SURFACE DE LA VIS A FILETS TRIANGULAIRES.

Pages. Articles.

CHAPITRE IV.

SURFACE DE LA VIS A FILETS CARRÉS.

CHAPITRE V.

SURFACES HÉLICOÏDES NON RÉGLÉES.

LIVRE X.

SURFACES TOPOGRAPHIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

CHAPITRE II.

TABLEAUX GRAPHIQUES.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

LIVRE HUITIÈME.

COURBURE DES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

Considérations et formules relatives à la courbure des lignes.

777. Le rayon de courbure d'une courbe plane ω en un point O (*fig.* 326) est le rayon du cercle avec lequel tend à se confondre un cercle tangent en O, et sécant en un point voisin M, lorsque ce point se rapproche indéfiniment de O (art. **94** et **95**).

Si nous projetons le point M sur la normale OZ et sur la tangente OX, et si nous appelons R le rayon du cercle considéré, nous aurons

$$\overline{gM}^2 = Og(2R - Og),$$

ou

$$\overline{Om}^2 = mM(2R - mM).$$

Quand le point M est infiniment voisin de O, l'ordonnée mM est infiniment petite, et peut être négligée auprès de la longueur finie 2R. On a par suite, en appelant α l'abscisse Om et β l'ordonnée mM,

$$(1) \qquad \frac{1}{R} = \frac{2\beta}{\alpha^2}.$$

La quantité $\frac{1}{R}$ est la *courbure de la ligne plane* ω au point O.

L'équation que nous venons de trouver nous sera souvent utile. Elle donne pour le rayon de courbure une valeur positive quand l'ordonnée β est positive, c'est-à-dire quand la courbe tourne sa concavité du côté de la partie de l'axe OZ sur laquelle on mesure les ordonnées positives. Elle montre que l'ordonnée β est infiniment petite du second ordre, quand l'abscisse α, mesurée sur la tangente, est infiniment petite du premier ordre.

L'abscisse α étant constante, si l'on fait varier β d'une quantité infiniment petite du second ordre, R variera d'une quantité finie. Lorsque le rayon de courbure d'une courbe plane en un point est altéré d'une grandeur infiniment petite, la variation de l'ordonnée β est d'un ordre supérieur au second.

778. Le triangle rectangle OM*m* (*fig.* 326) donne

$$\overline{OM}^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Si la longueur α est infiniment petite, la quantité β^2, d'ordre plus élevé que α^2, peut être négligée, et l'on a

$$OM = \alpha.$$

Par conséquent, dans la formule (1), on peut prendre indifféremment pour α l'abscisse O*m* du point M infiniment voisin de O, ou la corde OM, ou encore l'arc OM, car il ne diffère de sa corde que d'un infiniment petit du troisième ordre. Cette corde est, en effet, le double du sinus de la moitié de l'arc, et le sinus d'un arc infiniment petit est égal à l'arc lui-même quand on néglige les infiniment petits du troisième ordre. Nous ne faisons pas de distinction entre les arcs OM de la courbe ω et du cercle, parce qu'on doit les considérer comme se confondant à la limite.

Si l'on représente par ε l'angle de contingence, on aura

$$R\varepsilon = \alpha,$$

et, en vertu de l'équation (1),

$$\varepsilon = \frac{2\beta}{\alpha}. \tag{2}$$

779. Pour déterminer à l'aide de la formule (1) le rayon de courbure d'une ligne plane, en un point donné, on prend la tangente et la normale en ce point pour axes des abscisses et des ordonnées. On fait ensuite l'abscisse x infiniment petite : l'ordonnée y devient infiniment petite du second ordre ; on néglige les termes d'un ordre plus élevé, et la valeur de $\frac{x^2}{2y}$ donnée par l'équation est le rayon cherché.

Par exemple, si nous voulons avoir le rayon de courbure de l'ellipse en un de ses sommets, nous remarquerons que, la tangente et la normale en un sommet étant prises pour axes, cette courbe est représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2y}{b} = 0.$$

Lorsque l'on suppose x infiniment petite, y devient infiniment petite du second ordre, et son carré doit être négligé. Nous avons alors

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2y}{b} = 0, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{a^2}{b}.$$

On déduit facilement de cette formule la construction que nous avons donnée sans démonstration dans la seconde note de l'article **493**.

780. Pour second exemple, nous chercherons l'expression générale du rayon de courbure de la parabole représentée par l'équation

$$y^2 - 2px = 0.$$

Nous prenons le point A considéré sur la courbe pour origine d'un nouveau système d'axes rectangulaires, formé par la tangente Ax' et par la normale Ay' à la courbe en ce point. L'angle de Ax' et de l'axe primitif des x étant θ et l'ordonnée du point A étant y_1, les formules de transformation des coordonnées sont

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta + \frac{y_1^2}{2p},$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta + y_1.$$

L'équation de la parabole devient

$$x'^2\sin^2\theta + 2x'y'\sin\theta\cos\theta + y'^2\cos^2\theta$$
$$+ 2(y_1\sin\theta - p\cos\theta)x' + 2(y_1\cos\theta + p\sin\theta)y' = 0.$$

Pour que l'axe des abscisses soit tangent à la courbe, il faut que la valeur zéro de y' donne pour x' deux valeurs nulles, et par suite que le coefficient du terme qui contient la coordonnée x' seule et à la première puissance s'évanouisse. Nous avons donc

$$(a) \qquad y_1\sin\theta - p\cos\theta = 0,$$
$$x'^2\sin^2\theta + 2x'y'\sin\theta\cos\theta + y'^2\cos^2\theta + 2(y_1\cos\theta + p\sin\theta)y' = 0.$$

Lorsque x' est infiniment petite, y' devient infiniment petite du second ordre;

supprimant les termes d'un ordre plus élevé, on a

$$x'^2 \sin^2\theta + 2(y_1 \cos\theta + p \sin\theta)y' = 0;$$

d'où

$$R = -\frac{y_1 \cos\theta + p \sin\theta}{\sin^2\theta}.$$

Éliminant enfin θ au moyen de l'équation (a), on obtient

$$R = \frac{(y_1^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

On trouve par cette formule que le rayon de courbure au sommet est égal à p.

Théorème de M. Joseph Bertrand. — Théorème d'Euler. Indicatrice.

781. Nous avons vu que toutes les courbes qui sont tracées sur une surface, et qui se croisent en un point, y sont tangentes à un même plan; nous allons maintenant étudier plus intimement les relations qui existent entre ces lignes.

Soient

OZ la normale à une surface en un point O (*fig.* 327);
OX et OY deux tangentes rectangulaires quelconques;
OM et ON les sections de la surface par les plans ZOX et ZOY.

Nous prenons sur OX et OY des longueurs infiniment petites égales à Om et On, et par les points m et n nous concevons des plans respectivement parallèles à ZOY et à ZOX; ils coupent le plan XOY suivant les droites mp et np, et la surface suivant les courbes MP et NP se rencontrant en P.

La surface étant continue, le rayon de courbure de la ligne MP au point M ne diffère que d'une longueur infiniment petite du rayon de courbure de la ligne ON au point O; les longueurs des ordonnées β correspondant à une même grandeur de α sont donc égales pour ces deux courbes (art. **777**), et par suite, si la tangente à MP au point M était la droite MY' parallèle à OY, l'ordonnée pP serait égale à $(m\text{M} + n\text{N})$. Il résulte de là que l'angle infiniment petit, compris entre la tangente à MP au point M et la droite MY', est égal à

$$\frac{m\text{M} + n\text{N} - p\text{P}}{mp}.$$

Mais cet angle est aussi égal à celui que la normale ME à MP fait avec la

droite ME_1 parallèle à OZ; on a donc

$$(3) \qquad \widehat{EME_1} = \frac{mM + nN - pP}{mp}.$$

On trouve de même

$$\widehat{GNG_1} = \frac{mM + nN - pP}{np}.$$

Enfin, les longueurs mp et np étant égales, on a

$$\widehat{EME_1} = \widehat{GNG_1}.$$

La droite ME est dans le plan Mmp qui n'est pas normal à OM, et par suite elle n'est pas normale à la surface. Pour la rendre normale, il faut la faire tourner autour de la tangente à MP en M, jusqu'à ce qu'elle soit perpendiculaire à OM; mais la tangente à MP faisant avec le plan ZOX un angle qui ne diffère d'un droit que d'une quantité infiniment petite, et le déplacement de la droite ME étant lui-même infiniment petit, l'angle qu'elle fait avec le plan ZOX n'est altéré que d'une quantité infiniment petite d'un ordre élevé. Les angles infiniment petits que les normales à la surface aux points M et N font respectivement avec les plans ZOX et ZOY sont donc égaux aux angles EME_1 et GNG_1, et par suite égaux entre eux. De là résulte un théorème dû à M. J. Bertrand ([1]), et que nous énoncerons plus loin.

782. Soient MF la normale à la surface au point M, et MF_1 sa projection sur le plan ZOX. Nous nous proposons de déterminer l'ordre de grandeur de la différence des angles EME_1 et FMF_1.

Les droites ME_1, MF_1 et MP forment un trièdre dans lequel le dièdre le long de ME_1 est droit; on a donc

$$\cos PMF_1 = \cos PME_1 \cos E_1MF_1.$$

Mais les angles PMF et PME sont droits; nous pouvons par conséquent écrire

$$\cos(90^\circ + \widehat{FMF_1}) = \cos(90^\circ + \widehat{EME_1}) \cos E_1MF_1$$

ou bien

$$\sin FMF_1 = \sin EME_1 \cos E_1MF_1;$$

([1]) *Journal de M. Liouville*, 1844.

L'étude des systèmes de droites qui ne sont pas normales à une surface est en dehors de notre cadre. Les personnes qui voudraient connaître cette question peuvent consulter le Mémoire de M. J. Bertrand, et les développements qui ont été donnés à cette partie de son travail par Duhamel (*Éléments de Calcul infinitésimal*, t. II).

et, comme les trois angles FMF_1, EME_1 et E_1MF_1 sont infiniment petits, il suffit de négliger dans chaque membre les termes du troisième ordre pour avoir

$$\widehat{FMF_1} = \widehat{EME_1}.$$

783. Nous appellerons *déviation de la normale* à une surface, en un point M voisin d'un point considéré O, l'angle FMF_1 formé par la normale en M avec le plan ZOM qui contient le point M et la normale en O (¹). On peut, en employant cette expression, énoncer comme il suit le théorème de M. J. Bertrand : *Les déviations des normales en deux points d'une surface, situés à des distances infiniment petites égales d'un point considéré et dans des directions rectangulaires, sont égales en grandeur absolue.*

Sur la *fig.* 327, les droites MF et NH situées d'un même côté de la surface sont toutes les deux dans l'angle dièdre XOY. Cela résulte de ce que l'ordonnée pP est plus petite que la somme $(mM + nN)$, qui exprime la hauteur à laquelle serait le point P si la déviation était nulle ; mais, quand le trinôme $(mM + nN - pP)$ est négatif, les droites MF et NH sont hors du dièdre XOY.

Si l'on conçoit que le plan ZOM tourne autour de OZ, la déviation de la normale au point mobile M variera, et, lorsque le plan sera confondu avec ZON, la partie de la normale située au-dessus de la surface sera d'un côté différent de celui où elle se trouvait, quand le plan avait sa position initiale. Il y a donc pour le plan au moins une position intermédiaire où il contient la normale au point situé sur sa trace, à une distance infiniment petite de O. Il jouit d'ailleurs de la même propriété dans une seconde position perpendiculaire à la première.

784. Soient maintenant

OZ la normale à une surface en un point quelconque O (*fig.* 328);
OM et ON deux sections de la surface par des plans rectangulaires, tels que les normales aux points de ces lignes infiniment voisins de O rencontrent OZ;
OX et OY les traces des plans ZOM et ZON sur le plan tangent en O à la surface;
OQ la section par un plan normal en O et faisant un angle φ avec le plan ZOX;
Oq la trace du plan ZOQ sur le plan tangent en O.

Nous prenons sur Oq un point q infiniment voisin de O, et nous traçons d'abord les droites qn et qm respectivement parallèles à OX et à OY, puis les droites qQ, mM et nN parallèles à OZ. Enfin nous appelons R, R_1 et R_2 les rayons de

(¹) Transon a employé le mot *déviation* dans un sens différent (*Journal de Liouville*, t. VI). Liouville s'est servi de l'expression de *déviation relative* dans la théorie des courbures comparées de deux lignes tangentes (5ᵉ édition de l'*Analyse appliquée* de Monge, 1ʳᵉ Note). Nous pensons qu'il ne peut y avoir aucune confusion.

courbure en O des sections normales OQ, OM et ON. Nous avons immédiatement

$$\frac{1}{R} = 2\frac{qQ}{\overline{Oq}^2}, \quad \frac{1}{R_1} = 2\frac{mM}{\overline{Om}^2}, \quad \frac{1}{R_2} = 2\frac{nN}{\overline{On}^2}.$$

La déviation est nulle aux points M et N; par conséquent, si l'on fait passer par le point N un plan parallèle à ZOX, la tangente à la section NQ au point N sera parallèle à OX. D'après cela, et conformément à une observation de l'article **781**, nous avons

$$qQ = mM + nN.$$

En remplaçant qQ, mM et nN par leurs valeurs déduites des premières équations, on obtient

$$\frac{\overline{Oq}^2}{R} = \frac{\overline{Om}^2}{R_1} + \frac{\overline{On}^2}{R_2}.$$

Mais les longueurs Om et On sont respectivement égales à $Oq\cos\varphi$ et à $Oq\sin\varphi$; nous avons donc

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2}\sin^2\varphi.$$

Cette formule est due à Euler [1].

Une surface divise l'espace en deux régions dont l'une est appelée *intérieure* et l'autre *extérieure*. En général, on choisit arbitrairement la région que l'on appelle intérieure : la partie de la normale qui y est située est la *normale intérieure ;* l'autre partie de cette droite est la *normale extérieure*. Quand la normale en un point aura été prise pour axe des z, et que l'origine sera sur la surface, nous considérerons comme normale intérieure la partie de l'axe sur laquelle on mesurera les ordonnées positives. Les rayons de courbure positifs seront ainsi sur la normale intérieure (art. **777**).

783. En mettant l'équation (4) sous la forme

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin^2\varphi,$$

on reconnaît que $\frac{1}{R}$ varie toujours dans le même sens, depuis $\frac{1}{R_1}$ jusqu'à $\frac{1}{R_2}$, lorsque φ croît de 0 à $\pm 90°$. Les rayons R_1 et R_2 sont donc les limites des valeurs de R; l'un est son seul maximum, et l'autre son seul minimum. Il résulte de là que les sections normales ZOM et ZON (*fig.* 328) ont des positions détermi-

---

(1) *Recherches sur la courbure des surfaces* (Mémoires de l'Académie de Berlin, 1760).

nées, et que l'on ne peut pas faire passer par OZ des plans autres que ZOX et ZOY, et dont les sections soient telles que la normale à la surface au point voisin de O rencontre OZ.

On appelle *sections principales* d'une surface en un point les deux sections normales à la surface et perpendiculaires entre elles, dont les rayons de courbure en ce point sont l'un maximum et l'autre minimum. Les plans des sections principales contiennent les normales à la surface aux points infiniment voisins de celui que l'on considère. Ces plans sont appelés *plans principaux*, et les rayons de courbure de ces sections *rayons principaux*.

786. Si l'on désigne par R′ le rayon de courbure de la section contenue dans le plan normal perpendiculaire à celui dont l'azimut est φ, on aura

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1}\sin^2\varphi + \frac{1}{R_2}\cos^2\varphi.$$

Ajoutant cette équation à l'équation (4), on obtient

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Par conséquent, *en tout point d'une surface, la somme des courbures de deux sections rectangulaires quelconques est constante* [1].

En multipliant l'une par l'autre les équations qui donnent les valeurs de $\frac{1}{R}$ et de $\frac{1}{R'}$, on obtient

$$(5) \qquad \frac{1}{RR'} = \frac{1}{R_1R_2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 \sin^2 2\varphi.$$

787. Concevons dans le plan G tangent à la surface au point considéré O (*fig.* 329) une conique dont le centre soit en ce point et dont les axes $\mu\pi$ et $\nu\lambda$ soient tangents aux sections principales MOP et NOL : en appelant a et b les demi-axes $O\mu$ et $O\nu$, ρ le rayon vecteur $O\tau$ d'un point quelconque τ, et φ son azimut $\mu O\tau$, l'équation de cette conique sera

$$(6) \qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{b^2}\sin^2\varphi.$$

(1) Cette remarque est due à Melle S. Germain (*Journal de Crelle*, 1831).

Babinet a généralisé la formule; il a trouvé que si $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m$ sont les rayons de courbure des sections faites par des plans normaux comprenant entre eux des angles égaux $\frac{\pi}{m}$, on a

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \ldots + \frac{1}{r_m}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

(*Comptes rendus*, t. XXV.)

Si les carrés des axes sont proportionnels aux rayons de courbure des sections principales qui leur sont respectivement tangentes, c'est-à-dire si l'on a

$$(7) \qquad a^2 = R_1 c, \quad b^2 = R_2 c,$$

c étant une longueur arbitraire, les équations (4) et (6) donneront

$$\rho^2 = Rc.$$

R est le rayon de courbure de la section normale SOT déterminée par l'azimut φ, et par conséquent tangente à $\sigma\tau$.

On voit que la conique dont les axes sont déterminés par les équations (7) est telle que les carrés de ses rayons vecteurs sont proportionnels aux rayons de courbure des sections normales tangentes à ces rayons vecteurs. On appelle cette conique *indicatrice;* elle est déterminée de forme, mais non de grandeur, parce que le paramètre c est arbitraire [1].

788. En appelant a' et b' les demi-longueurs de deux diamètres conjugués de l'indicatrice, R'_1 et R'_2 les rayons de courbure des sections normales respectivement tangentes à ces droites, on a

$$a'^2 = R'_1 c, \quad b'^2 = R'_2 c,$$

et, comme les deux binômes $(a'^2 + b'^2)$ et $(a^2 + b^2)$ sont égaux, on obtient

$$(8) \qquad R'_1 + R'_2 = R_1 + R_2.$$

Ainsi, *la somme des rayons de courbure de deux sections normales dont les plans contiennent des diamètres conjugués de l'indicatrice est constante.*

789. Nous allons maintenant supposer que l'on coupe la surface par un plan parallèle au plan tangent au point considéré; nous prenons pour origine le point où la normale rencontre le plan de section; nous appelons ρ le rayon vecteur du point de cette courbe qui correspond à un azimut φ mesuré à partir du plan de l'une des sections principales; enfin nous désignons, comme précédemment, par R le rayon de courbure de la section normale qui correspond à l'azimut φ. Si la distance z du plan sécant au plan tangent est infiniment petite du deuxième ordre, le rayon ρ sera infiniment petit du premier, et nous aurons, d'après la formule (1),

$$\frac{1}{R} = \frac{2z}{\rho^2};$$

[1] La théorie des indicatrices est due à Charles Dupin (*Développements de Géométrie*, 3e Mémoire).

puis, en éliminant R par la formule (4),

$$\frac{2z}{\rho^2} = \frac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2}\sin^2\varphi.$$

En faisant successivement φ égal à zéro et à 90°, et en appelant a et b les valeurs correspondantes de ρ, on obtient

$$(9) \qquad \frac{2z}{a^2} = \frac{1}{R_1}, \quad \frac{2z}{b^2} = \frac{1}{R_2},$$

et par suite

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{b^2}\sin^2\varphi.$$

Cette équation représente une conique dont les demi-axes a et b, donnés par les équations (9), sont proportionnels aux demi-axes de l'indicatrice déterminés par les formules (7). C'est l'indicatrice que l'on obtient lorsque l'on attribue au paramètre arbitraire c une grandeur infiniment petite du second ordre $2z$. D'ailleurs, les ordres de grandeur des quantités infiniment petites ne sont que relatifs, et il n'y a pas lieu de préciser l'ordre de l'ordonnée z, quand on ne la compare pas à d'autres longueurs infiniment petites. Nous avons donc ce théorème :

Un plan parallèle au plan tangent à une surface en un point, et infiniment rapproché de lui, coupe la surface suivant une courbe qui, dans la partie voisine du point considéré, se confond avec une conique homothétique de l'indicatrice.

La courbe d'intersection peut s'étendre loin du point et avoir différentes branches. Ces parties éloignées n'ont aucune influence sur les rayons de courbure des sections normales, et par suite aucune relation nécessaire n'existe entre elles et l'indicatrice.

Si la conique est une ellipse, tous ses points seront à des distances infiniment petites du point considéré, et elle se confondra avec une branche complète de la courbe d'intersection; si elle est une hyperbole, elle se composera de deux petits arcs infiniment rapprochés du point, et de prolongements indéfinis dans la direction des asymptotes. Ces prolongements n'appartiennent pas à la section faite dans la surface.

790. Le théorème que nous venons de démontrer est important, et par suite nous croyons utile de l'établir d'une manière directe.

Nous plaçons l'origine au point considéré sur la surface, et nous prenons la normale à la surface en ce point pour axe des z : les deux autres axes seront des droites rectangulaires situées dans le plan tangent. Nous supposons enfin que l'équation de la surface considérée Σ est algébrique.

Quand une courbe plane est rapportée à deux axes situés dans son plan, et

qu'elle touche celui des abscisses à l'origine, son équation ne renferme ni terme constant, ni terme contenant l'abscisse seule et à la première puissance ; car, parmi les valeurs de l'abscisse qui correspondent à la valeur zéro de l'ordonnée, il faut qu'il y en ait deux qui soient nulles. Par les mêmes motifs, notre surface Σ étant tangente à l'origine au plan des deux axes des x et des y, son équation doit être dépourvue du terme constant et des termes du premier degré en x et en y. Si nous ne considérons que la partie voisine de l'origine, et pour laquelle les coordonnées x et y sont infiniment petites, l'ordonnée z sera infiniment petite du second ordre, et, d'après la composition de l'équation, tous ses termes seront infiniment petits au moins du deuxième ordre. Ceux qui sont d'un ordre plus élevé devant être négligés, on voit que l'équation se réduira à la forme

$$\text{(10)} \qquad Ax^2 + Bxy + A'y^2 + Cz = 0.$$

La partie de la surface Σ voisine de l'origine appartient donc à une surface du second ordre, ou plutôt à toutes les surfaces qui sont représentées par l'équation du deuxième degré

$$\text{(11)} \qquad Ax^2 + Bxy + A'y^2 + Kz^2 + K'zx + K''yz + Cz = 0,$$

dans laquelle K, K′ et K″ sont des coefficients indéterminés, car cette équation devient identique avec (10), lorsque z est infiniment petite du second ordre.

Le théorème que nous avons établi à l'article précédent est une conséquence immédiate du résultat que nous venons d'obtenir. Pour étendre cette démonstration au cas où la surface est transcendante, il suffit de supposer que son équation a été développée suivant les puissances ascendantes entières des variables (¹).

791. Si l'on considère z comme une quantité constante et infiniment petite du second ordre, l'équation (10) représentera une indicatrice (art. **789**). Il suffira donc, pour connaître les positions des sections principales, de déterminer les axes de cette conique. Prenant ensuite ces droites pour axes coordonnés, on aura, pour représenter la courbe, l'équation

$$\text{(12)} \qquad A_1x^2 + A'_1y^2 + Cz = 0.$$

Si nous désignons, comme précédemment, par a et b les longueurs des demi-axes, nous aurons

$$a^2 = -\frac{Cz}{A_1}, \quad b^2 = -\frac{Cz}{A'_1};$$

(¹) Le théorème de l'article 789 étant établi directement, nous pourrions, par des raisonnements analogues à ceux de cet article, en déduire la formule d'Euler, qui serait ainsi démontrée d'une seconde manière.

d'où, en vertu des équations (9),

$$(13) \qquad R_1 = -\frac{C}{2A_1}, \quad R_2 = -\frac{C}{2A'_1}.$$

Conformément à une observation que nous avons présentée, à l'article **777**, un rayon de courbure sera positif ou négatif, suivant que la section tournera sa concavité du côté de l'axe des z, sur lequel on mesure les ordonnées positives, ou de l'autre côté.

792. Lorsqu'en un point commun les sections principales de deux surfaces sont deux à deux dans les mêmes plans et osculatrices, leurs sections par un plan normal quelconque ont des rayons de courbure égaux. On dit alors que les surfaces sont *osculatrices*.

La surface du second ordre représentée par l'équation (11) est osculatrice de la surface considérée Σ, car cette équation devient identique avec (10) lorsque l'on suppose que l'ordonnée z est infiniment petite du second ordre, et par suite les plans et les rayons de courbure des sections principales sont les mêmes dans les deux surfaces pour le point qui est à l'origine.

Quand on donne à z une valeur finie et constante, l'équation (11) représente une section de la surface par un plan parallèle à celui des xy, et cette section est une conique homothétique de celle que l'on obtient en attribuant à z une valeur infiniment petite du second ordre, car les coefficients des termes du second degré sont les mêmes; elle est donc aussi homothétique de l'indicatrice (art. **789**).

Une surface quelconque est osculée en un point donné par une infinité de surfaces du second ordre, et les sections de ces surfaces par des plans parallèles au plan tangent en ce point sont des coniques homothétiques de l'indicatrice.

Quand K' et K'' sont nuls, on a

$$(14) \qquad A x^2 + B xy + A' y^2 + K z^2 + C z = 0.$$

Cette équation représente une surface du second ordre dont l'axe des z est un axe, et dont, par conséquent, un des sommets est à l'origine point d'osculation. Comme d'ailleurs l'équation contient encore un coefficient arbitraire, nous voyons qu'*une infinité de surfaces du second ordre sont osculatrices en un de leurs sommets d'une surface quelconque en un point donné.*

Dans le paragraphe suivant nous reviendrons par d'autres considérations sur la théorie de ces surfaces osculatrices.

Des raisonnements analogues à ceux que nous venons de présenter font aisément trouver les équations des surfaces algébriques qui ont avec la proposée, en un point donné, un contact d'un ordre déterminé et supérieur au second.

Discussion de la formule d'Euler.

793. *Cas où les deux rayons principaux sont de même signe.* — Nous allons maintenant chercher les conséquences de la formule d'Euler dans les différents cas qui peuvent se présenter. Nous supposerons d'abord que les deux rayons principaux sont de même signe, et nous les considérerons comme positifs.

On voit facilement que le rayon de courbure R est toujours positif, et compris entre R_2 et R_1 (art. **785**). Si nous prenons sur la normale OZ (*fig.* 329) des longueurs OE et OF respectivement égales à R_1 et à R_2, le centre de courbure d'une section quelconque SOT sera en un point C du segment FE. Il en résulte que près du point O la surface est entièrement d'un même côté de son plan tangent, et qu'elle n'a, par conséquent, que ce point de commun avec lui.

Les carrés a^2 et b^2 donnés par les équations (7) sont de même signe, et positifs quand on attribue à c une valeur positive. L'indicatrice est donc une ellipse. On appelle *surfaces convexes* celles dont, en tous les points, les indicatrices sont des ellipses.

Quand les valeurs de R_1 et de R_2 sont égales, l'indicatrice est un cercle, et les rayons de courbure de toutes les sections normales sont égaux. On appelle *ombilics* les points singuliers où cette circonstance se présente.

794. Quand une surface Σ' a en un point O′ les mêmes rayons principaux qu'une autre surface Σ en un point O, on peut évidemment la placer de manière que, le point O′ étant confondu avec le point O, elle soit osculatrice de Σ.

Considérons un ellipsoïde scalène (*fig.* 330) : au sommet O′ les deux sections principales sont les ellipses principales M′O′P′ et N′O′L′, car la normale O′K est rencontrée par les normales à la surface aux différents points de ces courbes, et notamment à ceux qui sont infiniment voisins de O′. Si nous appelons a, b et c les demi-axes KM′, KN′ et KO′, les rayons de courbure principaux seront $\frac{a^2}{c}$ et $\frac{b^2}{c}$ (art. **779**). Par conséquent, pour que l'ellipsoïde puisse être rendu osculateur en son sommet O′ de la surface Σ au point O (*fig.* 329), il faut et il suffit que l'on ait

$$(15) \qquad \frac{a^2}{c} = R_1, \quad \frac{b^2}{c} = R_2,$$

R_1 et R_2 étant les rayons principaux de la surface Σ au point O.

Il n'y a que deux équations pour déterminer les trois demi-axes a, b et c; une surface convexe a donc pour chacun de ses points une infinité d'ellipsoïdes osculateurs en un de leurs sommets. Si l'on se donne la position du centre de l'ellip-

soïde sur la normale, le demi-axe c sera déterminé, et les équations (15) feront connaître les demi-axes a et b; ils seront toujours réels quand c sera positif, et par suite tout point de la normale situé du côté de la concavité de la surface est le centre d'un ellipsoïde osculateur. Si l'on donnait à c des valeurs négatives, a^2 et b^2 seraient négatifs, et l'on aurait des hyperboloïdes à deux nappes osculateurs en un de leurs sommets.

Si l'on prend pour axes coordonnés les droites $O\mu$, $O\nu$ et OZ (*fig.* 329), l'équation de l'ellipsoïde osculateur sera

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} + \frac{z^2 - 2cz}{c} = 0. \tag{16}$$

Quand le centre de l'ellipsoïde est au point E, centre de courbure de la section principale MOP (*fig.* 329), on a

$$c = R_1, \quad a = R_1, \quad b = \sqrt{R_1 R_2}, \tag{17}$$

et la surface osculatrice est de révolution autour de l'axe parallèle à $\nu\lambda$. Elle serait de révolution autour de l'axe parallèle à $\mu\pi$ si son centre était en F.

795. *Dans un ellipsoïde osculateur en l'un de ses sommets, l'ellipse principale située dans un plan parallèle au plan tangent commun est homothétique de l'indicatrice,* car les équations (15) qui en déterminent les axes sont identiques aux équations (7) qui donnent les axes de l'indicatrice. La distance O'K du centre de l'ellipsoïde au point considéré (*fig.* 330) est le paramètre arbitraire qui entre dans les expressions des axes de l'indicatrice.

Toute section de l'ellipsoïde osculateur que nous considérons, par un plan parallèle au plan tangent commun, est une ellipse $p'n'm'$ homothétique de l'ellipse principale P'N'M', et par conséquent homothétique de l'indicatrice. Ce résultat est d'ailleurs une conséquence du théorème plus général de l'article **792**.

796. *Cas où les rayons de courbure principaux sont de signes différents.* — Les équations (6) et (7) montrent que, quand les rayons principaux sont de signes différents, l'indicatrice est une hyperbole dont les asymptotes font avec la tangente de la première section principale un angle Φ pour lequel on a

$$\tang \Phi = \pm\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}}. \tag{18}$$

Nous traçons dans le plan tangent au point considéré O (*fig.* 331) les droites OX et OY, respectivement tangentes aux sections dont les rayons sont R_1 et R_2, et les droites V_1V et U_1U faisant avec OX l'angle Φ : toute hyperbole dont ces lignes sont les asymptotes peut être prise pour indicatrice. Nous considérons celle

qui a ses sommets en des points μ et π situés sur l'axe OX à une distance arbitraire du point O. Si R_1 est positif, elle correspond à une valeur positive du paramètre c. Les rayons de courbure étant proportionnels aux carrés des rayons vecteurs de l'indicatrice, le rayon R de la section faite par le plan normal qui a pour trace sur le plan tangent la droite $\sigma O \tau$ est donné par l'expression

$$R = \frac{\overline{O\tau}^2}{\overline{O\mu}^2} R_1.$$

Lorsque le point τ parcourt l'hyperbole, le rayon vecteur $O\tau$ varie de $O\mu$ à l'infini, et le rayon de courbure de la section normale, de R_1 à l'infini. Quand la droite $\sigma O \tau$ est dans l'angle supplémentaire des asymptotes, la quantité $\overline{O\tau}^2$ est négative, et le rayon de courbure R est dirigé en sens contraire des précédents. L'hyperbole qui a ses sommets aux points π et μ n'indique plus les variations du rayon de courbure; mais, si nous traçons une hyperbole dans l'angle supplémentaire des asymptotes, nous aurons une indicatrice qui correspondra à une valeur négative de la constante c, et qui fera connaître les rayons de courbure négatifs.

Quand les valeurs de c qui déterminent les deux hyperboles sont égales en grandeur absolue, on a, en vertu des équations (7),

$$\frac{\overline{O\lambda}^2}{R_2} = -\frac{\overline{O\mu}^2}{R_1};$$

d'où

$$\frac{O\lambda}{O\mu} = \pm\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}}$$

et, en ayant égard à l'équation (18),

$$\frac{O\lambda}{O\mu} = \tang \Phi.$$

D'après cela, pour que les longueurs des rayons de courbure obtenues par la considération des deux hyperboles soient comparables entre elles, il faut que les sommets de ces courbes appartiennent à un rectangle ayant les asymptotes pour diagonales.

En résumé, *le rayon de courbure d'une section normale est positif ou négatif suivant que la trace du plan sécant sur le plan tangent est comprise dans l'un ou dans l'autre des deux angles des asymptotes de l'indicatrice; chaque rayon de courbure principal est, en grandeur absolue, le minimum des rayons de courbure qui ont même signe que lui. Enfin, chacune des deux sections normales dont le plan contient une asymptote de l'indicatrice a un rayon de courbure infini, et par suite les asymptotes de l'indicatrice ont un contact du second ordre avec la surface.*

Lorsque les rayons principaux ont des grandeurs absolues égales, les asymptotes de l'indicatrice sont rectangulaires, et réciproquement.

Les surfaces qui ont en chacun de leurs points des hyperboles pour indicatrices sont dites *à courbures opposées.*

797. Les sections faites par des plans normaux dont les traces sont comprises dans l'angle UOV ont leur rayon de courbure positif, et sont près du point O, d'un certain côté du plan tangent, par exemple au-dessus; les sections faites par des plans dont les traces sont dans l'angle U_1OV ont leur rayon de courbure négatif, et sont au-dessous du plan tangent. Ce plan tangent traverse donc la surface; il la coupe suivant une courbe ω qui a une branche tangente à chaque asymptote, comme nous allons le reconnaître.

La droite $\sigma\tau$ touche au point O, et coupe au point η, la section par le plan normal $\sigma\tau$. Si l'on fait tourner ce plan autour de la normale au point O, jusqu'à ce que le point η arrive en O, la trace $\sigma\tau$ acquerra en même temps un contact du premier ordre avec la courbe ω, et un contact du second ordre avec la section normale; chacune des asymptotes de l'indicatrice est donc tangente à la courbe ω au point O.

On peut étendre ce résultat aux courbes gauches, en considérant leurs plans osculateurs; ainsi, *quand une courbe tracée sur une surface a en un point son plan osculateur tangent à la surface, elle a pour tangente en ce point une des deux asymptotes de l'indicatrice.* Il résulte de là qu'*une courbe tracée sur une surface convexe ne peut avoir aucun de ses plans osculateurs tangent à la surface.*

Revenons à la *fig.* 331. Si la branche $O\eta$ de la courbe ω avait une inflexion au point O, en faisant tourner le plan normal $\sigma\tau$, deux points d'intersection η et η_1 se réuniraient simultanément au point de tangence O, et le contact de la section normale avec la tangente VV_1 de la courbe s'élèverait au troisième ordre. On voit ainsi que *chaque asymptote de l'indicatrice a un contact d'un ordre moins élevé d'une unité avec la section par le plan tangent qu'avec la section normale.*

798. Considérons l'hyperboloïde scalène représenté sur la *fig.* 332 : en raisonnant comme à l'article **794**, on reconnaît qu'au sommet O′ les sections principales sont l'hyperbole principale M′O′P′, et l'ellipse de gorge N′O′L′. Il est d'ailleurs évident que les centres de courbure E et F de ces lignes sont de côtés différents du sommet O′. Si leurs rayons de courbure sont égaux aux rayons principaux d'une surface à courbures opposées, en un point donné, on pourra placer l'hyperboloïde de manière qu'il y ait osculation.

Les équations (15), qui déterminent les axes d'une surface du second ordre osculatrice en un de ses sommets d'une surface donnée, montrent que, dans le cas qui nous occupe, l'un ou l'autre des carrés a^2 et b^2 est négatif, quelle que soit la valeur réelle attribuée à c, et que par suite la surface du second ordre est un hyperboloïde à une nappe. Quand c est de même signe que R_1, c'est-à-dire quand

le centre de la surface osculatrice est du même côté du point O′ que le point E, a est réel et b imaginaire : les sections qui ont pour rayons R_1 et R_2 sont alors respectivement osculatrices de l'hyperbole principale et de l'ellipse de gorge.

L'hyperboloïde est de révolution, lorsque son centre est au centre de courbure de l'une des deux sections principales.

799. Les asymptotes de l'indicatrice d'un hyperboloïde, en un point quelconque, sont les génératrices rectilignes qui s'y croisent, car ces droites sont des sections normales qui ont des rayons de courbure infinis. On peut aussi remarquer qu'elles forment l'intersection de la surface par son plan tangent.

En raisonnant comme à l'article **795**, on reconnaît que l'hyperbole principale dont le plan est parallèle au plan tangent en O′ (*fig.* 332) est homothétique de l'indicatrice de ce point. Cela résulte d'ailleurs de ce que les asymptotes de cette hyperbole sont parallèles aux génératrices qui passent par le point O.

La section de la surface par un plan parallèle à un plan tangent à cette surface et infiniment voisin se confond dans la partie infiniment rapprochée du point considéré, avec une hyperbole que l'on peut prendre pour indicatrice (art. **789**).

800. *Cas où l'un des rayons principaux est infini.* — Quand l'un des rayons principaux, R_2 par exemple, est infini, la formule d'Euler et l'équation de l'indicatrice deviennent

$$R = \frac{R_1}{\cos^2\varphi}, \quad \rho = \pm\frac{a}{\cos\varphi}.$$

On a d'ailleurs

$$a^2 = R_1 c, \quad \rho^2 = Rc.$$

L'indicatrice se compose de deux droites $\mu\mu_1$ et $\pi\pi_1$ parallèles à la trace OY du plan de la section principale dont le rayon est infini (*fig.* 333). Les rayons de courbure des autres sections normales sont finis et de même signe ; il en résulte que le plan tangent coupe ou touche la surface suivant une ligne qui a pour tangente au point O la droite OY. Cette question sera éclaircie plus tard par quelques exemples.

D'après la première des formules précédentes, pour avoir le rayon de courbure de la section normale dont la trace sur le plan tangent est une droite $O\tau$, on porte sur cette ligne une longueur OE égale au rayon R_1 de la section principale faite sur OX, puis on trace les droites EE_1 et E_1E_2 respectivement perpendiculaires à $O\tau$ et à OX : la longueur OE_2 est le rayon cherché.

801. *Sur une développable, une génératrice rectiligne est en tous ses points une section principale,* car les normales aux différents points de cette droite sont parallèles, et par suite dans un même plan. *Les indicatrices d'une développable sont* donc *formées de deux droites parallèles*. En un point d'une telle surface, le plan de la seconde section principale est perpendiculaire à la génératrice. Sur un cylindre une section droite est une section principale en chacun de ses points.

802. Les deux droites dont se compose l'indicatrice peuvent être regardées comme formant la limite, soit d'une ellipse dont l'un des axes s'allonge indéfiniment, tandis que l'autre reste invariable, soit d'une hyperbole dont l'angle des asymptotes tend vers 180°, et dont les sommets sont fixes. *Les surfaces qui ont en chaque point un rayon principal infini doivent* donc *être considérées comme formant une transition entre les surfaces convexes et celles dont les courbures sont opposées.* Lorsqu'une surface est en partie convexe et en partie à courbures opposées, en chaque point de la ligne de séparation l'un des rayons principaux est infini.

Sur des surfaces entièrement convexes ou entièrement à courbures opposées, on trouve des lignes en chaque point desquelles l'un des rayons principaux est infini. Ce rayon est alors un maximum, et non une transition de rayons principaux positifs à des rayons principaux négatifs.

803. *Quand un plan touche une surface le long d'une courbe, la ligne de contact est en chacun de ses points tangente à une section principale ayant un rayon de courbure infini.*

Pour prouver ce théorème, supposons que par deux points M et N de la ligne de contact on fasse passer un plan sécant qui contienne la normale à la surface au premier point M : la section de la surface aura avec la section faite dans le plan tangent deux points de contact M et N, et si l'on fait tourner le plan sécant autour de la normale à la surface au point M, jusqu'à ce qu'il contienne la tangente à la courbe, le point N viendra se réunir à M, et la section aura un contact du troisième ordre avec sa tangente ; son rayon sera donc infini. Cette section sera d'ailleurs principale, car les normales à la surface aux deux points M et N sont parallèles, notamment quand la distance de ces points est infiniment petite.

804. Réciproquement, *quand une courbe tracée sur une surface est tangente en chacun de ses points à une section principale ayant un rayon de courbure infini, elle est une ligne de contact de la surface avec un plan.*

Deux points consécutifs de la courbe appartenant à une section principale dont le rayon est infini, les droites qui y sont normales à la surface se trouvent dans un même plan et sont parallèles. Toutes les normales à la surface aux différents points de la courbe sont donc parallèles, ce qui démontre le théorème énoncé.

805. *Une surface est développable quand elle a en chacun de ses points un de ses deux rayons de courbure infini.*

Par chaque point d'une telle surface on peut faire passer une ligne tangente en tous ses points aux sections principales ayant un rayon de courbure infini, car, pour deux points infiniment voisins, les plans de ces sections ne comprennent qu'un angle infiniment petit. La surface est touchée par un plan le long de chacune de ces lignes, et par suite elle est l'enveloppe d'une série de plans, c'est-à-dire développable.

806. Lorsque l'on fait R_2 infini, les équations (7) donnent

$$a^2 = R_1 c, \quad b^2 = \infty ;$$

et l'équation (16) de la surface du second ordre osculatrice en un de ses sommets se réduit à

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{z^2 - 2cz}{c} = 0.$$

Cette équation représente un cylindre du second ordre. La génératrice rectiligne est osculatrice de la section dont le rayon est infini; la section droite est une conique osculatrice en un de ses sommets de la section principale dont le rayon est R_1.

807. *Cas où les deux rayons principaux sont infinis.* — La formule d'Euler montre que, quand les deux rayons principaux sont infinis, les rayons de courbure des sections normales sont tous infinis, et que par suite la surface est osculée par un plan. Quelques surfaces jouissent de cette propriété, soit en des points isolés, soit en tous les points d'une ligne.

808. *Cas où l'un des rayons principaux est nul.* — Lorsqu'un des rayons principaux est nul, l'autre étant fini ou infini, tous les rayons des sections normales, sauf ce dernier, sont nuls. Cette circonstance se présente aux divers points des arêtes de rebroussement, et aux points isolés où une surface a un plan de rebroussement, tels que les sommets sur une surface gauche (art. **666**). Si l'on donne à la constante c une valeur de même signe que le rayon qui n'est pas nul, on trouve que l'indicatrice est un segment de la tangente à la section principale ayant ce rayon. Ce segment de droite doit être considéré comme une ellipse dont un des axes est nul.

Quand en un point d'une surface le rayon d'une section normale est nul, l'un des rayons principaux est nécessairement nul.

Si une courbe ayant un rebroussement tourne autour de la tangente au rebroussement, la surface de révolution qu'elle engendrera aura un point où le rayon de courbure d'une section quelconque sera nul.

Constructions diverses relatives aux rayons de courbure des sections normales.

809. *Construction du rayon de courbure d'une section normale.* — On peut mettre l'équation (4) sous la forme

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 \sin^2\varphi + R_2 \cos^2\varphi}.$$

Le dénominateur est la somme des longueurs que l'on obtient lorsque l'on projette deux fois le rayon R_1 sous l'angle $(90^\circ - \varphi)$ et le rayon R_2 sous l'angle φ. La formule conduit donc à une construction qui n'exige que la règle et le compas, pour la détermination du rayon R d'une section normale, lorsque l'on connaît l'azimut du plan de cette courbe et les rayons principaux.

Quand on doit déterminer les rayons de plusieurs sections normales, une méthode simple consiste à employer une courbe dont la considération est due à Euler [1]. On déduit de la formule précédente

$$(19) \qquad R = \frac{2R_1R_2}{(R_1+R_2)-(R_1-R_2)\cos 2\varphi}.$$

Si l'on regarde R comme un rayon vecteur correspondant à l'azimut 2φ, cette équation sera celle d'une conique rapportée à l'un de ses foyers et à l'axe qui y passe. Les demi-axes de cette courbe sont

$$\frac{R_1+R_2}{2}, \quad \sqrt{R_1R_2}.$$

Quand les deux rayons principaux sont de même signe, les deux axes ont des longueurs réelles, et la courbe est une ellipse; lorsque les rayons R_1 et R_2 sont de signes contraires, la longueur de l'un des axes est imaginaire et la courbe est une hyperbole; enfin, quand un des rayons de courbure R_2 est infini, l'équation (19) devient

$$R = \frac{R_1}{1+\cos 2\varphi},$$

et la courbe est une parabole. On ne doit pas oublier que le rayon de courbure d'une section normale correspond au rayon vecteur de la conique auxiliaire pour un azimut double.

810. *Détermination des sections principales et de leurs rayons.* — Toutes les fois que l'on connaît les rayons de courbure R, R′ et R″ de trois sections normales et les angles que comprennent leurs plans, on peut déterminer les sections principales et leurs rayons; car, en se donnant un paramètre arbitraire c, les rayons vecteurs de l'indicatrice correspondant aux trois sections seront $\sqrt{Rc}$, $\sqrt{R'c}$ et $\sqrt{R''c}$. Il sera possible de construire cette conique, puisque l'on aura son centre et trois de ses points.

La direction et la grandeur des axes de l'indicatrice font connaître les plans et les rayons de courbure des sections principales.

---

[1] Mémoire déjà cité à l'article 784.

La construction est en défaut quand les rayons R, R′ et R″ ne sont pas de même signe. On peut alors recourir à la conique dont nous avons parlé à l'article précédent, et le problème est ramené à la détermination d'une conique dont on connaît un foyer et trois points.

Nous ne nous arrêterons pas à exposer la solution détaillée des deux problèmes graphiques indiqués en cet article, parce qu'ils n'ont pas d'utilité dans les applications. Il importait seulement d'établir que la courbure d'une surface est déterminée en un point par les rayons de courbure de trois sections normales et les angles de leurs plans.

Grandeur de la déviation. — Paramètres de déviation. Axes de déviation.

811. Revenons maintenant à la *fig.* 327, dans laquelle les plans coordonnés ZOX et ZOY sont deux plans normaux rectangulaires quelconques.

Nous appelons

δ la déviation de la normale au point M, ou l'angle FMF_1 (art. **783**);
R_M, R_N et R_P les rayons de courbure des sections normales OM, ON et OP;
R_1 et R_2 les rayons de courbure des sections principales;
φ l'angle que le plan ZOX fait avec le plan principal dont la section a pour rayon R_1; l'angle que le plan ZOY fait avec le même plan principal est $90^\circ + \varphi$.

Nous avons vu que les angles EME_1 et FMF_1 sont égaux (art. **782**); l'équation (3) donne par conséquent

$$\delta = \frac{m\mathrm{M} + n\mathrm{N} - p\mathrm{P}}{mp}.$$

On a d'ailleurs, d'après l'équation (1),

$$m\mathrm{M} = \frac{\overline{\mathrm{O}m}^2}{2\mathrm{R_M}}, \quad n\mathrm{N} = \frac{\overline{\mathrm{O}n}^2}{2\mathrm{R_N}}, \quad p\mathrm{P} = \frac{\overline{\mathrm{O}p}^2}{2\mathrm{R_P}};$$

$$\mathrm{O}m = \mathrm{O}n = mp, \quad \overline{\mathrm{O}p}^2 = 2\overline{\mathrm{O}m}^2.$$

Portant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$\delta = \mathrm{O}m\left(\frac{1}{2\mathrm{R_M}} + \frac{1}{2\mathrm{R_N}} - \frac{1}{\mathrm{R_P}}\right).$$

Le théorème d'Euler donne

$$\frac{1}{R_M} = \frac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{R_2}\sin^2\varphi;$$

$$\frac{1}{R_N} = \frac{1}{R_1}\cos^2(90^\circ+\varphi) + \frac{1}{R_2}\sin^2(90^\circ+\varphi) = \frac{1}{R_1}\sin^2\varphi + \frac{1}{R_2}\cos^2\varphi;$$

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1}\cos^2(45^\circ+\varphi) + \frac{1}{R_2}\sin^2(45^\circ+\varphi) = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin 2\varphi.$$

Introduisant ces expressions dans l'équation qui donne la valeur de δ, et appelant, comme précédemment, α la longueur infiniment petite Om, on trouve

$$\delta = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin 2\varphi. \tag{20}$$

Cette formule donne pour la déviation une grandeur positive, quand la partie de la normale intérieure voisine de la surface se projette sur le plan tangent en dehors de l'angle φ, mesuré à partir de la section principale ayant le plus grand rayon de courbure. La quantité α doit être considérée comme positive.

L'équation (20) montre que la déviation atteint sa valeur maximum quand le plan normal partage en parties égales l'angle des plans principaux, et que les déviations des normales sont égales pour des directions symétriques par rapport à ce plan bissecteur. La déviation change de signe à chaque plan principal.

En éliminant l'angle φ entre les équations (20) et (5), on obtient [1]

$$\delta^2 = \alpha^2\left(\frac{1}{RR'} - \frac{1}{R_1R_2}\right). \tag{21}$$

812. Le rapport des grandeurs infiniment petites α et δ est une longueur finie que nous représenterons par la lettre K, et que nous appellerons *paramètre de déviation*. Ce paramètre est infini quand la déviation est nulle. Nous avons

$$K = \frac{\alpha}{\delta}, \tag{22}$$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin 2\varphi, \tag{20 bis}$$

$$\frac{1}{K^2} = \frac{1}{RR'} - \frac{1}{R_1R_2}. \tag{21 bis}$$

Supposons maintenant que l'on trace dans le plan tangent en M une courbe

[1] Les formules (20) et (21) sont dues, la première à M. J. Bertrand (Mémoire cité à l'article 781), la seconde à M. Lamarle (*Exposé géométrique*, 3e Partie).

telle que les carrés des rayons vecteurs issus du point M soient proportionnels aux paramètres de déviation des sections normales tangentes : nous aurons, en appelant ρ_1 le rayon vecteur qui correspond à un azimut φ, et c_1 un paramètre arbitraire,

$$\rho_1^2 = K c_1;$$

puis, en vertu de (20 *bis*),

$$\frac{c_1}{\rho_1^2} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \sin\varphi \cos\varphi;$$

enfin, en appelant x et y les coordonnées $\rho_1 \cos\varphi$ et $\rho_1 \sin\varphi$ d'un point de la courbe,

$$\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) xy = c_1.$$

Cette ligne est donc une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont tangentes aux sections principales. Elle joue pour les paramètres de déviation le même rôle que l'indicatrice pour les rayons de courbure.

815. On peut déterminer le paramètre de déviation à l'aide de l'indicatrice; car, si l'on appelle v l'angle formé par la normale à cette courbe en un point avec le rayon vecteur, on a

$$\tan v = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} xy.$$

Remplaçant a^2 et b^2 par leurs valeurs (7), et le produit xy par $\rho^2 \sin\varphi \cos\varphi$, ρ étant comme précédemment le rayon vecteur de l'indicatrice, on obtient

$$\tan v = \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2 c} \rho^2 \sin\varphi \cos\varphi,$$

ou bien

$$\tan v = -\frac{1}{2} R \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \sin 2\varphi.$$

Enfin, eu égard à l'équation (20),

$$\tan v = -R \frac{\delta}{\alpha} \text{ (1)},$$

$$K = -R \cot v.$$

(1) Cette formule a été donnée par M. Alings : *De superficierum curvatura;* Groningæ, 1849.

D'après un théorème de Maclaurin (*Traité des fluxions,* CXI) récemment rappelé par M. P. Serret (*Des méthodes en Géométrie*), on a

$$\cot v = \frac{3R}{R'},$$

R et v ayant les significations indiquées dans le texte, et R′ étant le rayon de courbure de la déve-

814. Considérons une surface du second ordre (*fig.* 334); soient Ω sa section par l'un de ses plans principaux que nous prenons pour plan vertical de projection, et M'C la normale au sommet (M, M') : si par un point m infiniment voisin de M on fait passer un plan DE parallèle à celui de la section Ω, il coupera la surface suivant une conique dont les axes ne différeront des axes de Ω que de quantités infiniment petites du second ordre (art. **777**), et dont par conséquent la projection verticale devra être regardée comme confondue avec Ω, si l'on n'a égard qu'aux infiniment petits du premier ordre. Le point m de l'espace se projette donc en un point m' de Ω, et la projection de la normale à la surface au point m est la normale à Ω en ce point m' infiniment rapproché de M'; elle passe ainsi au centre de courbure C de Ω pour le point M'; nous concluons de là que la normale à la surface au point m infiniment rapproché de (M, M'), et d'ailleurs quelconque, rencontre la perpendiculaire au plan de Ω qui passe au centre de courbure C; elle rencontre aussi et par la même raison la droite qui est perpendiculaire au plan de la seconde section principale en M, et qui passe par le centre de courbure de cette section.

On reconnaît d'après cela, par la considération d'une surface du second ordre osculatrice en un de ses sommets, que *toutes les normales à une surface aux points infiniment voisins d'un point donné rencontrent les deux droites qui passent respectivement par les centres des sections principales et qui sont perpendiculaires à leurs plans*. Nous appellerons ces droites *axes de déviation* (¹).

Courbure des sections obliques et de la section par le plan tangent.

815. *Théorème de Meusnier.* — Nous allons maintenant chercher comment on peut déterminer le rayon de courbure d'une section oblique, quand on connaît le rayon de courbure de la section normale qui lui est tangente, et l'angle des plans de ces courbes. Nous supposerons d'abord que la section oblique est tangente à une section principale.

Soient

OC la normale à une surface en un point O (*fig.* 335);
Ω la section de cette surface par un plan principal P;

---

loppée de l'indicatrice. Introduisant cette valeur de cot v dans l'équation du paramètre de déviation, on trouve

$$K = \frac{3R^2}{R'}.$$

On peut déduire de ces diverses formules des constructions assez simples pour le paramètre K.

(¹) Ce théorème est dû à Sturm (*Comptes rendus*, premier semestre 1845). La démonstration que nous en présentons est de M. Mannheim.

m un point situé sur Ω à une distance infiniment petite de O;
ω une section de la surface par un plan Q contenant les points O et m.

La normale à la surface au point m est dans le plan P, et le point C où elle rencontre la normale OC est le centre de courbure de la section principale Ω.

Les normales à la section oblique ω en chacun des points O et m sont les projections sur le plan Q des normales indéfinies à la surface en ces points (art. **46**). Le centre de courbure c de ω, point de rencontre des deux normales aux points O et m, est donc la projection sur le plan Q du point C, centre de courbure de la section principale Ω.

Si le plan P est un plan normal en O et d'ailleurs quelconque, la normale à la surface en m sera une droite mN située hors de ce plan, et ses projections mC et mc sur P et sur Q seront les normales principales aux sections Ω et ω. Mais l'angle de la normale mN avec le plan P étant infiniment petit, et l'angle NmO ne différant qu'infiniment peu d'un droit, l'angle compris entre la droite mc et la projection de mC sur Q est infiniment petit du second ordre. La normale principale à la section oblique ω au point m est donc la projection de la normale principale à la section Ω au même point. Par conséquent, *le rayon de courbure en un point d'une section oblique d'une surface est la projection du rayon de courbure en ce point de la section normale tangente à la section oblique,* quelle que soit la position de cette dernière par rapport aux plans principaux. Ce théorème est dû à Meusnier [1].

Si l'on appelle r et R les rayons de courbure au même point d'une section oblique et de la section normale tangente, et γ l'angle de leurs plans, on aura

$$r = \mathrm{R}\cos\gamma. \tag{23}$$

Tous les raisonnements qui précèdent peuvent être appliqués à une courbe gauche. Le plan Q est alors le plan osculateur de la courbe au point considéré.

816. *Courbure de la section par le plan tangent.* — Si la section oblique est tangente à une asymptote de l'indicatrice, R est infini, et par suite r est également

---

(1) *Mémoire sur la courbure des surfaces* (*Savants étrangers,* 1776).

Si l'on voulait une démonstration plus minutieuse, on pourrait remarquer que, sans faire aucune hypothèse sur l'angle que le plan Q fait avec le plan P normal en O et d'ailleurs quelconque (*fig.* 337), on peut obtenir, comme à l'article 817, l'équation

$$\cos \mathrm{N}m\mathrm{F} \cos \mathrm{F}m\mathrm{O} = \cos \mathrm{N}m\mathrm{G} \cos \mathrm{G}m\mathrm{O}.$$

Les différents angles qui entrent dans cette formule ont les valeurs indiquées à l'article 817, sauf NmG qui diffère infiniment peu de γ. L'équation se réduit donc à

$$\mathrm{E} = \varepsilon \cos\gamma,$$

d'où

$$r = \mathrm{R}\cos\gamma.$$

infini, quel que soit γ. Cependant, quand cet angle est droit, c'est-à-dire quand le plan Q est tangent à la surface, la formule (23) donne une valeur indéterminée pour r, et le théorème de Meusnier n'apprend plus rien sur la grandeur du rayon de courbure de la section.

Nous avons démontré à l'article **797** qu'une asymptote de l'indicatrice a un contact d'un ordre moins élevé d'une unité avec la section tangente qu'avec la section normale. Dans le cas général, le contact de la section normale est du second ordre, celui de la section par un plan tangent est par conséquent du premier ordre, et son rayon de courbure a une grandeur finie.

Nous allons parvenir au même résultat par des considérations infinitésimales analogues à celles que nous avons présentées à l'article précédent, et qui auront l'avantage de nous donner une expression du rayon de courbure.

817. Soient

m un point de la surface infiniment voisin du point considéré O (*fig.* 337), et situé sur l'une des asymptotes de l'indicatrice de ce point;

OZ et mN les normales à la surface aux points O et m;

Ω la section de la surface par le plan P qui contient la normale OZ et le point m;

ω celle des branches de la section par le plan tangent Q, qui touche la droite XOmY, asymptote de l'indicatrice;

mF et mG les projections de la normale mN sur les plans P et Q.

Les trois droites mN, mF et mO forment un trièdre rectangle le long de l'arête mF; on a par conséquent

$$\cos \mathrm{N}m\mathrm{O} = \cos \mathrm{N}m\mathrm{F} \cos \mathrm{F}m\mathrm{O}.$$

Le trièdre formé par les droites mN, mG et mO donne de la même manière

$$\cos \mathrm{N}m\mathrm{O} = \cos \mathrm{N}m\mathrm{G} \cos \mathrm{G}m\mathrm{O}.$$

Nous avons par suite

$$\cos \mathrm{N}m\mathrm{F} \cos \mathrm{F}m\mathrm{O} = \cos \mathrm{N}m\mathrm{G} \cos \mathrm{G}m\mathrm{O}.$$

L'angle NmF est infiniment petit, et son cosinus est égal à l'unité; les angles FmO et GmO sont complémentaires des angles de contingence E et ε des courbes Ω et ω au point O; l'angle NmG est complémentaire de la déviation δ. L'équation se réduit donc à

$$\mathrm{E} = \varepsilon\delta.$$

Si l'on appelle ρ le rayon de courbure de la section ω, on aura

$$\overline{\mathrm{O}m} = \rho\varepsilon \quad \text{ou bien} \quad \rho = \overline{\mathrm{O}m}\,\frac{\delta}{\mathrm{E}}.$$

La courbe Ω ayant une inflexion en O, l'angle E est infiniment petit du second ordre; Om et δ sont infiniment petites du premier ordre : le rayon ρ a donc une grandeur finie.

La déviation δ est donnée par l'équation (21), dans laquelle on doit attribuer à R une grandeur infinie. On trouve

$$\delta = \frac{\alpha}{\sqrt{-R_1 R_2}}.$$

En portant cette valeur de δ dans l'équation que nous venons d'obtenir et remarquant que Om est la valeur désignée par α, on a

$$\rho = \frac{\alpha^2}{E\sqrt{-R_1 R_2}}.$$

Enfin, si β est l'ordonnée du point de la courbe Ω qui correspond à l'abscisse α, on aura, d'après l'équation (2),

$$E = \frac{2\beta}{\alpha}$$

et, par suite,

$$\rho = \frac{\alpha^3}{2\beta\sqrt{-R_1 R_2}}. \tag{24}$$

817 *a*. Cette formule est nouvelle; nous croyons en conséquence qu'il n'est pas sans intérêt de la confirmer par une démonstration analytique.

La surface étant représentée par l'équation

$$z = f(x, y),$$

nous appelons suivant l'usage $p, q, r, \ldots$ les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \ldots$.

Nous désignons par n la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des abscisses la projection de l'une des asymptotes de l'indicatrice au point considéré. On a

$$tn^2 + 2sn + r = 0. \tag{a}$$

x', y', z' étant les coordonnées variables, l'asymptote est déterminée par les équations

$$p(x' - x) + q(y' - y) - (z' - z) = 0,$$
$$(x' - x) - \frac{1}{n}(y' - y) = 0,$$

dont la première représente le plan tangent.

On reconnaît facilement que l'équation d'un plan passant par cette asymptote de l'indicatrice est

$$(b) \qquad (p-k)(x'-x)+\left(q+\frac{k}{n}\right)(y'-y)-(z'-z)=0,$$

k étant une constante arbitraire; quand elle est nulle, le plan devient tangent.

L'équation (b) représentera la courbe d'intersection de la surface par le plan qui contient l'asymptote de l'indicatrice, si l'on y considère z' comme une fonction de x' et de y' donnée par l'équation de la surface. Alors, différentiant deux fois l'équation (b), nous aurons

$$(c) \qquad \left(q'-q-\frac{k}{n}\right)\frac{dy'}{dx'}+(p'-p+k)=0,$$

$$(d) \qquad \left(q'-q-\frac{k}{n}\right)\frac{d^2y'}{dx'^2}+\left[t'\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2+2s'\frac{dy'}{dx'}+r'\right]=0.$$

Lorsque l'on fait x', y' et z' respectivement égales à x, y et z, $\frac{dy'}{dx'}$ est égale à n, le second terme de l'équation (d) disparaît en vertu de l'équation (a), et $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ est nulle; si cependant k est nulle, c'est-à-dire si le plan est tangent, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Pour avoir dans ce cas la valeur de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, il faut différentier l'équation (d) en y considérant cette quantité comme constante. On obtient

$$(e) \qquad \left(s'+t'\frac{dy'}{dx'}\right)\frac{d^2y'}{dx'^2}+\left[\frac{1}{3}v'\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^3+w'\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2+u'\left(\frac{dy'}{dx'}\right)+\frac{1}{3}u'\right]=0.$$

Si maintenant nous faisons x', y' et z' égales à x, y et z, les équations (c) et (e) nous donneront

$$\frac{dy'}{dx'}=n,$$

$$\frac{d^2y'}{dx'^2}=-\frac{\frac{1}{3}vn^3+wn^2+un+\frac{1}{3}u}{s+tn}.$$

En appelant ρ le rayon de courbure de la section de la surface par son plan tangent, et en supposant que ce plan a été pris pour plan des xy, nous aurons

$$(f) \qquad \rho=\frac{(1+n^2)^{\frac{3}{2}}(s+tn)}{\frac{1}{3}vn^3+wn^2+un+\frac{1}{3}u}.$$

On a, en négligeant les termes à partir des infiniment petits du quatrième ordre,

$$dz=\left(q\frac{dy}{dx}+p\right)dx+\left[\frac{t}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+s\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{r}{2}\right]dx^2$$
$$+\left[\frac{v}{2.3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\frac{w}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{u}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{u}{2.3}\right]dx^3,$$

p et q sont nulles parce que le plan tangent contient les axes des x et des y. Si nous donnons à $\frac{dy}{dx}$ la valeur n qui détermine l'asymptote considérée de l'indicatrice, le second terme disparaîtra, dz sera la quantité que nous avons appelée β, et nous aurons

$$2\beta = \left(\frac{1}{3}vn^3 + wn^2 + un + \frac{1}{3}u\right)dx^3.$$

L'équation (f) deviendra par suite

$$\rho = \frac{(1+n^2)^{\frac{3}{2}}(s+tn)\,dx^3}{2\beta},$$

ou bien

$$\rho = \frac{(dx^2+n^2dx^2)^{\frac{3}{2}}(s+tn)}{2\beta}.$$

Mais la quantité $\sqrt{dx^2+n^2dx^2}$ ou $\sqrt{dx^2+dy^2}$ est la longueur α : donc

$$(g)\qquad \rho = \frac{\alpha^3}{2\beta}(s+tn).$$

Supposons maintenant que l'axe des abscisses touche la section principale dont le rayon est R_1; nous aurons

$$s=0,\quad t=\frac{1}{R_2},\quad n=\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}};$$

ces valeurs portées dans l'équation (g) donnent l'équation (24).

818. Nous avons vu à l'article **816** que toute section tangente à une asymptote de l'indicatrice a un contact du second ordre, au moins, avec cette droite, sauf dans le cas où son plan est tangent. Il résulte de là que *quand une courbe tracée sur une surface a, en un point, un contact du premier ordre avec une des deux asymptotes de l'indicatrice, son plan osculateur en ce point est tangent à la surface.*

Cette proposition est la réciproque d'un théorème que nous avons établi à l'article **797.**

819. Nous avons démontré, à l'article **474** [1], que le rapport des rayons de courbure en deux points correspondants d'une ligne tracée sur une surface développable et de sa transformée par développement est égal au cosinus de l'angle que forme le plan osculateur de la ligne avec le plan tangent à la surface. Cette proposition est une conséquence du théorème de Meusnier.

Lorsqu'on développe une développable, les points d'une courbe Ω tracée sur cette surface décrivent des trajectoires qui sont toujours normales au plan de

---

[1] Dans la seconde édition de la deuxième Partie, p. 62, ligne 10, il faut lire : $\frac{R}{R'} = \cos N$; ligne 13, il faut lire : *est égal au cosinus.* (E. L.)

développement, et qui forment une surface dont la section par un plan tangent à la développable est une transformée de la courbe primitive. La courbe Ω et sa transformée appartiennent donc à une même surface, et la seconde de ces lignes est une section normale qui touche la première au point où elle rencontre la génératrice de contact du plan tangent avec la développable. On voit que le théorème de Meusnier peut être appliqué : il donne immédiatement la proposition que nous avons rappelée.

Définition des lignes de courbure et des lignes asymptotiques.

820. Lorsque l'on passe d'un point d'une surface à un point infiniment voisin, les positions du plan tangent et des plans des sections principales varient infiniment peu; il en résulte que l'on peut tracer deux séries de courbes tangentes en chacun de leurs points à une des deux sections principales de la surface en ce point. Car, si, en partant d'un point O, on considère sur une des sections principales un point infiniment voisin O', à ce dernier point passeront deux nouvelles sections principales, dont l'une fera un angle infiniment petit avec l'arc OO'; on peut suivre celle-là, y prendre un point O'' infiniment voisin de O' et, continuant ainsi, on obtient une ligne qui satisfait à la condition énoncée.

On appelle *lignes de courbure* d'une surface les lignes qui sont tangentes en chacun de leurs points à l'une des sections principales. D'après ce que nous venons de voir, et les propriétés des sections principales, il passe à chaque point de la surface deux lignes de courbure qui se croisent à angle droit [1].

De tous les points d'une surface infiniment voisins d'un point considéré, ceux qui appartiennent aux sections principales sont les seuls pour lesquels la déviation soit nulle. Il en résulte que *les normales à une surface en tous les points d'une ligne de courbure forment une développable,* et que le lieu de ces droites serait une surface gauche, si la courbe directrice n'était pas une ligne de courbure.

Ch. Dupin a considéré des lignes *asymptotiques* tangentes en chacun de leurs points à l'une des deux asymptotes de l'indicatrice de la surface.

Ces lignes font mieux connaître la courbure de la surface que les lignes de courbure, car elles déterminent, outre la direction des sections principales, le rapport des rayons principaux; mais elles ne sont réelles que sur les surfaces à courbures opposées.

---

[1] La théorie des lignes de courbure est due à Monge, *Mémoire sur les déblais et les remblais* (*Histoire de l'Académie*, 1781); *Application de l'Analyse à la Géométrie,* XV et XVI.

Notions sur la courbure des surfaces de révolution.

821. Les normales à une surface de révolution en deux points consécutifs d'un méridien sont dans le plan de cette courbe; un méridien χ (*fig.* 336) est donc une section principale en l'un quelconque de ses points tel que O', et son rayon de courbure O'E est l'un des deux rayons de courbure principaux de la surface.

Le plan de la seconde section principale est perpendiculaire au plan méridien, et par suite cette section est tangente au parallèle. Comme d'ailleurs la perpendiculaire O'C abaissée sur l'axe A'Z est le rayon du parallèle, on voit, d'après le théorème de Meusnier, que le rayon de la section normale tangente est $\frac{O'C}{\cos FO'C}$ ou O'F.

En résumé, *les deux rayons de courbure principaux d'une surface de révolution, en un point, sont le rayon de la méridienne et le segment compris sur la normale entre le point considéré et l'axe* (1).

Quand la méridienne présente sa convexité à l'axe, les rayons O'E et O'F sont de signes contraires, et par suite la surface est à courbures opposées. Lorsque la concavité de la méridienne est tournée vers l'axe, comme cela a lieu au point O'_1, les rayons O'_1F_1 et O'_1E_1 sont de même signe, et la surface est convexe.

Aux points d'inflexion tels que O'_2, et aux points tels que O'_3 pour lesquels la normale est parallèle à l'axe de révolution, l'un des rayons de courbure est infini. Chacun des parallèles décrits par les points O'_2 et O'_3 sépare donc une partie de la surface où les indicatrices sont des ellipses, d'une partie où les indicatrices sont des hyperboles. Le théorème de l'article **803** pouvait faire prévoir ce résultat pour le parallèle du point O'_3, car, en tous les points de ce cercle, la surface est tangente au plan qui le contient.

822. Nous allons maintenant déterminer les asymptotes de l'indicatrice au point (O, O') (*fig.* 336).

Nous considérons un hyperboloïde ayant un sommet en ce point, et y étant osculateur de la surface. Nous pouvons placer son centre en un point quelconque de la normale EF; nous choisissons le point F, et alors l'hyperboloïde est de révolution (art. **798**) : le rayon du cercle de gorge est FO', et l'axe la droite Ff parallèle à la tangente O'K'. La longueur de l'axe non transverse Ff est le double de la droite O'K', moyenne proportionnelle entre les rayons O'E et O'F (art. **794**).

(1) Ces résultats ont été donnés pour la première fois par Meusnier, dans le Mémoire déjà cité à l'article 815.

Les asymptotes de l'hyperbole méridienne sont les droites FK′ et FL′. On obtient l'indicatrice de la surface de révolution au point (O, O′), en transportant parallèlement à elle-même, dans le plan tangent L′K′, l'hyperbole méridienne contenue dans le plan F*f* parallèle au plan tangent en O′; par conséquent, si l'on mène par les points K′ et L′ des droites perpendiculaires au plan vertical, et ayant une longueur égale à O′F, leurs extrémités seront sur les asymptotes cherchées. Nous projetons K′ en K, nous prenons les segments KU et KV égaux à O′F : les asymptotes de l'indicatrice sont (OU, O′K′) et (OV, O′K′).

Ces droites, en tournant autour de l'axe (A, A′Z), engendrent un hyperboloïde de révolution osculateur de la surface en tous les points du parallèle décrit par (O, O′). Mais cet hyperboloïde n'a pas son centre sur la normale EF, et par suite il n'appartient pas à la série des hyperboloïdes osculateurs en un de leurs sommets.

823. Si le point (O, O′) parcourt la méridienne χ, les asymptotes de l'indicatrice pour ses différentes positions formeront une surface gauche. Les arcs de la méridienne qui présentent leur convexité à l'axe seront utiles et doubles sur cette surface; les autres seront parasites. Les asymptotes de l'indicatrice se confondent au point d'inflexion O'_2 avec la tangente à la méridienne, et au point supérieur O'_3 avec la tangente au parallèle : ces points seront des sommets de la surface gauche.

Chacune des deux nappes qui se coupent le long de l'arc $O'_2 O'_3$ est tangente à la surface de révolution; ces nappes sont donc tangentes l'une à l'autre, et par suite la courbe χ est, sur la surface gauche, une ligne double de contact.

La courbe d'intersection φ d'une surface de révolution par un plan BC tangent à la méridienne χ, en un point d'inflexion (M, M′) (*fig.* 339), a pour tangente en ce point la droite BC que l'on doit regarder comme une asymptote unique de l'indicatrice. La courbe est d'ailleurs composée de deux parties symétriques par rapport à (MA, M′B), et par suite elle a un rebroussement de premier ordre.

Notions sur la courbure des surfaces gauches.

824. *Toute surface gauche est à courbures opposées*, car en chacun de ses points son plan tangent la coupe suivant une génératrice et une courbe (art. **617**). La génératrice et la tangente à la courbe d'intersection sont les deux asymptotes de l'indicatrice (art. **797**). Les bissectrices des angles de ces droites sont les traces des plans des sections principales sur le plan tangent. On peut, par conséquent, construire les sections principales en un point donné et déterminer ensuite leurs rayons de courbure (art. **103**). Nous avons vu que le rapport des grandeurs absolues de ces rayons est égal au carré de la tangente de la moitié

de l'angle compris entre les asymptotes de l'indicatrice (art. **796**). Cette proposition permet de déterminer un des rayons quand on a obtenu l'autre.

825. Considérons deux génératrices G et G' d'une surface gauche ; nous savons qu'il existe un hyperboloïde dans lequel ces droites sont des génératrices d'un même système, et qui se raccorde avec la surface le long de l'une d'elles G (art. **741**). Si l'on suppose que G' se rapproche de G et finisse par se confondre avec cette droite, l'hyperboloïde deviendra osculateur le long de G; les génératrices du second système seront alors, avec la génératrice G, les asymptotes des indicatrices aux différents points de G; d'où ce théorème : *les secondes asymptotes des indicatrices d'une surface gauche, aux différents points d'une génératrice, forment un hyperboloïde osculateur de la surface le long de cette génératrice.*

Lorsque la génératrice considérée et les deux qui lui sont infiniment voisines sont parallèles à un même plan, l'hyperboloïde se transforme en un paraboloïde. Cette circonstance se présente toujours quand la surface a un plan directeur.

Si l'on connaît les secondes asymptotes des indicatrices en trois points d'une génératrice, l'hyperboloïde osculateur le long de cette droite sera déterminé, et l'on pourra construire la deuxième asymptote de l'indicatrice de l'un quelconque des points de la génératrice considérée (art. **744**).

826. Soient AX une génératrice d'une surface gauche (*fig.* 340), BX_1 la génératrice voisine et AB leur commune perpendiculaire. Par un point quelconque O de la génératrice AX, nous faisons passer un plan perpendiculaire à AX et par conséquent normal à la surface ; il coupe la génératrice BX_1 en un point N qui se projette en P sur le plan central de AX (art. **622**).

Le trièdre (NP, NB, NO) rectangle le long de NP donne

$$\cot \mathrm{NO} = \cot \widehat{\mathrm{BNP}} \sin \widehat{\mathrm{PNO}}.$$

Les droites NB et NO déterminent le plan tangent au point N infiniment voisin de O; la déviation δ au point N est l'angle que la normale NE perpendiculaire au plan BNO fait avec le plan PNO, ou le complément de l'angle que ces deux plans comprennent, et que nous avons désigné par NO dans la formule précédente. L'angle BNP est le complément de l'angle NBP ou σ que forment les deux génératrices AX et BX_1. Enfin l'angle PNO est le complément de l'obliquité NOP ou θ du plan tangent en O.

D'après ces remarques, l'équation ci-dessus devient

$$\operatorname{tang} \delta = \operatorname{tang} \sigma \cos \theta ;$$

et, comme les angles δ et σ sont infiniment petits,

$$\delta = \sigma \cos \theta.$$

Le rayon de courbure de la génératrice étant infini, on a, en vertu de l'équation (21),

$$\delta^2 = -\frac{\alpha^2}{R_1 R_2}.$$

On obtient par suite, en remarquant qu'on doit attribuer à α la grandeur ON ou $\frac{OP}{\cos\theta}$,

$$\sigma^2 \cos^4\theta = -\frac{\overline{OP}^2}{R_1 R_2}.$$

Si nous appelons k le paramètre de la génératrice (art. **623**), OP sera égal à $k\sigma$, et nous aurons

$$(25) \qquad \cos^4\theta = -\frac{k^2}{R_1 R_2}.$$

Nous avons d'ailleurs (art. **622**), en appelant x l'abscisse AO,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{x}{k}.$$

L'élimination de θ entre ces deux équations donne

$$(26) \qquad R_1 R_2 = -\left(\frac{x^2 + k^2}{k}\right)^2 \quad [1].$$

Il résulte des observations que nous avons présentées à l'article **776** que, quand on déforme une surface gauche sans en courber les génératrices, les points centraux ne sont pas déplacés, et les paramètres ne sont pas modifiés. On voit d'après cela, par la formule que nous venons d'obtenir, que *quand on déforme une surface gauche, le produit des rayons de courbure principaux en chaque point reste le même*. Ce produit est infini quand la surface est développable [2].

---

[1] Nous croyons que cette formule est due à M. Lamarle (*Théorie géométrique des centres et des axes instantanés de rotation*). On en déduit par les procédés du Calcul intégral le résultat suivant signalé par Bour (*Théorie de la déformation des surfaces*) :

Si l'on élève en chaque point d'une génératrice d'une surface gauche et dans un plan quelconque une ordonnée égale à l'inverse de la racine carrée du produit des rayons principaux prise positivement, on aura une courbe asymptotique de la génératrice (*fig.* 345), et dont la forme dépendra de la grandeur du paramètre k; mais l'aire totale comprise entre la courbe et son asymptote est indépendante de k et égale à π, de sorte que la courbe s'éloigne d'autant plus de la génératrice qu'elle est restée plus longtemps confondue avec elle. (La *fig.* 345 est extraite du Mémoire de Bour.)

[2] Gauss a établi d'une manière générale que, quand on déforme une surface flexible et inextensible, le produit des rayons de courbure principaux en chaque point reste le même. Liouville a reproduit le Mémoire du célèbre géomètre, et des démonstrations spéciales du théorème dues à Puiseux et à M. J. Bertrand, dans les notes de la 5e édition de l'*Application de l'Analyse* de Monge. Dans son *Exposé géométrique*, M. Lamarle a établi le théorème par des considérations de Cinématique.

827. Quand deux surfaces gauches S et S_1 se raccordent le long d'une droite G, cette génératrice a le même paramètre et le même point central sur les deux surfaces (art. **625**); par conséquent, et en vertu de l'équation (26), en chacun de ses points, les produits des rayons de courbure des surfaces sont égaux.

Les hyperboloïdes A et A_1, osculateurs des surfaces S et S_1 le long de la génératrice G, se coupent, en général, suivant deux droites P et Q qui rencontrent G en des points M et N (art. **733**). Les indicatrices des surfaces ont les mêmes asymptotes en ces points, et par suite les rayons de courbure principaux y sont dans des rapports égaux; mais nous venons de voir qu'il y a égalité entre les produits de ces rayons : leurs grandeurs sont donc les mêmes, et les surfaces S et S_1 sont osculatrices aux points M et N.

Celui des hyperboloïdes qui est intérieur à l'autre d'un côté de la génératrice P devient extérieur de l'autre côté. Par conséquent, si l'on coupe les surfaces S et S_1 par des plans parallèles entre eux et à la droite P, les sections de l'une des surfaces, S par exemple, auront d'un côté du point M des rayons de courbure plus petits que ceux des sections de S_1, et de l'autre, plus grands. Les surfaces se coupent donc suivant une courbe tangente à chaque droite d'intersection des hyperboloïdes, seconde asymptote de l'indicatrice d'un point d'osculation.

Nous voyons ainsi que, *quand deux surfaces gauches se raccordent le long d'une génératrice, elles se coupent, en général, suivant une courbe qui rencontre la droite de contact en deux points, et que les surfaces sont osculatrices en ces points.*

Lignes d'ombre d'une surface gauche quand le point lumineux est dans le plan tangent le long d'une génératrice singulière. — Rayons de courbure de la surface aux divers points de cette droite.

828. Les questions que nous allons examiner ont de l'importance à plusieurs points de vue, principalement pour les exercices graphiques relatifs aux lignes d'ombre des surfaces gauches. Nous emploierons le Calcul différentiel, qui nous paraît utile pour introduire dans cette étude la clarté désirable.

Nous avons vu dans le VIIe Livre qu'une surface gauche peut avoir des génératrices singulières le long de chacune desquelles elle est touchée par un même plan. Deux génératrices consécutives se rencontrent alors en un point que nous avons appelé *sommet* (art. 629). Toutes les lignes d'ombre de la surface passent à chaque sommet (art. 634).

Lorsque le point lumineux est dans le plan tangent le long d'une génératrice singulière, cette droite fait partie de la ligne d'ombre : c'est la branche qui passe au sommet. Une autre branche, qui forme la courbe d'ombre proprement dite, rencontre les diverses génératrices (art. 617), et traverse nécessairement la droite suivant laquelle le plan touche la surface. Nous allons déterminer le point où elle coupe cette génératrice.

829. Nous représentons la génératrice d'une surface gauche par les équations

$$(1) \qquad y = Mx + P, \quad z = Nx + Q,$$

M, N, P et Q étant des fonctions d'une même variable α. Nous désignerons par M', N', ..., M'', N'', ... les dérivées premières et secondes de M, N, ...

Le plan qui passe par la génératrice considérée et par un point fixe (a, b, c) a pour équation

$$(Na + Q - c)(Mx + P - y) - (Ma + P - b)(Nx + Q - z) = 0.$$

L'enveloppe de ce plan, quand on fait varier α, est le cône dont le sommet est au point fixe et qui est circonscrit à la surface. Les coordonnées du point de la génératrice où le plan touche la surface satisfont donc à la dérivée de son équation prise par rapport à α :

$$\begin{aligned}(N'a + Q')(Mx + P - y) + (Na + Q - c)(M'x + P')\\ - (M'a + P')(Nx + Q - z) - (Ma + P - b)(N'x + Q') = 0.\end{aligned}$$

En éliminant y et z entre cette équation et les équations (1), on obtient l'abscisse du point où le plan touche la surface, c'est-à-dire du point de la génératrice où passe la courbe d'ombre, quand le point fixe est lumineux,

$$(2) \qquad x = -\frac{P'(Na + Q - c) - Q'(Ma + P - b)}{M'(Na + Q - c) - N'(Ma + P - b)}.$$

830. Nous appelons $M_1, N_1, \ldots, M'_1, \ldots$ les valeurs que prennent $M, N, \ldots, M', \ldots$ quand on donne à α une certaine valeur α_1. Nous voulons que la génératrice qui correspond à α_1 se confonde avec l'axe des abscisses, que le plan des xy touche la surface le long de cette droite, et que l'origine des coordonnées soit le point de rencontre des deux génératrices consécutives. En vertu de la première condition, M_1, N_1, P_1 et Q_1 sont nulles. La génératrice infiniment voisine de celle qui coïncide avec l'axe des abscisses a pour équations

$$y = M'_1\, x\, d\alpha + P'_1\, d\alpha, \quad z = N'_1\, y\, d\alpha + Q'_1\, d\alpha.$$

Pour que cette droite soit dans le plan des xy, il faut que N'_1 et Q'_1 soient nulles. Enfin, la troisième condition exige que P'_1 soit égale à zéro. Nous avons donc

$$(3) \qquad M_1 = 0, \quad N_1 = 0, \quad P_1 = 0, \quad Q_1 = 0, \quad N'_1 = 0, \quad P'_1 = 0, \quad Q'_1 = 0.$$

831. Quand le point lumineux (a, b, c) est dans le plan tangent le long de la génératrice singulière qui est confondue avec l'axe des abscisses, c est nulle ; l'équation (2), qui détermine l'abscisse du point où la ligne d'ombre rencontre la génératrice (1), se réduit à

$$x = -\frac{P'(Na + Q) - Q'(Ma + P - b)}{M'(Na + Q) - N'(Ma + P - b)}.$$

Si nous faisons α égale à α_1, la valeur de x se présente sous une forme indéterminée mais, en prenant les dérivées du numérateur et du dénominateur, on obtient

$$x = -\frac{Q''_1\, b}{N''_1\, b}.$$

Nous posons

$$(4) \qquad g = -\frac{Q''_1}{N''_1}.$$

Si b n'est pas nulle, l'équation que nous avons trouvée donne

$$(5) \qquad x = g.$$

La longueur g est indépendante des coordonnées a et b; par conséquent, *quelle que soit la position du point lumineux dans le plan tangent le long d'une génératrice singulière, mais non sur elle, la ligne d'ombre passe par un même point de cette droite.*

Quand la génératrice infiniment voisine de celles qui se coupent est parallèle à leur plan, qui est ici le plan des xy, N''_1 est nulle, et le point commun aux lignes d'ombre que nous considérons s'éloigne à l'infini. Cette circonstance se présente toujours pour les génératrices singulières des surfaces à plan directeur.

832. Le plan des xy rencontre les différentes génératrices, et par conséquent coupe la surface. Il est intéressant de déterminer le point où la ligne d'intersection traverse l'axe des abscisses.

Si l'on conserve les infiniment petits du deuxième ordre, la seconde équation de la génératrice infiniment voisine de celle que l'on considère sera

$$z = \left(N + N' d\alpha + \frac{1}{2} N'' d\alpha^2\right) x + \left(Q + Q' d\alpha + \frac{1}{2} Q'' d\alpha^2\right).$$

Quand α est égale à α_1, cette équation devient, en vertu des égalités (3),

$$z = \frac{1}{2} N''_1 x \, d\alpha^2 + \frac{1}{2} Q''_1 d\alpha^2.$$

En supposant z nulle, on trouve pour l'abscisse la valeur g. *Le point d'une génératrice singulière où passent les lignes d'ombre, quand les points lumineux sont dans le plan tangent le long de cette droite, est donc précisément celui qui appartient à l'intersection de la surface par ce plan tangent.*

On pouvait prévoir ce résultat, car, sur une surface gauche, une courbe d'ombre est le lieu des points où les différentes génératrices sont rencontrées par les intersections de la surface avec les plans qui contiennent respectivement ces droites et qui passent au point lumineux.

833. Nous avons vu (art. 751) que la surface du biais passé a deux sommets, (I, O') et (J, O') (*fig.* 320). Les plans tangents le long des génératrices (IA, O'A') et (JD, O'D') qui passent à ces points sont verticaux. Leurs lignes d'intersection avec la surface n'ont pas été tracées sur la figure : ce sont des paraboles qui coupent respectivement les génératrices singulières aux points (R, R') et (S, S') (art. 771). Chacun de ces points est donc celui par lequel passeraient toutes lignes d'ombre, si un point lumineux occupait successivement différentes positions dans le plan AC ou dans le plan BD. Nous savons, en effet, que les points (R, R') et (S, S') appartiennent à la ligne de contour apparent par rapport au plan horizontal (art. 759) : cette ligne est la courbe de contact d'un cône circonscrit dont le sommet situé à l'infini peut être indifféremment supposé dans le plan AC ou dans le plan BD.

834. Lorsque le point lumineux est sur la génératrice singulière elle-même, on a

$$b = 0, \quad c = 0,$$

et l'équation (2) se réduit à

$$x = -\frac{P'(Na + Q) - Q'(Ma + P)}{M'(Na + Q) - N'(Ma + P)}.$$

x est indéterminée, quand on attribue à α la valeur α_1. En prenant les dérivées des deux termes de la fraction, on trouve

$$x = -\frac{P''(Na+Q)+P'(N'a+Q')-Q''(Ma+P)-Q'(M'a+P')}{M''(Na+Q)+M'(N'a+Q')-N''(Ma+P)-N'(M'a+P')}.$$

L'introduction des valeurs (3) annule encore le numérateur et le dénominateur; mais, si l'on prend de nouveau les dérivées, et si l'on supprime les termes que l'hypothèse $\alpha=\alpha_1$ fait disparaître, au fur et à mesure qu'ils se présentent, on obtient après quelques réductions

$$x = \frac{2Q''_1 a}{-N''_1 a + Q''_1};$$

d'où, en ayant égard à l'équation (4),

(6) $$x = \frac{2ga}{g+a}.$$

Soient EX la génératrice singulière (*fig.* 422 *bis*); S, G, O les points où elle est rencontrée par la génératrice voisine, par l'intersection du plan tangent avec la surface et par la ligne d'ombre; enfin, A le point lumineux. L'équation (6) donne

(7) $$SO = \frac{2SG \times SA}{SG+SA}.$$

On déduit successivement de cette équation

$$SA(SG-SO)+SG(SA-SO)=0,$$
$$SA \times OG - SG \times AO = 0,$$

(8) $$\frac{SA}{SG} : \frac{OA}{OG} = -1.$$

Il résulte de cette équation que, *quand le point lumineux est sur la génératrice singulière, le point de la courbe d'ombre et le sommet de la surface sont conjugués harmoniques du point lumineux et du point où la génératrice rencontre l'intersection de la surface par son plan tangent* (art. 514) [1].

Quand la génératrice infiniment voisine de celles qui se rencontrent au sommet est parallèle à leur plan, le point G est à l'infini (art. 831), et l'on voit par l'équation (7) que le segment SO est double de SA. Ainsi, lorsqu'un point lumineux est sur la génératrice supérieure (NE, N'E') d'un conoïde (*fig.* 299), il se trouve à égales distances du point où la ligne d'ombre traverse cette droite et du sommet (N, N').

835. *Considérations sur les changements de forme des courbes d'ombre.* — Nous avons vu (art. 831 et 834) que, quand le point lumineux est dans le plan tangent à la surface gauche, le long de la génératrice singulière EX (*fig.* 422 *bis*), la courbe d'ombre

---

[1] On déduit de l'équation (7)

$$\frac{2}{SO} = \frac{1}{SG} + \frac{1}{SA}.$$

Cette relation entre quatre points en rapport harmonique est très fréquemment employée.

passe par le point G de cette droite, et que, quand le point lumineux est sur la génératrice elle-même, la courbe d'ombre la traverse en un point distinct de G. Il est intéressant d'étudier comment se fait la transition entre ces deux formes.

Supposons d'abord que la surface ait un plan directeur : le point G est à l'infini (art. 831). Lorsque le point lumineux se rapproche de la génératrice singulière, les deux bras qui s'étendent à l'infini se resserrent contre cette droite; à la limite ils se réunissent à elle, et la ligne d'ombre comprend une seconde fois la génératrice singulière. On conçoit facilement que la partie qui reste courbe peut traverser la génératrice ailleurs qu'à l'infini.

Quand la surface gauche n'a pas de plan directeur, le plan tangent le long d'une génératrice singulière telle que EX (*fig.* 422 *bis*) est tangent à l'infini; il touche donc la développable asymptote (art. 639). On reconnaît, en considérant le mode de génération de la développable, que la ligne de contact est précisément la génératrice EX. Nous donnerons d'ailleurs une démonstration analytique de ce théorème à l'article suivant.

Si le point lumineux est dans le plan tangent le long de la génératrice singulière EX, et peu éloigné d'elle, on pourra mener par ce point un second plan tangent à la développable asymptote, et par suite la courbe d'ombre a une branche infinie correspondant à une génératrice voisine de la génératrice singulière EX (art. 747). Lorsque le point lumineux supposé mobile arrive sur cette dernière droite, les deux bras de la branche infinie se réunissent à elle, et l'on retrouve les mêmes circonstances que quand la surface a un plan directeur.

Nous voyons qu'*une génératrice rectiligne appartient deux fois à la courbe d'ombre, quand elle contient le point lumineux, et quand un même plan est tangent à la surface en tous ses points.*

836. Proposons-nous de déterminer la génératrice de la développable asymptote qui est parallèle à la génératrice représentée par les équations (1).

m étant un coefficient arbitraire, l'équation d'un plan contenant la génératrice (1) est

$$(y - Mx - P) - m(z - Nx - Q) = 0.$$

Pour que ce plan soit tangent à l'infini, il faut qu'il soit parallèle à la génératrice infiniment voisine de celle que nous considérons. Les équations de cette génératrice sont

$$y = (M + M'\,d\alpha)x + (P + P'\,d\alpha),$$
$$z = (N + N'\,d\alpha)x + (Q + Q'\,d\alpha).$$

La condition du parallélisme donne

$$M' - mN' = 0.$$

L'équation du plan passant par la génératrice considérée et tangent à l'infini est par suite

$$N'(y - Mx - P) - M'(z - Nx - Q) = 0. \tag{9}$$

La génératrice de la développable est l'intersection de ce plan par le plan que représente la dérivée de l'équation précédente prise par rapport à α. On trouve, pour cette dérivée, après quelques réductions,

$$(M''N - N''M)x + N''y - M''z + M''Q + M'Q' - N''P - N'P' = 0. \tag{10}$$

Si maintenant nous supposons α égale à α_1, nous trouvons, en introduisant les valeurs (3) dans les équations (9) et (10),

$$z = 0, \quad N''_1 y - M''_1 z = 0,$$

ou bien

$$z = 0, \quad y = 0.$$

La première de ces équations, qui représente le plan tangent à la développable asymptote, montre que ce plan est celui qui touche la surface gauche le long de la génératrice EX, comme nous le savions déjà; on voit par la seconde que la génératrice EX appartient à la développable. Ainsi, *quand une surface gauche a un sommet à distance finie, elle est touchée par sa développable asymptote tout le long de la génératrice qui passe à ce point.*

Si cependant la génératrice infiniment voisine de celles qui se rencontrent est parallèle à leur plan, N''_1 est nulle, et la seconde équation ne fait plus connaître la position que la génératrice de la développable occupe dans le plan tangent. Pour déterminer cette droite, il faudrait d'abord éliminer z entre les équations (9) et (10), puis chercher par les procédés ordinaires les valeurs des grandeurs indéterminées que les hypothèses (3) introduisent dans la formule. Nous croyons peu utile de nous arrêter à ces détails, et nous nous bornons à rappeler que, quand la surface a un plan directeur, la développable asymptote disparaît tout entière à l'infini (art. 641).

837. *Rayons de courbure d'une surface gauche aux différents points d'une génératrice singulière.* — Nous allons maintenant chercher la grandeur du rayon de courbure de la section faite dans la surface gauche par un plan perpendiculaire à la génératrice singulière. Si nous différentions les équations (1) en y considérant l'abscisse x comme constante, et les deux autres coordonnées comme fonctions de α, nous aurons

$$dy = (M'x + P')\,d\alpha, \qquad dz = (N'x + Q')\,d\alpha,$$
$$d^2y = (M''x + P'')\,d\alpha^2, \quad d^2z = (N''x + Q'')\,d\alpha^2.$$

En introduisant ces valeurs dans l'expression générale du rayon de courbure

$$R = \frac{(dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,d^2z - dz\,d^2y},$$

on obtient

$$\text{(11)} \qquad R = \frac{[(M'x + P')^2 + (N'x + Q')^2]^{\frac{3}{2}}}{(M'x + P')(N''x + Q'') - (N'x + Q')(N''x + P'')}.$$

Lorsque α est égale à α_1, en vertu des égalités (3), l'équation (11) se réduit à

$$\text{(12)} \qquad R = \frac{M'^2_1 x^2}{N''_1 x + Q''_1}.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\text{(13)} \qquad \frac{M'^2_1}{N''_1} x^2 - Rx + Rg = 0;$$

x et R sont l'abscisse et l'ordonnée, parallèle à l'axe des z, du centre de courbure de la section considérée. L'équation que nous venons d'obtenir montre que *les centres de*

courbure des sections faites dans une surface gauche par des plans perpendiculaires à une génératrice singulière ont pour lieu une hyperbole.

L'une des asymptotes GH (*fig.* 422 *bis*) passe par le point G que nous avons défini précédemment (art. 834); elle est perpendiculaire à la génératrice EX. L'autre asymptote EI rencontre cette droite à une distance du sommet S égale à SG; son coefficient angulaire est $\frac{M_1'^2}{N_1''}$. La courbe est tangente à la génératrice au point S; nous savons que la section qui passe à ce point a un rebroussement (art. 666).

838. La génératrice singulière est, en chacun de ses points, une section principale de la surface; la seconde section principale est la courbe qui a pour rayon R. Au point G ce rayon est infini, comme le premier rayon de courbure; la surface y est donc osculée par un plan. Ainsi, *le plan tangent à une surface gauche le long d'une génératrice singulière est osculateur au point où se rencontrent les lignes suivant lesquelles il coupe et il touche la surface.* L'hyperbole Δ montre qu'un second point d'osculation se trouve en général à l'infini.

839. Si dans l'équation (13) nous remplaçons g par sa valeur (4), nous aurons

$$M_1'^2 x^2 - N_1'' R x - Q_1'' R = 0.$$

Quand la génératrice infiniment voisine de celles qui se rencontrent est parallèle à leur plan, N_1'' est nulle, l'équation perd son second terme, et la courbe qu'elle représente devient une parabole.

Il est facile de vérifier ce résultat sur le conoïde droit. Si la section perpendiculaire à la génératrice est une ellipse ayant un de ses sommets sur cette droite, et telle que l'axe qui aboutit à ce sommet soit parallèle à la directrice rectiligne, cet axe aura une longueur constante ($2p$), tandis que la longueur de l'autre axe sera proportionnelle à l'abscisse du plan de la courbe ($2nx$). Le rayon de courbure $\left(\frac{n^2}{p}x^2\right)$ sera donc proportionnel au carré de l'abscisse.

840. Le point G peut occuper toutes les positions sur la génératrice; quand il coïncide avec le sommet S, g est nulle, et l'équation (13) représente deux droites qui se croisent à l'origine, l'une oblique, l'autre perpendiculaire à l'axe des abscisses. Les centres de toutes les sections perpendiculaires à la génératrice ont pour lieu l'une de ces droites, la première. Il résulte de là que la surface peut être osculée par des cônes le long de la génératrice. Ce cas est celui des développables (art. 451). Le plan tangent le long de la génératrice doit donc être osculateur en S, et par suite il se confond avec le plan de rebroussement. Ces deux plans sont ordinairement distincts, comme on le voit par l'exemple du conoïde de la *fig.* 299 (art. 666).

La seconde droite déterminée par l'équation (13), quand g est nulle, donne une infinité de centres de courbure pour la section qui a un rebroussement. Ce résultat en apparence paradoxal peut être assez facilement expliqué. Nous avons vu (art. 442) que toute droite située dans le plan d'une courbe plane et passant à un point de rebroussement peut être considérée comme tangente. On peut de même regarder comme tangent tout cercle tracé dans le plan de la courbe et passant par le point de rebroussement. Si, de plus, un cercle touche la tangente de rebroussement, on pourra le considérer comme ayant avec la courbe trois points communs réunis en un seul.

Cette explication résulte directement de l'examen des circonstances géométriques de la question. Quand le segment SG devient nul (*fig.* 422 *bis*), une infinité de cercles oscu-

lateurs à des sections différentes deviennent tangents entre eux et à la tangente de rebroussement de la section qui passe par le point S.

Dans le cas général, lorsque g n'est pas nulle, l'hyperbole Δ ne donne pour la section qui contient le point S d'autre centre de courbure que ce point lui-même; mais il faut remarquer que nous avons fait disparaître de l'équation (12) le facteur x qui était commun aux deux termes de la fraction, et que cette équation donne en réalité une longueur indéterminée au rayon de courbure de la section dont l'abscisse est nulle. Le lieu complet des centres de courbure des secondes sections principales le long de la génératrice singulière se compose donc de l'hyperbole Δ et de la perpendiculaire au plan de rebroussement menée par le sommet S.

841. *Rayons de courbure d'une surface gauche le long d'une arête.* — Nous allons maintenant supposer que la génératrice singulière est une arête (art. 635). Nous plaçons l'origine en un point quelconque de cette droite, qui sera comme précédemment l'axe des abscisses; le plan tangent à la surface est pris pour plan des xy.

La génératrice infiniment voisine de l'arête est parallèle à cette droite, par suite M'_1 est nulle et P'_1 ne l'est pas. Les conditions exprimées par les égalités (3) deviennent donc

$$(14) \qquad M_1 = 0, \quad N_1 = 0, \quad P_1 = 0, \quad Q_1 = 0, \quad M'_1 = 0, \quad N'_1 = 0, \quad Q'_1 = 0.$$

L'équation (11) donne alors

$$R = \frac{P_1'^2}{N''_1 x + Q''_1};$$

d'où

$$(15) \qquad N''_1 R x + Q''_1 R - P_1'^2 = 0,$$

$$(16) \qquad R x - g R - \frac{P_1'^2}{N''_1} = 0.$$

On voit que l'hyperbole, lieu des centres de courbure des secondes sections principales, est équilatère; l'arête GX est une de ses asymptotes (*fig.* 423 *bis*), son centre se trouve au point d'osculation G qui devient un point central pour les courbures. Enfin, le rayon de courbure de la section principale au point situé à l'infini est nul; on peut facilement vérifier ce résultat, dans le cas du conoïde droit, par un raisonnement analogue à celui de l'article 839.

Quand le point lumineux A est sur l'arête GX, le point O de la courbe d'ombre est le milieu du segment AG, car, le point S étant à l'infini, le rapport de SA à SG est égal à l'unité, et l'équation (8) montre que OA et OG sont égales et de signes contraires.

842. Quand le paramètre d'une arête a une longueur finie, le plan tangent le long de cette génératrice est perpendiculaire à son plan central (art. 677). D'après cela, si nous considérons trois génératrices consécutives dont les deux premières soient parallèles et horizontales, la commune perpendiculaire à la seconde et à la troisième devra être verticale, pour qu'à la limite les trois droites se réunissent de manière à former une arête du genre de celle que nous considérons. La troisième génératrice est donc horizontale comme les deux autres, et par suite nous devons ajouter aux égalités (14) la condition

$$N''_1 = 0;$$

l'équation (15) donne alors

$$R = \frac{P_1'^2}{Q''_1}.$$

On voit que le rayon de courbure de la seconde section principale est constant; d'où il résulte que, *lorsqu'une surface gauche possède une arête ayant un paramètre fini, elle est osculée par un cylindre le long de cette droite.*

843. On peut facilement vérifier, pour le cylindroïde de la *fig.* 298, le théorème que nous venons de démontrer.

Le plan vertical OM coupe la surface suivant une ellipse dont les axes sont respectivement égaux à $\frac{IJ}{\cos MOI}$ et à $\alpha'_1\alpha'$ (art. 650). Le rayon de courbure de cette ellipse au sommet (M, M'), qui appartient à l'arête (aA, a'A'), est donc

$$\frac{\overline{I'\alpha'}^2}{\alpha I}\cos MOI.$$

Cette section est oblique; la section normale qui lui est tangente se trouve dans un plan vertical parallèle à IJ. D'après le théorème de Meusnier, son rayon de courbure déduit du précédent est $\frac{\overline{I'\alpha'}^2}{\alpha I}$. On voit qu'il ne dépend pas de la position du point (M, M') sur l'arête (Aa, A'a'), et que par suite, en tous les points de cette droite, les rayons de courbure des sections faites par des plans verticaux parallèles à IJ sont les mêmes : la surface est donc osculée par un cylindre le long de l'arête.

On trouve, par le théorème d'Euler, que le rayon de courbure de la seconde section principale, en l'un quelconque des points de l'arête considérée, est

$$\frac{\overline{I'\alpha'}^2}{\alpha I}\sin^2\alpha' I' A'.$$

844. *Construction de l'hyperbole lieu des centres de courbure aux divers points d'une génératrice singulière.* — Lorsque l'on connaît sur une génératrice singulière le sommet et le point où la surface est osculée par un plan, il suffit d'obtenir le rayon de courbure de la seconde section principale en un point, pour qu'on puisse construire l'hyperbole Δ lieu des centres de courbure. Or il sera toujours possible de faire cette détermination à l'aide des directrices.

Si l'on considère la génératrice singulière (BD, B'D') (*fig.* 320), nous savons que le sommet est (J, O') et le point d'osculation (S, S'). La directrice circulaire (CD, C'D') est tangente en (D, D') à la seconde section principale; on obtiendra donc immédiatement le rayon de courbure de cette section, par les tracés auxquels conduit le théorème de Meusnier. On pourra ensuite construire l'hyperbole.

Dans le cas d'une arête, il suffit de connaître le point où la surface est osculée par un plan et le rayon de courbure de la seconde section principale en un point. S'il s'agit de l'arête (pq, $p'q'$) (*fig.* 320), le point d'osculation est son intersection (O,O') avec la directrice rectiligne. On obtient d'ailleurs le rayon de courbure de la seconde section principale pour le point (q, q'), par une construction inverse de celle qui est expliquée à l'article 800, en remarquant que la directrice circulaire est la section par un plan normal dont on peut aisément déterminer les angles avec les plans principaux.

Surfaces gauches lieux de normales à une surface.

845. Avant d'étudier les surfaces qui font l'objet de ce paragraphe, nous allons faire connaître une construction très simple, qui nous sera fort utile, pour déterminer le point central et le paramètre de distribution d'une génératrice d'une surface gauche, lorsque les plans tangents à la surface en trois points de cette droite sont donnés [1].

Par le point central A d'une génératrice DX (*fig.* 424 *bis*) et dans un plan quelconque, nous élevons à cette droite une perpendiculaire AA′ égale au paramètre de distribution k; en joignant le point A′ à un point quelconque B de la génératrice, nous aurons

$$\operatorname{tang} AA'B = \frac{AB}{k}.$$

L'angle AA′B est donc égal à celui que le plan tangent en B fait avec le plan central [2]. L'angle BA′C, différence des deux angles AA′C et AA′B, est par conséquent égal à celui que comprennent les plans tangents aux deux points B et C.

Si l'on élève à une génératrice d'une surface gauche et par son point central une perpendiculaire égale au paramètre de distribution, l'angle sous lequel on voit de l'extrémité de cette droite un segment quelconque de la génératrice est égal à l'angle que comprennent les plans tangents à la surface aux deux extrémités du segment.

Quand on connaît les plans tangents en trois points O, B et C, on obtient le point A′ en décrivant sur les longueurs OB et OC des segments capables des angles que forment les plans tangents en B et en C avec le plan tangent en O. La perpendiculaire A′A donne ensuite le paramètre k et le point central A.

846. Nous joignons le point A′ à un point quelconque O de la génératrice, nous traçons la droite A′P perpendiculaire à OA′ et les droites OY, BB′ et CC′ perpendiculaires à OX; le quadrilatère OA′B′B a ses sommets sur un cercle, car les angles opposés A′ et B sont droits. Les angles A′OB′ et AA′B, ayant pour mesure la moitié des segments interceptés dans ce cercle par les parallèles AA′ et BB′, sont égaux; les angles A′OC′ et AA′C sont aussi égaux; par suite, il y a égalité entre les angles B′OC′ et BA′C, sous lesquels on voit des points O et A′ un segment quelconque B′C′ de la droite PQ, et sa projection BC sur la génératrice.

---

(1) Cette construction et son application aux surfaces lieux de normales sont dues à M. Mannheim (voir dans le journal *l'Institut* les séances de la Société philomathique des 2, 23 avril et 7 mai 1864). Nous avons ajouté la détermination du produit des rayons de courbure (art. 847), la construction du paramètre de déviation (art. 851), et diverses considérations peu importantes.

(2) Nous avons déjà établi cette proposition à l'article 626.

Nous dirons que la droite PQ est la *droite auxiliaire* relative au point O pris pour origine, et alors le résultat que nous venons d'obtenir pourra être énoncé comme il suit : *L'angle compris entre les rayons vecteurs de deux points de la droite auxiliaire est égal à l'angle formé par les plans tangents aux points de la génératrice qui sont leurs projections.*

Si l'on connaît les plans tangents en trois points O, B et C de la génératrice OX, on pourra tracer les droites OB′ et OC′ qui comprennent, avec la perpendiculaire OY, des angles B′OY et C′OY égaux à ceux que les plans tangents aux points B et C font avec le plan tangent en O; les points B′ et C′ où elles coupent les parallèles à OY menés par les points B et C appartiennent à la droite PQ et permettent de la tracer. Les droites OA′ et A′A, respectivement perpendiculaires à PQ et OX, font ensuite trouver le paramètre et le point central.

847. On a

$$\mathrm{OQ} = \frac{\mathrm{OA'}}{\cos \mathrm{QOA'}} = \frac{\mathrm{AA'}}{\cos^2 \mathrm{QOA'}}.$$

En rapprochant cette expression de l'équation (25) de l'article **826**, et remarquant que AA′ est le paramètre k et QOA′ l'angle du plan tangent en O et du plan central, on voit que *la longueur* OQ, *ordonnée à l'origine de la droite auxiliaire, est moyenne proportionnelle entre les grandeurs absolues des rayons de courbure principaux de la surface au point* O.

Si l'origine se meut sur la génératrice OX, la droite auxiliaire PQ tourne autour du point A′ en restant perpendiculaire au rayon vecteur de ce point. Lorsque l'origine est au point B, c'est-à-dire lorsque l'on mesure les angles des plans tangents à partir du plan tangent en B, la droite auxiliaire est la perpendiculaire AB'_1 à BA′; l'ordonnée BB'_1 est donc moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure principaux au point B.

848. La considération de la droite auxiliaire facilite la discussion des circonstances que présente une surface gauche aux différents points d'une génératrice. On peut, par son aide, rendre plus sensibles les résultats que nous avons obtenus à l'article **677** pour les génératrices singulières; mais nous ne devons pas nous arrêter à ces détails, et nous allons appliquer les propositions qui précèdent à l'étude des surfaces auxquelles ce paragraphe est spécialement consacré.

849. On a souvent à considérer en Stéréotomie des surfaces gauches lieux de normales à une surface directrice Σ aux différents points d'une courbe Δ tracée sur elle.

Soient O un point de la courbe Δ (*fig.* 354 *bis*), OZ la normale en O à la surface Σ; OX et OY deux droites respectivement tangentes en O aux sections principales; C_1 et C_2 les centres de courbure en O de ces sections. Nous désignerons par R_1 et R_2 les rayons OC_1 et OC_2, et par φ l'azimut TOX de la tangente OT à la

directrice Δ au point O; enfin nous supposerons que le plan XOY est horizontal.

La normale à la surface Σ au point de Δ infiniment voisin de O rencontre les axes de déviation $C_1 y$ et $C_2 x$ respectivement perpendiculaires aux plans ZOX et ZOY (art. **814**); ces deux droites sont donc tangentes à la surface des normales, et par suite les points où les plans ZOX et ZOY, qui contiennent la normale OZ, touchent cette surface sont C_2 et C_1. Nous savons d'ailleurs que le plan ZOT est tangent en O à la surface des normales; nous connaissons donc les plans tangents à la surface en trois points O, C_1 et C_2 de la génératrice OZ, et par suite nous pouvons déterminer son point central et son paramètre. Adoptant la construction de l'article **846**, nous traçons, dans le plan ZOX, les droites ON_2 et ON_1 faisant avec OX des angles égaux à φ et à $(90^\circ + \varphi)$, et nous les arrêtons aux horizontales des points C_2 et C_1 : la droite $N_1 N_2$ est la droite auxiliaire relative au point O pour la génératrice OZ de la surface gauche considérée. En abaissant les droites OA′ et A′A respectivement perpendiculaires sur $N_1 N_2$ et sur OZ, nous obtenons le point central A et le paramètre AA′ (1).

Eu égard au sens dans lequel le plan tangent tourne quand le point de contact se transporte de C_2 en O, le paramètre AA′ est positif (art. **623**). Il serait négatif si le point A′ était de l'autre côté de la verticale OZ.

850. Nous avons identiquement

$$\text{surf.}\, N_2 O N_1 = \text{surf.}\, N_2 O C + \text{surf.}\, N_1 O C,$$

ou bien

$$ON_2 \times ON_1 = ON_2 \times OC \cos\varphi + ON_1 \times OC \sin\varphi.$$

Mais on trouve immédiatement

$$ON_2 = \frac{R_2}{\sin\varphi}, \quad ON_1 = \frac{R_1}{\cos\varphi}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation précédente, on obtient

$$\frac{R_1 R_2}{\sin\varphi \cos\varphi} = OC \times R_2 \cot\varphi + OC \times R_1 \operatorname{tang}\varphi,$$

ou bien

$$\frac{1}{OC} = \frac{1}{R_1} \cos^2\varphi + \frac{1}{R_2} \sin^2\varphi.$$

OC est donc le rayon de courbure de la section faite dans la surface Σ par le plan normal ZOT. Ce plan, qui est tangent en O à la surface des normales, doit lui être normal en C, car l'angle OA′C est droit (art. **845**).

Le centre de courbure de la section normale tangente à la directrice Δ est le point où le plan de cette section coupe normalement la surface gauche.

---

(1) La *fig.* 354 *bis* est une perspective cavalière; le plan ZOX est de front, et par suite les constructions faites sur ce plan sont géométrales.

851. En opérant comme à l'article précédent, on trouve

$$\text{surf.}\,N_2ON_1 = \text{surf.}\,N_1OQ - \text{surf.}\,N_2OQ,$$

$$ON_2 \times ON_1 = ON_1 \times OQ\cos\varphi - ON_2 \times OQ\sin\varphi,$$

$$\frac{R_1R_2}{\sin\varphi\cos\varphi} = R_1 \times OQ - R_2 \times OQ,$$

$$\frac{1}{OQ} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin 2\varphi.$$

En rapprochant ce résultat de l'équation (20 *bis*) de l'article **812**, on reconnaît que la longueur OQ est égale au paramètre de déviation relatif à l'angle φ; mais, d'après l'article **847**, cette longueur est moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure de la surface gauche au point O; nous voyons donc que *la grandeur absolue du produit des rayons de courbure de la surface des normales, en un point de son intersection avec la surface directrice, est égale au carré du paramètre de déviation qui correspond à l'azimut de cette courbe* (¹).

852. Le plan central de la génératrice OZ et le plan ZOX sont tangents l'un en A, l'autre en C_2 à la surface des normales : l'angle aigu qu'ils comprennent est donc égal à N_2OA' (art. **846**). Nous avons immédiatement

$$\text{tang}\,N_2OA' = \frac{A'N_2}{OA'}, \quad \text{tang}\,QOA' = \frac{A'Q}{OA'}.$$

On déduit de ces équations

$$\text{tang}\,N_2OQ = \frac{N_2Q \times OA'}{\overline{OA'}^2 + A'N_2 \times A'Q};$$

$$\text{tang}\,N_2OQ\,\text{tang}\,N_2OA' = \frac{N_2Q \times A'N_2}{A'N_1 \times A'N_2 + A'N_2 \times A'Q}.$$

$$\text{tang}\,N_2OQ\,\text{tang}\,N_2OA' = \frac{N_2Q}{N_1Q}.$$

La droite ON_2 qui correspond au plan ZOX est l'origine commune des angles N_2OQ et N_2OA'; ces angles sont par suite de signes contraires. Le second membre de l'équation est égal à la quantité $\frac{R_2}{R_1}$ qui, dans la disposition adoptée sur la figure, est positive; nous avons donc

$$\text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,N_2OA' = -\frac{R_2}{R_1}.$$

(¹) Le paramètre de déviation n'est autre que le rayon de seconde courbure de Δ lorsque cette courbe est une ligne géodésique de Σ. (Le rayon de seconde courbure d'une courbe gauche est le rappor d'un arc infiniment petit de cette courbe, à l'angle que font entre eux les plans osculateurs aux extrémités de cet arc.) (MANNHEIM.)

Nous voyons que les azimuts φ et N_2OA', qui sont mesurés à partir du plan principal ZOX, correspondent à deux diamètres conjugués de l'indicatrice de la surface Σ.

La tangente à la trace de la surface des normales et la trace du plan central d'une de ses génératrices, sur le plan tangent à la surface directrice, sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice de cette dernière [1].

Si l'on veut éviter de considérer des angles négatifs, il faut prendre pour azimut de la direction conjuguée à OT le supplément de N_2OA'.

853. La construction expliquée à l'article **849** nous a fait trouver le rayon de courbure OC d'une section normale, la longueur OQ du paramètre de déviation et l'azimut N_2OA' de la droite conjuguée à la tangente OT. Cette construction a donc, en dehors de la considération des surfaces normales, une importance réelle dans les problèmes d'application relatifs à la courbure des surfaces, lorsque l'on connaît les plans et les rayons de courbure des sections principales.

Si l'on mesure les abscisses positives de O vers Q, le paramètre de déviation sera de signe contraire à l'abscisse OQ.

Si l'on fait les tracés sur le plan tangent, pour la construction de l'azimut N_2OA', il faudra mener la droite ON_2 dans la direction OX, la droite OQ sera la tangente OT, et la droite OA' se trouvera dans la direction conjuguée à OT.

854. Les plans ZOX et ZOY (*fig.* 354 *bis*) étant rectangulaires, l'angle sous lequel on voit du point A' le segment de la normale compris entre leurs points de contact C_1 et C_2 est droit (art. **845**). Il résulte de là que si l'azimut φ de la courbe Δ passe par toutes les grandeurs possibles, le lieu des positions du point A' sera le cercle décrit sur le segment C_1C_2 comme diamètre. Le point central A est toujours compris entre les points C_1 et C_2; il atteint l'une ou l'autre de ces positions extrêmes, quand la tangente OT est confondue avec OX ou avec OY; le paramètre est alors nul, OZ est une génératrice singulière de la surface gauche, et un sommet se trouve au point C_1 ou au point C_2.

A deux valeurs de φ égales et de signes contraires correspondent un même point central et deux paramètres égaux et de signes contraires. Les valeurs limites du paramètre sont les rayons GG' et GG'_1 (*fig.* 353 *bis*), ou $\pm \frac{R_1 - R_2}{2}$.

Pour avoir la grandeur de l'azimut lorsque le paramètre est GG', il suffit de faire en ordre inverse les constructions expliquées à l'article **849**. Nous traçons le rayon vecteur OG', sa perpendiculaire $IG'N_2$ et la droite ON_2 : l'angle N_2OX est égal à φ. L'équation que nous avons obtenue à l'article précédent devient

$$\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang} N_2OG' = -\frac{R_2}{R_1};$$

[1] Ce théorème a déjà été donné par plusieurs géomètres.

mais la droite OG′ est la bissectrice de l'angle droit $N_1 O N_2$; nous avons donc

$$\tang\varphi = \pm \frac{R_2}{R_1}.$$

Nous mettons le double signe, parce que nous considérons les deux surfaces qui ont pour paramètres GG′ et GG'_1.

On peut concevoir, sur une surface, des courbes directrices pour lesquelles, en chaque point, la valeur de k soit un maximum en grandeur absolue. Ces lignes sont toujours réelles; elles forment deux séries : l'une correspond aux valeurs positives de k, l'autre aux valeurs négatives.

855. D'après ce que nous avons vu à l'article **847**, la longueur C_1E_1 est moyenne proportionnelle entre les rayons de courbure principaux au point C_1 (*fig.* 354 *bis*); il en est de même du segment C_2E_2 pour les rayons correspondant au point C_2. On trouve d'ailleurs

$$C_1E_1 = \frac{AA' \times C_2C_1}{C_2A}, \quad C_2E_2 = \frac{AA' \times C_2C_1}{C_1A};$$

donc

$$C_1E_1 \times C_2E_2 = \overline{C_2C_1}^2 = (R_1 - R_2)^2.$$

Le produit des rayons de courbure principaux de la surface gauche aux points C_1 *et* C_2 *est indépendant de l'angle* φ *et égal à la quatrième puissance de la différence des rayons principaux de la surface directrice.*

856. Lorsque les rayons R_1 et R_2 sont de signes contraires, les points C_1 et C_2 sont situés de part et d'autre du point O. Si, alors, la courbe Δ devient tangente à une asymptote de l'indicatrice, le rayon de courbure OC est infini, la droite N_1N_2 est parallèle à OZ (*fig.* 338 *bis*), et par suite le point A′ est sur OX, et le point central en O.

Quand la directrice Δ *est tangente à une asymptote de l'indicatrice, le point central de la génératrice normale est son intersection avec la surface* Σ. *Si* Δ *est une ligne asymptotique de* Σ, *c'est aussi la ligne de striction de la surface gauche lieu des normales.*

Le segment OA′ est moyen proportionnel d'une part entre les rayons principaux de la surface gauche au point O (art. **847**), de l'autre entre les rayons OC_1 et OC_2 : donc *le produit des rayons de courbure est le même au point* O, *pour la surface gauche normale et pour la surface directrice,. dans le cas qui nous occupe*. On peut déduire ce théorème de celui de l'article **851**.

857. A l'aide de la *fig.* 354 *bis*, on peut établir de nombreuses équations entre l'azimut φ, le rayon de courbure R de la section normale qui lui correspond dans la surface Σ, le paramètre de déviation K, le paramètre k de la généra-

trice OZ, l'ordonnée OA de son point central, et le produit des rayons de courbure principaux en un point donné de cette droite [1]. Nous ne nous arrêterons pas à ces détails, et nous nous bornerons à appeler l'attention sur deux cas qui présentent quelque intérêt.

Quand le point O est un ombilic, le cercle C_1C_2 se réduit à un point, le paramètre k est toujours nul, l'ordonnée du point central est constante et égale au rayon de la sphère osculatrice.

Lorsque le rayon R_2 est infini, la droite N_2C_2 s'éloigne à l'infini, le cercle C_1C_2 se confond avec la droite C_1N_1, le point A′ se place en N_1, et la droite auxiliaire est parallèle à ON_2. On a alors

$$k = R_1 \operatorname{tang}\varphi.$$

L'ordonnée du point central est constante et égale à R_1. Ces circonstances se présentent toujours lorsque Σ est une surface développable.

858. Quand on veut étudier les relations qui existent entre deux surfaces gauches lieux de normales à une même surface, aux différents points de deux courbes issues d'un même point, il faut établir simultanément sur la figure les deux droites auxiliaires qui correspondent aux azimuts de ces directrices.

L'azimut φ d'une directrice Δ étant XON_2 (*fig.* 338), la droite auxiliaire sera N_1N_2. Nous projetons les points N_1 et N_2 en M_2 et M_1, et nous traçons M_1M_2, OM_1 et OM_2. On a immédiatement

$$\operatorname{tang}XOM_2 = -\cot ZOM_2 = -\frac{OC_2}{C_2M_2} = -\frac{OC_2}{C_1N_1} = -\frac{R_2}{R_1\operatorname{tang}\varphi};$$

$$\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}XOM_2 = -\frac{R_2}{R_1}.$$

L'angle XOM_2 qui détermine le point M_2 est donc celui de la direction conjuguée à φ dans l'indicatrice, et, comme le même raisonnement peut être appliqué aux angles XON_1 et XOM_1 [2], nous voyons que les droites N_1N_2 et M_1M_2 sont les droites auxiliaires pour les surfaces gauches qui correspondent à deux directrices dont les tangentes en O sont conjuguées.

La normale OZ fait des angles égaux avec les droites M_1M_2 et N_1N_2, et par suite avec leurs perpendiculaires OA′ et OB′. Il résulte de là que les segments OB′ et OB'_1 sont égaux.

---

[1] Plusieurs des formules que l'on peut obtenir ainsi ont été données par Joachimstal (*Journal de M. Liouville*, 1848), ou par M. Lamarle (*Exposé géométrique*), qui les ont trouvées par d'autres procédés.

[2] Cette observation nous dispense de prouver que l'angle M_1OM_2, est droit, ce qui du reste est facile.

G étant le centre du cercle, on trouve

$$OA' + OB'_1 = 2\,OG\cos ZOA'; \quad OA' \times OB'_1 = OC_1 \times OC_2.$$

En divisant la première de ces équations par la seconde, on a

$$\frac{1}{OB'_1} + \frac{1}{OA'} = 2\,\frac{OG\cos ZOA'}{OC_1 \times OC_2};$$

on obtient ensuite

$$\frac{1}{OB} + \frac{1}{OA} = 2\,\frac{OG}{OC_1 \times OC_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

La somme des inverses des ordonnées du point central de la génératrice pour deux directions conjuguées de la directrice Δ *est constante, et égale à la somme des courbures principales.*

Ce théorème est dû à Joachimstal. Nous ne l'avons donné que comme exemple de l'emploi simultané de deux droites auxiliaires.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS DIVERSES.

Construction des rayons de courbure et des plans osculateurs d'une courbe donnée par ses projections.

859. *Cas où la tangente à la courbe au point considéré est parallèle à la ligne de terre.* — Soient ω et ω' les projections de la courbe (*fig.* 341); (O, O') un point de cette ligne où la tangente est parallèle à la ligne de terre XY; A et B les centres de courbure des projections ω et ω'.

Nous prenons un second plan vertical xy perpendiculaire à XY, et nous y plaçons la projection o du point (O, O').

Les sections faites dans les cylindres projetants par les plans normaux contenant la tangente à la courbe au point (O, O') sont identiques à ω et ω'; leurs centres de courbure sont a et b sur le plan xy.

D'après le théorème de Meusnier, le centre de courbure de la courbe en (O, O') est la projection, sur son plan osculateur, de chacun des points a et b; la droite ab est donc une projetante sur ce plan, et par suite, en lui abaissant une perpendiculaire du point o, on obtient la trace oN du plan osculateur. Le point c, projection des points a et b, est le centre de courbure de (ω, ω'). La longueur du rayon de courbure est oc.

860. *Cas où la tangente à la courbe au point considéré* (O, O′) *est parallèle à l'un des deux plans de projection seulement,* celui qui est horizontal, par exemple. Nous déterminons les centres de courbure A et B des projections ω et ω′ (*fig.* 342); nous prenons un second plan vertical xy perpendiculaire à la tangente à la courbe gauche au point (O, O′), nous y plaçons la projection o de ce point, et le centre de courbure a de la section faite dans le cylindre vertical ω par un plan normal à cette surface et tangent à la courbe. Au point (O, O′), le plan vertical OV est normal au cylindre projetant ω′; lorsque nous aurons déterminé le rayon de courbure de la section qu'il contient, le problème sera ramené à celui que nous avons résolu à l'article précédent.

Les deux sections principales du cylindre horizontal au point (O, O′) sont la génératrice et la section droite contenue dans le plan OX_1 (art. **801**). Le rayon de courbure de la première est infini, celui de la seconde est O′B. Nous trouvons la longueur OB_3 du rayon de courbure de la section contenue dans le plan OV, par la construction expliquée à la fin de l'article **800**; nous portons la longueur OB_3 en eb_3, et nous achevons les tracés sans difficulté.

861. *Cas général.* — Lorsque la tangente à la courbe au point considéré (O, O′) (*fig.* 343) a une position quelconque par rapport au plan de projection, il faut d'abord déterminer les rayons de courbure des sections faites dans les cylindres projetants, par des plans normaux contenant la tangente (OM, O′M′).

Nous rabattons sur le plan horizontal le plan (MM′, M′O′) qui touche le cylindre horizontal au point (O, O′); ce point se place en O_1, et par suite les tangentes à la section droite et à la courbe (ω, ω′) sont rabattues sur les droites O_1G et O_1M. En prenant une longueur O_1B_1 égale au rayon de courbure O′B de ω′, et traçant les droites B_1B_2 et B_2B_3 respectivement perpendiculaires à O_1M et à O_1G, nous obtenons le rayon de courbure O_1B_3 de la section normale tangente à la courbe (ω, ω′).

Le plan tangent au cylindre vertical étant rabattu autour de sa trace OM, le point (O, O′) se place en un point O_2 facile à déterminer, et les rabattements des tangentes à la section droite et à la courbe (ω, ω′) sont la droite O_2k, parallèle à MO, et la droite O_2M. Nous connaissons d'ailleurs le rayon de courbure OA de la section droite, nous pouvons donc déterminer la longueur O_2A_3 du rayon de courbure de la section normale tangente à la courbe (ω, ω′).

Faisons maintenant passer par le point (O, O′) un plan perpendiculaire à la tangente (OM, O′M′), et rabattons-le sur le plan horizontal. La trace horizontale de ce plan est une droite xy parallèle à OA, et passant au point P déterminé par la droite O_2P perpendiculaire au rabattement MO_2 de la tangente. Dans le rabattement du plan, le point (O, O′) se place en o à une distance de P égale à PO_2.

Les normales aux deux cylindres sont dans ce plan : l'une (OQ, O′Q′) a sa trace horizontale au point Q, et est rabattue sur la droite Qo; l'autre étant hori-

zontale, son rabattement est la droite oa_3 parallèle à xy. Nous portons sur ces normales des longueurs ob_3 et oa_3 respectivement égales aux rayons de courbure O_1B_3 et O_2A_3, et nous achevons la construction comme précédemment. Le rayon de courbure de la courbe (ω, ω') au point (O, O') est égal à oc; la trace horizontale du plan osculateur passe par les points N et M (1).

862. *Considérations générales.* — Nous avons exposé en détail la construction à laquelle les théorèmes d'Euler et de Meusnier conduisent pour la détermination du plan osculateur en un point d'une courbe donnée par ses projections. On doit recourir à cette solution quand on peut déterminer d'une manière précise les rayons de courbure des projections. Dans le cas contraire, il convient de préférer les tracés que nous avons fait connaître à l'article **448**.

On obtient, par des procédés analogues, le rayon de courbure et le plan osculateur en un point donné de la courbe d'intersection de deux surfaces quelconques, lorsque l'on connaît leurs sections principales en ce point, et leurs rayons de courbure; mais la construction du rayon de chaque section normale tangente à l'intersection exige des constructions plus laborieuses.

863. Quand la projection ω' est une droite (*fig.* 343), le cylindre horizontal est un plan; le rayon ob_3 devient par suite infini, et la droite a_3b_3 est parallèle à oQ. Si, de plus, on suppose que la projection ω soit un cercle, la construction donnera le rayon de courbure d'une ellipse en un point quelconque. En traduisant analytiquement les tracés, on obtient une expression du rayon de courbure applicable à l'hyperbole comme à l'ellipse. Nous ne nous arrêterons pas à cette question; nous remarquerons seulement qu'aux extrémités du grand axe, l'ellipse est tangente à une section droite du cylindre, et que par suite le théorème de Meusnier donne immédiatement pour le rayon de courbure l'expression que nous avons trouvée à l'article **779**. Aux extrémités du petit axe, le plan de l'ellipse est normal au cylindre, et l'on obtient directement le rayon de courbure par le théorème d'Euler.

---

(1) Appelons r et r' les rayons de courbure en o et en o' des sections droites ω et ω'; R et R' ceux des sections normales tangentes; ρ le rayon de courbure cherché; α et α', β et β' les angles que forment avec les plans de projection le plan osculateur et la tangente OM en O à la courbe; $\gamma = coa_3$ et $\gamma' = cob_3$ les angles du plan osculateur et des sections normales tangentes; $\theta = a_3ob_3$ l'angle des normales OP et OQ en O aux cylindres projetant la courbe.

Le triangle a_3ob_3 donne l'équation $\rho\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\theta} = RR'\sin\theta$, qui, en vertu des relations $r = R\cos^2\beta$, $r' = R'\cos^2\beta'$, fournit la valeur de ρ en fonction de r, r', β, β', θ.

Comme $\rho = R\cos\gamma$, et comme le trièdre formé par le plan osculateur, le plan MOP et le plan horizontal passant par O, donne $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$, on a, pour trouver α, $\rho\cos^3\beta = r\cos\alpha$. On obtient α' au moyen d'une équation analogue.

Enfin, la dernière égalité peut servir à trouver les rayons de courbure d'une courbe plane, connaissant une projection de cette courbe, l'angle que son plan fait avec le plan de projection, et les angles que ses tangentes forment avec ce plan. (E. L.).

Construction des sommets d'une surface d'égale pente.

864. Nous savons que la projection de l'un des sommets d'une surface d'égale pente sur un plan horizontal quelconque est le centre de courbure de la section de la surface par ce plan pour le point correspondant (art. **549**). On peut, par conséquent, déterminer un sommet, quand on connaît la génératrice qui y passe et le rayon de courbure de la directrice horizontale au point correspondant.

Considérons la surface d'égale pente représentée sur les *fig.* 274 et 275, et proposons-nous de déterminer la position précise des sommets qui doivent se trouver sur les génératrices (BC, B'C') et (BD, B'D').

Nous pouvons déterminer sur A'B' le centre de courbure de l'ellipse directrice (AB, A'B') pour le point B', et élevant en ce point une perpendiculaire ΓΓ' à A'B', nous avons une droite sur laquelle sont les centres de courbure des sections normales faites dans les deux nappes de la développable, par un plan contenant la tangente à l'ellipse (AB, A'B') au point (B, B') (art. **859**).

La génératrice (BD, B'D') est, sur la nappe à laquelle elle appartient, une section principale pour le point B'. Le plan de la seconde section principale est perpendiculaire à la droite B'D', et par suite sa trace verticale est la droite B'Γ perpendiculaire à B'D'. Le point Γ où elle rencontre la droite ΓΓ' est donc le centre de courbure de la seconde section principale. La projection du point Γ sur le plan horizontal du point B' serait la projection du sommet cherché J' sur le même plan, et en conséquence les points Γ et J' sont sur une verticale. De même, si l'on trace B'Γ' perpendiculaire à B'C', la verticale du point Γ' passera par le sommet *j'*.

Pour la construction que nous venons d'exposer, il a suffi d'appliquer le théorème de Meusnier, parce que la tangente à la directrice au point B' est horizontale, et que par suite cette courbe est tangente à la section principale et à la section horizontale. Quand la tangente à la directrice au point où elle est rencontrée par la génératrice qui passe au sommet n'est pas horizontale, on doit appliquer successivement les théorèmes d'Euler et de Meusnier, et par suite la construction est plus compliquée.

Détermination des tangentes à la courbe d'intersection de deux surfaces qui se touchent.

865. Supposons que deux surfaces A et B se touchent en un point O; considérons deux surfaces du second degré A' et B' qui leur soient respectivement osculatrices en ce point, et qui aient leur centre en un même point de la normale; enfin, appelons α et β (*fig.* 344) les sections de ces surfaces par le plan diamé-

tral parallèle au plan tangent en O : les coniques concentriques α et β se coupent généralement en quatre points E, G, F et H.

Les surfaces A′ et B′ sont tangentes au point O, et à un autre point diamétralement opposé; leur intersection se compose donc de deux courbes planes auxquelles les points E, G, F et H appartiennent deux à deux (art. **252**). Les traces des plans de ces lignes sur le plan des coniques α et β sont les droites EF et GH.

Le plan passant par le point O et par la droite diamétrale VV_1 coupe les surfaces A et B suivant des lignes dont les rayons de courbure sont proportionnels aux carrés des rayons vecteurs CL et CK; la section faite dans la surface A touche donc extérieurement la section de la surface B. Le contraire a lieu pour les sections par le plan vv_1. Enfin, celles qui se trouvent contenues dans le plan EF sont osculatrices; ces surfaces ont donc dans le plan EF un point commun infiniment voisin de leur point de contact O, et par suite elles se coupent suivant une ligne dont la tangente au point O est parallèle à EF. On trouve, par des raisonnements analogues, que leur intersection a une seconde branche dont la tangente est parallèle à GH.

Si l'on suppose que les coniques α et β soient transportées parallèlement à elles-mêmes, de manière que leur centre C arrive au point de contact O, elles seront des indicatrices correspondant à une même valeur de la constante arbitraire c (art. **794** et **795**), et les deux branches de la courbe d'intersection auront pour tangentes les diamètres communs EF et GH (1).

Quand les indicatrices α et β se coupent en deux points seulement, ce qui arrive lorsque ce sont des hyperboles ayant leurs asymptotes croisées (art. **502**), l'intersection n'a qu'une branche dont la concavité soit tournée vers le point pris pour centre des surfaces osculatrices; mais, si l'on place le centre de ces surfaces de l'autre côté du plan tangent, on trouve pour les courbes α et β deux hyperboles supplémentaires des premières, et qui déterminent par leurs points de rencontre la tangente à une seconde branche de l'intersection ayant sa concavité tournée vers le centre des nouvelles surfaces.

Dans le cas où les indicatrices se touchent, le diamètre passant par leurs points de contact est tangent à des sections normales surosculatrices; les surfaces, d'ailleurs, ne se coupent pas. Enfin, si les indicatrices ne se rencontrent pas, les surfaces n'ont en commun que leur point de contact O.

Quand la surface B est un plan, son indicatrice β correspondant à une valeur finie du paramètre c a des axes infinis, et par suite tous ses points sont à l'infini. Les diamètres communs aux courbes α et β sont alors les asymptotes de α; ces droites sont donc tangentes aux deux branches de la courbe d'intersection, ce qui est conforme aux résultats de l'article **797**.

---

(1) Cette construction a été donnée par Th. Olivier (*Journal de l'École Polytechnique*, XXIe Cahier.)

866. *Épure du conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde.* — Nous allons appliquer la construction que nous venons d'exposer à la détermination des tangentes au point double de la courbe d'intersection du tore et du conoïde droit représentés sur la *fig.* 301. Nous renvoyons à l'article **671** pour la génération de ces surfaces.

Les normales du conoïde en tous les points de la génératrice OV sont dans un même plan; cette droite est donc une section principale en chacun de ses points. La seconde section principale pour le point double V est dans le plan vertical AB.

Si nous appelons R_1 le rayon de courbure de l'ellipse A′B′ au point V′, lorsque cette courbe sera enroulée sur le cylindre vertical *ab*, son rayon de courbure en V sera $R_1 \cos\sigma$ (art. **474** et **819**), σ étant l'angle de son plan osculateur avec le plan AB. Pour avoir le rayon de courbure en V de la section principale AB, il faut, d'après le théorème de Meusnier, diviser le rayon de l'ellipse enroulée par $\cos\sigma$: on trouve le rayon R_1.

L'indicatrice se compose de deux droites parallèles à la section principale OV qui a un rayon infini (art. **800**), et si l'on appelle a leur distance au point V, on aura

$$a^2 = R_1 c, \quad \text{ou} \quad a^2 = \frac{\overline{V''B'}^2}{V''V'}\, c.$$

L'une des sections principales du tore pour le point V est la méridienne contenue dans le plan OV; son rayon est $\frac{\overline{P\varphi}^2}{\varphi\varphi'}$; l'autre section principale est contenue dans le plan AB et a un rayon infini (art. **821**). L'indicatrice se compose donc de deux droites parallèles à AB. En appelant b la distance de chacune d'elles au point V, on a

$$b^2 = \frac{\overline{P\varphi}^2}{\varphi\varphi'}\, c.$$

La longueur c est arbitraire, mais elle doit être la même pour les deux indicatrices. Si nous la faisons égale à la hauteur du point V au-dessus du plan horizontal, les expressions ci-dessus deviendront

$$a = V''B', \quad b = P\varphi.$$

On peut donc prendre simultanément pour indicatrices du conoïde et du tore au point V les droites AA′ et BB′ d'une part, et de l'autre la droite Uu et une autre droite parallèle à celle-ci et également distante du point V. On voit que la tangente en V à la branche EF passe par le point de rencontre u; on déterminerait de la même manière la tangente à l'autre branche.

867. *Cas où les surfaces tangentes sont des cônes ou des cylindres.* — Quand les deux surfaces tangentes sont des cônes ou des cylindres, chaque indicatrice est composée de deux lignes droites, comme dans le cas que nous venons d'examiner, et l'on peut déterminer facilement les tangentes à l'intersection au point double, lorsque l'on connaît, pour chaque surface, le rayon de la section faite par un plan perpendiculaire à la génératrice.

Il faut remarquer que toutes les fois que deux surfaces se touchent, les deux branches de leur intersection sont tangentes aux courbes suivant lesquelles se coupent deux surfaces qui leur sont respectivement osculatrices. Si nous avons choisi deux surfaces du second ordre ayant leur centre en un même point de la normale commune, c'est parce que leur intersection se compose de deux lignes planes, mais dans quelques circonstances on peut préférer d'autres dispositions.

On a souvent, pour des questions d'ombre, à considérer deux cônes ayant une directrice commune : leur intersection comprend une seconde courbe qui croise la directrice en des points où les surfaces se touchent ; on détermine ces points en menant à un des cônes des plans tangents par le sommet de l'autre. Quand la directrice est une conique, les surfaces sont du second ordre et leur deuxième intersection est plane comme la première (art. **252**).

Dans le cas général, en remplaçant la directrice par son cercle osculateur au point de contact considéré, on obtient deux cônes du second ordre osculateurs des premiers et dont la deuxième ligne d'intersection est plane ; la trace de son plan sur le plan tangent commun est la tangente à la ligne suivant laquelle les cônes primitifs se coupent.

868. *Intersection d'un tore par une sphère tangente.* — Nous savons construire les asymptotes de l'indicatrice d'une surface de révolution pour un point donné (art. **822**), et par suite nous pouvons déterminer les tangentes au point double de l'intersection d'une telle surface par un plan qui la touche. Nous allons résoudre le problème dans un cas plus compliqué, celui où les surfaces tangentes sont un tore et une sphère.

Nous nous donnons l'axe (A, A'Z) du tore (*fig.* 346), le méridien MNR de cette surface et le centre (C, C') de la sphère. Nous faisons tourner le plan méridien AC de manière à le rendre parallèle au plan vertical ; le point (C, C') se place en (C_1, C'_1). Joignant ensuite le point C'_1 au centre E du cercle MNR, nous prenons le segment $C'_1 O'_1$ pour rayon de la sphère. Lorsque l'on ramène le centre (C_1, C'_1) en (C, C'), le point de contact (O_1, O'_1) vient en (O, O').

En prolongeant la droite C'_1E jusqu'à sa seconde rencontre avec le cercle MNR, on aurait le rayon d'une autre sphère tangente au tore ; enfin on obtiendrait deux autres sphères également tangentes et ayant leur centre au point (C, C'), en considérant le second cercle méridien contenu dans le plan XY.

Nous supposons que la sphère est enlevée, et nous représentons seulement le tore avec l'entaille qu'il doit avoir pour la recevoir.

On construit l'intersection des deux surfaces en les coupant par des plans horizontaux. Nous avons indiqué sur le plan vertical un arc $P'O'\gamma'\varepsilon'$ de l'ellipse, projection du grand cercle de la sphère situé dans le plan vertical OAC. Cet arc passe par les points γ' et ε' de l'intersection où la tangente est horizontale. On détermine ces points en ramenant le centre de la sphère en (C_1, C'_1), prenant les intersections γ'_1 et ε'_1 du grand cercle qui forme alors le contour apparent de la sphère avec le méridien du tore, et les reportant dans le plan OAC.

Le contour apparent de la sphère sur le plan vertical est le cercle GH contenu dans le plan CDL. L'arc (DL, D'L') est seul utile; nous l'avons indiqué par une ligne en points ronds, parce qu'il est virtuel (art. **335**).

869. Dans la construction des tangentes au point double, nous supposerons d'abord que le centre (C, C') a été amené en (C_1, C'_1) et le point de contact en (O_1, O'_1).

Nous plaçons le centre commun des surfaces osculatrices au point (C_1, C'_1); les indicatrices du point de contact sont alors, pour la sphère, un grand cercle de cette surface, pour le tore une conique dont les demi-axes ont les longueurs

$$\sqrt{O'_1C'_1 \times O'_1E}, \quad \sqrt{O'_1C'_1 \times O'_1F}.$$

Le premier axe est tangent au méridien et le second au parallèle.

Si nous faisons tourner le plan tangent $O'_1\rho'$ autour de la tangente au parallèle jusqu'à le rendre horizontal, les indicatrices se projetteront horizontalement en vraie grandeur. Leur centre est au point O_1; celle de la sphère est le cercle dont le rayon a une longueur O_1B égale à $C'_1O'_1$; l'autre est une hyperbole, car les segments O'_1E et O'_1F ont des signes différents. En construisant les longueurs des axes (opération très facile que nous n'avons pas conservée sur la figure), on peut placer les sommets λ et λ_1, et tracer les asymptotes $O_1\mu$ et $O_1\mu_1$.

Les indicatrices se rencontrent aux points (ν, ν') et ν_1, ν') qui, lorsqu'on remet le plan tangent dans sa position $O'_1\rho'$, deviennent (ρ, ρ') et (ρ_1, ρ'). Enfin, le mouvement qui ramène le centre de la sphère en (C, C') transporte le point σ en τ, et les points (ρ, ρ') et (ρ_1, ρ') en (π, π') et (π_1, π'_1). Les tangentes cherchées sont $(\pi O, \pi'O')$ et $(\pi_1 O, \pi'_1 O')$.

870. *Digression sur les sections circulaires du tore.* — Si la sphère et le tore étaient bitangents, l'intersection aurait deux points doubles et présenterait des particularités remarquables. Avant d'examiner ce cas, nous allons étudier la courbe d'intersection d'un tore par un plan doublement tangent.

Le plan sécant étant supposé perpendiculaire au plan vertical, sa trace verticale sera une droite H'G' tangente en E' et en F' à la méridienne complète (*fig.* 347).

On peut construire l'intersection par la méthode de l'article **192** : un plan horizontal auxiliaire xy fait trouver quatre points qui se projettent verticalement en M', et dont les projections horizontales sont M, M_1, m et m_1.

Pour avoir l'intersection dans sa vraie grandeur, nous rabattons le plan sécant sur le plan vertical OX, en le faisant tourner autour de sa trace H'G'. Le point (M, M') se place en M'' sur la perpendiculaire élevée en M' à H'G', et à une distance de O' égale à O'N', parce que tous les points d'un parallèle sont également éloignés du centre du tore.

Nous traçons le rayon I'N', puis les droites $O'e$, $O'k$ et $E'k$ respectivement perpendiculaires à I'N', E'F' et O'Z; enfin nous tirons $M''k$.

Les triangles semblables $I'N'\nu$ et $I'O'e$ d'une part, $O'M'\mu$ et O'I'F' de l'autre, donnent

$$\frac{I'N'}{I'O'} = \frac{N'\nu}{O'e}, \quad \frac{I'F'}{I'O'} = \frac{M'\mu}{M'O'}.$$

En comparant ces équations terme à terme, on obtient

$$O'e = O'M'.$$

Nous savons, d'ailleurs, qu'il y a égalité entre les longueurs M''O' et N'O'; les deux triangles rectangles O'M''M' et $O'N'e$ sont donc égaux, l'angle O'N'I' est égal à son homologue O'M''M', et par suite à $M''O'k$. Si maintenant nous considérons les deux triangles $O'M''k$ et N'O'I', nous voyons qu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; il en résulte qu'il y a égalité entre leurs troisièmes côtés et que la distance du point M'' de l'intersection au point fixe k est la longueur constante O'I'. Le lieu des points M'' est donc un cercle décrit autour du point k avec un rayon égal à O'I'. Si l'on raisonnait sur le point m''_1, on verrait qu'il appartient à un cercle dont le centre k_1 est symétrique de k par rapport à E'F' : donc *l'intersection complète d'un tore et d'un plan bitangent se compose de deux cercles égaux.*

La projection horizontale de chaque cercle est une ellipse dont le grand axe est le diamètre projeté verticalement sur le point O'. On trouve, d'après cela, que les grands axes des deux ellipses sont CD et C_1D_1 : leur longueur est double de O'I'.

Le petit axe est la projection du diamètre qui a la plus grande pente. Les sommets H et G d'une ellipse correspondent par conséquent aux points H' et G' qui appartiennent l'un au parallèle inférieur, l'autre au parallèle supérieur; or les rayons de ces parallèles sont égaux à O'I'; la distance des sommets H et G au point O est donc égale à la moitié du grand axe CD, et le point O est un foyer commun des ellipses.

La tangente E′F′ engendre, dans sa révolution autour de l'axe, un cône doublement circonscrit au tore. Tout plan tangent à ce cône coupe le tore suivant deux cercles, et comme on peut mener deux plans tangents au cône de tout point du tore, on voit qu'il passe par chaque point de cette dernière surface deux sections circulaires indépendamment du méridien et du parallèle. Nous supposons que la surface n'a pas de points sur l'axe, sans cela deux méridiens contenus dans un même plan n'auraient pas des tangentes alternes communes, et le cône n'existerait pas.

871. Concevons que par les centres (K, O′), (K_1, O′) des cercles on élève des perpendiculaires (KV, O′V′), (K_1V_1, O′V′) à leur plan; chacune de ces droites sera le lieu des centres des sphères auxquelles appartient le cercle dont elle contient le centre. Si le plan sécant tourne en restant bitangent, les deux droites (KV, O′V′), (K_1V_1, O′V′) entraînées dans le mouvement formeront les génératrices des deux systèmes d'un même hyperboloïde. On voit que les cercles situés dans les plans bitangents forment deux séries qui correspondent aux génératrices des deux systèmes d'un hyperboloïde de révolution.

Par un point quelconque de l'hyperboloïde, il passe deux génératrices de systèmes différents, et les longueurs de ces droites comprises entre le plan horizontal et le point considéré sont évidemment égales. Ce point est donc le centre d'une sphère qui contient les deux cercles égaux dont ces droites sont les axes.

Deux cercles qui n'appartiennent pas à la même série sont sur une sphère, car leurs axes se rencontrent. Deux cercles d'une même série ne sont pas sur une sphère.

Toute sphère qui contient deux cercles est tangente au tore aux points où ces courbes se coupent.

L'axe horizontal de l'hyperbole méridienne de l'hyperboloïde est égal à KK_1; mais, en remarquant que les droites DD_1 et $d'd'_1$ sont égales entre elles, et que les segments KD et K_1D_1 sont égaux à O′I′, on reconnaît que KK_1 a la longueur du diamètre $c'd'$ du cercle méridien du tore. L'hyperbole a d'ailleurs pour une de ses asymptotes la droite O′V′; son demi-axe non transverse est donc

$$I'c' \operatorname{tang} J'O'V', \quad \text{ou} \quad I'F' \operatorname{tang} O'I'F', \quad \text{ou enfin} \quad O'F'.$$

D'après la grandeur des deux axes, on trouve que les centres I′ et J′ des cercles méridiens sont les foyers de l'hyperbole. Nous avons tracé cette courbe sur la *fig.* 349.

872. Supposons maintenant qu'une sphère touche le tore en deux points; les normales communes aux deux surfaces en ces points se rencontrent au centre de la sphère et coupent l'axe en un même point ou en des points différents, suivant que les points de contact appartiennent ou non à un même parallèle. Dans le

premier cas, la sphère est circonscrite au tore le long de ce parallèle; dans le second, que nous allons examiner, le plan des deux normales contient l'axe de la surface.

P et Q sont les points de contact (*fig.* 349); I′ et J′ les centres des cercles méridiens sur lesquels se trouvent ces points; m le centre de la sphère bitangente et O′Z l'axe du tore. Nous désignerons par la lettre b le rayon I′P.

On a

$$mI' - PI' = mJ' + J'Q;$$
$$mI' - mJ' = 2b.$$

Le point m est donc sur une hyperbole dont l'axe transverse est $2b$ et dont les foyers sont I′ et J′, c'est-à-dire sur l'hyperbole lieu des centres des sphères qui coupent le tore suivant deux cercles. Mais ces dernières sphères sont bitangentes (art. **871**) et leurs points de contact sont nécessairement dans le plan méridien de leur centre. Celle dont le centre est en m se confond donc avec la sphère tangente en P et en Q, car le point m n'étant pas sur l'axe O′Z ne peut être le centre de deux cercles distincts tangents l'un et l'autre aux cercles I′P et J′Q. Donc *toute sphère bitangente à un tore, et non circonscrite, coupe cette surface suivant deux cercles égaux* [1]. Les plans qui ont deux points de contact doivent être considérés comme des sphères doublement tangentes, et dont les centres sont aux points de l'hyperboloïde situés à l'infini.

Si l'abscisse O′I′ est plus petite que b, les sommets L et T seront au delà des foyers I′ et J′, et l'hyperbole méridienne se changera en une ellipse LRTS (*fig.* 348). Le lieu des centres des sphères bitangentes (et non circonscrites) deviendra donc un ellipsoïde. Les génératrices rectilignes seront alors imaginaires, ainsi que les sections circulaires qui leur correspondent [2].

---

[1] On peut aussi remarquer que la droite qui irait du point P au point Q passerait par le centre O′ du tore et serait, par conséquent, dans deux plans tangents au cône de révolution que nous avons considéré à l'article 870. Chacun de ces plans coupe le tore suivant deux cercles dont un se confond avec la section faite dans la sphère, car il passe par les points P et Q, et il y touche cette section.

Pour prouver que le point O′ où la droite PQ coupe I′J′ est le centre du tore, on mène la droite $J'Q_1$ passant par le point d'intersection de la circonférence J′ et de la droite PQ; les angles $J'QQ_1$, $J'Q_1Q$ et mPQ étant égaux, $J'Q_1$ est parallèle à mP; alors les triangles $O'J'Q_1$ et O′I′P sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, et par suite J′O′ égale I′O′.

[2] Yvon Villarceau a établi que tout plan bitangent coupe le tore suivant deux cercles (*Comptes rendus*, 2e semestre, 1848). M. Mannheim a reconnu que les sphères doublement tangentes jouissent de la même propriété (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1860). Nous avons démontré, sur la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace, des théorèmes plus généraux, et dont les propositions insérées aux articles 870-872 ne sont que des corollaires (*Journal de l'École Polytechnique*, XLe cahier, 1863).

Rayons de courbure de la section du tore par un plan tangent.

873. L'équation (24) de l'article **817**

$$\rho = \frac{\alpha^3}{2\beta\sqrt{-R_1R_2}}$$

va nous permettre de déterminer les rayons de courbure de la section du tore par un plan tangent, au point double de cette courbe ([1]).

Nous appelons, comme précédemment, b le rayon IM du cercle méridien (*fig.* 350) et a la distance OI de son centre à l'axe de la surface. Nous prenons pour axes coordonnés les droites OX, OZ et leur perpendiculaire commune au point O.

L'équation du cercle méridien est

$$(X-a)^2+Z^2-b^2=0.$$

Pour avoir l'équation du tore, il suffit de remplacer l'abscisse X par le rayon $\sqrt{X^2+Y^2}$ du parallèle correspondant. En faisant disparaître le radical, on obtient

$$(X^2+Y^2+Z^2+a^2-b^2)^2-4a^2(X^2+Y^2)=0. \tag{1}$$

Nous allons considérer l'intersection de la surface par le plan qui la touche en un point M déterminé, sur la méridienne, par l'azimut MIO, que nous appelons ω.

Nous transportons l'origine au point M, et nous prenons pour nouveaux axes coordonnés les droites Mx, Mz et leur commune perpendiculaire. On a

$$\left\{\begin{aligned} X &= x\sin\omega - z\cos\omega - b\cos\omega + a,\\ Y &= y,\\ Z &= x\cos\omega + z\sin\omega + b\sin\omega. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

([1]) On peut appliquer la règle de l'article 779 pour trouver les rayons de courbure en un point double d'une courbe plane, en modifiant ainsi cette règle. L'équation, en coordonnées rectangulaires, d'une courbe plane ayant à l'origine un point double M, ne renferme pas de termes inférieurs au second degré. Prenant une tangente en M pour axe des α et sa perpendiculaire en M pour axe des β, l'équation de la courbe, rapportée à ces axes, ne doit pas contenir de terme en α^2. Donc le rapport de α^3 à 2β s'obtiendra après avoir annulé les termes infiniment petits d'un ordre supérieur au troisième.

Pour le cas examiné par l'Auteur, on fait $z=0$ dans la dernière équation de l'article 873, on remplace x et y respectivement par $\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta$ et $\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta$, θ étant égal à l'angle $xM\alpha$, on supprime les termes infiniment petits d'un ordre supérieur au troisième, ce qui donne

$$\alpha^3\sin\omega\cos\theta+\alpha^2(a\cos^2\theta-b\cos\omega)-2a\alpha\beta\sin\theta\cos\theta=0.$$

Le coefficient de α^2 devant être nul, on trouve $\sin\theta$, et par suite la valeur de ρ donnée à l'article 876.

(E. L.)

En portant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient pour nouvelle équation de la surface

$$[x^2+y^2+z^2+2a(x\sin\omega - z\cos\omega)+2bz+2a(a-b\cos\omega)]^2$$
$$-4a^2[(x\sin\omega - z\cos\omega)^2+2(a-b\cos\omega)(x\sin\omega - z\cos\omega)+(a-b\cos\omega)^2+y^2]=0.$$

874. Si nous ne considérons que la partie de la surface voisine du point M, les coordonnées x et y seront infiniment petites du premier ordre et l'ordonnée z infiniment petite du second ordre. Développant alors l'équation et négligeant les termes d'un ordre supérieur au troisième, au fur et à mesure qu'ils se présentent, on obtient, après quelques réductions qui se présentent d'elles-mêmes,

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(a-b\cos\omega)x^2 - by^2\cos\omega + 2b(a-b\cos\omega)z \\ &\qquad + (x^2+y^2)x\sin\omega + 2bxz\sin\omega = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour avoir l'équation de l'indicatrice, il suffit de négliger les termes du troisième ordre, ce qui donne

$$(a-b\cos\omega)x^2 - by^2\cos\omega + 2b(a-b\cos\omega)z = 0.$$

On déduit immédiatement de cette équation les valeurs suivantes des rayons de courbure des sections principales (art. **791**)

$$R_1 = -b,\quad R_2 = \frac{a-b\cos\omega}{\cos\omega}.$$

Nous trouvons une valeur négative pour le rayon de courbure de la méridienne, parce que les formules (2) ont été établies dans l'hypothèse que la partie positive de l'axe des coordonnées s'étend de M vers z (art. **777**).

875. Le point pour lequel nous voulons déterminer les longueurs α et β est situé sur une section faite par un plan normal contenant une asymptote de l'indicatrice. Les coordonnées x et y de ce point satisfont donc à l'équation des asymptotes que l'on obtient facilement d'après la grandeur des rayons de courbure, ou en supposant z nulle dans l'équation de l'indicatrice; on a donc

$$(4)\qquad (a-b\cos\omega)x^2 - by^2\cos\omega = 0.$$

Eu égard à cette relation, l'équation (3) se réduit à

$$2b(a-b\cos\omega)z + (x^2+y^2)x\sin\omega + 2bxz\sin\omega = 0.$$

En résolvant par rapport à z, on obtient

$$z = -\frac{(x^2+y^2)x\sin\omega}{2b(a-b\cos\omega)+2bx\sin\omega}.$$

Si l'on effectuait la division, le second terme du dénominateur n'introduirait qu'un infiniment petit du quatrième ordre; nous pouvons donc le supprimer, et écrire simplement

$$z = -\frac{\sin\omega}{2b(a-b\cos\omega)}(x^2+y^2)x. \tag{5}$$

876. Le calcul du rayon ρ ne présente plus de difficultés. Nous avons immédiatement

$$\alpha^2 = x^2+y^2, \quad \beta = z.$$

La substitution des valeurs de y^2 et de z, déduites de ces formules, dans les équations (4) et (5), donne

$$ax^2 - \alpha^2 b\cos\omega = 0, \tag{4 bis}$$

$$\beta = -\frac{\sin\omega}{2b(a-b\cos\omega)}\alpha^2 x. \tag{5 bis}$$

En portant la valeur (5 *bis*) de β dans l'équation qui est au commencement de l'article **873**, on obtient

$$\rho = \frac{\alpha b(a-b\cos\omega)}{x\sin\omega\sqrt{-R_1R_2}}.$$

Les valeurs de R_1 et de R_2 ont été trouvées à l'article précédent. L'équation (4 *bis*) donne le rapport $\frac{\alpha}{x}$; pour avoir l'expression cherchée, il suffit d'éliminer ces trois quantités entre les trois équations précédentes. On obtient

$$\rho = \frac{1}{\sin\omega}\sqrt{a(a-b\cos\omega)}.$$

Cette équation conduit à une construction très simple pour la grandeur absolue du rayon ρ.

Le plan méridien du point de contact divise la section en deux parties symétriques, et par suite les rayons de courbure des deux branches ont les mêmes longueurs.

Quand le point M est en A, ω est nul et ρ infini : chaque branche possède alors une inflexion. Lorsque la trace MT du plan tangent touche la méridienne inverse, on a

$$b - a\cos\omega = 0, \quad \text{ou} \quad \omega = 90^\circ.$$

Dans un cas comme dans l'autre, le rayon ρ est égal à a, ce qui s'accorde avec les résultats de l'article **870**. Il existe une valeur de ω comprise entre les deux précédentes qui donne pour ρ une valeur minimum. Nous remarquerons enfin

que si la méridienne ne rencontre pas l'axe, la valeur du rayon déterminée par la formule est toujours réelle, bien que la section soit imaginaire quand le point de contact est sur la partie convexe du tore [1].

CHAPITRE III.

THÉORÈME DES TANGENTES CONJUGUÉES.

Démonstration de ce théorème.

877. Nous avons vu qu'une courbe d'ombre propre est une ligne de contact de la surface considérée avec une développable. En chacun de ses points les plans tangents aux deux surfaces se confondent, et par suite le procédé que l'on emploie ordinairement pour la construction des tangentes aux lignes communes à deux surfaces est inapplicable. On doit à Ch. Dupin un théorème qui permet de déterminer les tangentes à une courbe d'ombre propre, lorsque l'on connaît les rayons de courbure de la surface éclairée [2]. Nous allons démontrer ce théorème, nous en développerons ensuite les conséquences.

Soit Ω (*fig.* 354) la courbe de contact d'une développable avec une surface donnée : l'intersection des plans tangents au point O de cette ligne et au point infiniment voisin m est une génératrice de la développable. Un plan passant par le point m et parallèle au plan tangent en O coupe la surface suivant une conique Fm que l'on peut prendre pour indicatrice (art. **789**). La tangente mG à cette courbe est parallèle à la génératrice de la développable, car elle est parallèle au plan tangent en O et située dans le plan tangent en m; mais elle est aussi parallèle au diamètre IF qui, dans l'indicatrice, est conjugué à celui qui aboutit au point m; le diamètre IF est donc parallèle à la génératrice de la développable. Le diamètre Im est d'ailleurs parallèle à la tangente OT à la courbe Ω; on peut même dire qu'il se confond avec elle, car leur distance est infiniment

(1) Nous indiquerons en quelques mots une dernière application aux surfaces de révolution des théorèmes relatifs à la courbure des surfaces.

Quand une surface de révolution est donnée par son axe et une courbe génératrice, si une tangente à cette ligne est perpendiculaire au plan méridien du point de contact, la méridienne a un point de rebroussement. La tangente de rebroussement est tangente à la zone sphérique décrite par la révolution du cercle osculateur de la génératrice, et par suite on peut la tracer lorsque l'on connaît le centre de courbure de cette ligne. La construction que nous venons d'indiquer nous a été utile dans nos études sur le tore général (*Journal de l'École Polytechnique*, XLe Cahier, 1863).

(2) *Développements de Géométrie.*

petite du second ordre et le point m peut être considéré comme appartenant à OT. Nous voyons ainsi que, *quand une développable est circonscrite à une surface, en un point quelconque de la courbe de contact, la tangente à cette ligne et la génératrice de la développable sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice de la surface inscrite.*

Si l'on se reporte aux considérations présentées à l'article **598** sur les asymptotes des courbes du second ordre, on verra que l'on peut modifier l'énoncé du théorème, et dire que *la tangente à la courbe de contact et la génératrice de la développable sont conjuguées harmoniques des asymptotes de l'indicatrice.* Le théorème ainsi présenté devient d'un emploi facile pour les surfaces à courbures opposées.

La tangente T et la génératrice G sont appelées *tangentes conjuguées,* parce que, si la première était une génératrice d'une développable circonscrite, la seconde serait tangente à la courbe de contact.

Construction des tangentes aux courbes d'ombre propre.

878. Le théorème des tangentes conjuguées permet de construire les tangentes aux courbes d'ombre propre, lorsque l'on peut déterminer l'indicatrice de la surface au point considéré. Les propriétés des diamètres conjugués des courbes du second ordre étant projectives, on peut opérer sur un plan de projection, comme on le ferait sur le plan de l'indicatrice.

Proposons-nous de déterminer la tangente au point (M, M′) de la courbe d'ombre du tore représenté sur la *fig.* 212. Nous transportons le point (M, M′) en (R, R′) sur le méridien principal, par une rotation autour de l'axe, et nous déterminons les rayons de courbure R′C et R′ω du méridien et de la seconde section principale (art. **821**). Les centres de courbure C et ω sont d'un même côté du point R′, et par suite l'indicatrice est une ellipse.

Nous prenons le paramètre c égal à R′C (art. **787**), alors les demi-axes de l'indicatrice sont

$$R'C, \quad \sqrt{R'\omega \times R'C} \quad \text{ou} \quad R'F.$$

Le premier correspond au rayon de courbure de la méridienne; nous le plaçons en $R'C'_1$ sur la tangente à cette courbe; la projection le réduit sur le plan horizontal à la longueur RC_1, qui doit être ramenée en Mc. Le second axe est horizontal et se projette en vraie grandeur sur la droite JMJ_1 double de R′F et perpendiculaire à OM. Le problème qu'il faut résoudre consiste à tracer le diamètre conjugué du rayon lumineux SMT, dans l'ellipse qui a son centre en M et dont les points J, J_1 et c sont trois sommets.

Considérons le cercle qui a pour diamètre JJ_1 et qui se projette sur cette el-

lipse, et faisons-le tourner autour de JJ_1 jusqu'à le rendre horizontal : le point qui se projetait en c ira en K; la corde Jc deviendra JK; le point β sera amené en β_1, et le diamètre $M\beta T$ en $M\beta_1$. Le diamètre conjugué à $M\beta_1$ dans le cercle est la perpendiculaire $M\alpha_1$ à $M\beta_1$. Si nous ramenons le cercle dans sa première position, la corde J_1K se place en J_1c, le point α_1 arrive en α, et la droite $M\alpha$ est dans l'ellipse le diamètre conjugué à MT; c'est donc la projection horizontale de la tangente à la courbe d'ombre. La tangente étant dans le plan tangent au point (M, M′), on obtiendrait facilement sa projection verticale.

Les tracés deviennent plus simples quand la surface est à courbures opposées : on détermine alors les asymptotes de l'indicatrice, et l'on cherche la conjuguée harmonique du rayon de lumière.

La construction que nous avons fait connaître aux articles **849** et **853** peut être employée dans tous les cas, lorsque la surface est convexe comme lorsque ses courbures sont opposées.

879. Quand l'un des rayons de courbure est infini, l'indicatrice se compose de deux droites parallèles; alors, quelle que soit la direction du rayon de lumière dans le plan tangent, le diamètre qui lui est conjugué est la tangente à la section principale dont le rayon est infini. On voit, d'après cela, que si, sur une surface développable, un point non situé sur l'arête de rebroussement appartient à une ligne d'ombre, la génératrice qui y passe fera partie de cette ligne, ce qui est conforme aux résultats que nous avons obtenus précédemment (art. **679**).

Quand le point lumineux est sur la tangente à la section dont le rayon est infini, le théorème donne une direction indéterminée pour la tangente à la courbe d'ombre; il ne suffit donc plus à la solution du problème. Nous ne nous arrêterons pas à ce cas particulier ([1]).

880. Lorsque l'un des rayons principaux est nul, l'indicatrice est une ellipse dont un des axes est nul (art. **808**). Quelle que soit alors la direction du rayon de lumière, son diamètre conjugué se confond avec l'autre axe, et par conséquent toutes les lignes d'ombre sont tangentes à la section principale dont le rayon n'est pas nul. Il résulte d'ailleurs de la multiplicité des plans tangents au point considéré qu'une infinité de lignes d'ombre y passent. Nous obtenons ainsi une extension du théorème que nous avons démontré à l'article **634** pour les sommets des surfaces gauches.

881. *Quand le point lumineux est sur la surface éclairée, la courbe d'ombre a deux branches qui se croisent à ce point tangentes aux deux asymptotes de l'indica-*

([1]) On trouvera une étude de cette question dans les lemmes qui sont au commencement de notre *Mémoire sur les lignes d'ombre et de perspective des surfaces de révolution* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVe Cahier, 1853). Nous nous bornerons à dire que, dans le cas dont il s'agit, le point considéré de la surface est en général un point double de la courbe d'ombre.

trice, car une quelconque de ces droites passe au point lumineux, et peut être regardée comme tangente à la surface en un point infiniment voisin. Elle est d'ailleurs son propre diamètre conjugué.

Construction des tangentes et des asymptotes aux courbes d'ombre propre des surfaces gauches.

882. Nous savons que les secondes asymptotes des indicatrices aux différents points d'une génératrice d'une surface gauche forment un hyperboloïde (art. **825**). Quand on connaît trois de ces droites l'hyperboloïde est déterminé, et l'on peut obtenir la tangente à une courbe d'ombre au point où elle rencontre la génératrice. Dans l'étude qui va suivre nous supposerons que l'on a construit la conique qui forme le contour apparent de cette surface par rapport à un plan quelconque, que l'on prend pour plan de projection.

Soient AM la projection de la génératrice (*fig.* 351), M le point où elle est rencontrée par la courbe d'ombre, S la projection du point lumineux et Ω le contour apparent de l'hyperboloïde osculateur le long de la génératrice AM : la seconde asymptote de l'indicatrice au point M est la droite MB tangente à Ω. Le rayon SM et la tangente à la courbe d'ombre sont donc conjugués harmoniques des droites MA et MB. Nous traçons la parallèle PN à MA, et nous portons au delà de N une longueur NG égale au segment PN : la tangente cherchée est MD.

Si le plan de projection était perpendiculaire à une génératrice du cône asymptote de l'hyperboloïde, et par suite à une génératrice de chaque système de cette surface, les secondes asymptotes des indicatrices divergeraient d'un même point, et leur détermination serait plus facile encore que dans le cas où le contour apparent de l'hyperboloïde est une conique.

883. Quand le point M s'éloigne à l'infini sur la génératrice, la construction précédente se trouve en défaut, et il faut recourir à une autre propriété des conjuguées harmoniques pour déterminer l'asymptote à la courbe d'ombre [1].

SV étant une sécante quelconque passant par le point S (*fig.* 351), on a (art. **601**)

$$\frac{bS}{bd} : \frac{aS}{ad} = -1.$$

Si l'on rapporte tous les segments à une origine commune k placée où l'on

(1) Nous ne considérons dans les courbes d'ombre que les branches infinies de la première espèce (art. 638).

voudra sur la sécante, l'équation deviendra

$$\frac{kS - kb}{kd - kb} : \frac{kS - ka}{kd - ka} = -1.$$

Lorsque le point k est le milieu du segment ab, on a

$$kb = -ka,$$

et l'équation devient

$$\frac{kS + ka}{kd + ka} : \frac{kS - ka}{kd - ka} = -1.$$

En développant et en réduisant, on obtient

$$\overline{ka}^2 = kS \times kd.$$

Quand le point M s'éloigne à l'infini (*fig.* 352), la seconde asymptote de l'indicatrice est la droite BM parallèle à AM et tangente à Ω. Si du point S on trace une sécante SV, le point d où passe l'asymptote à la courbe d'ombre sera déterminé par l'équation précédente, qui conduit à une construction facile.

Quand le point S est situé entre les droites AM et BM et à égales distances de ces lignes, kS est nul et la formule donne pour kd une valeur infinie. La branche considérée de la courbe d'ombre est par conséquent parabolique.

884. Quand la surface gauche a un plan directeur, les secondes asymptotes des indicatrices aux divers points d'une génératrice forment un paraboloïde, et le contour apparent de cette surface est une parabole. Cette circonstance ne modifie pas la construction pour les tangentes à une courbe d'ombre aux points situés à distance finie, mais la construction des asymptotes à la courbe d'ombre devient plus facile, parce que la tangente MB parallèle à la génératrice MA (*fig.* 352) disparaît à l'infini.

Lorsque le point b s'éloigne, le rapport de bS à bd approche de l'unité, et, quand le point b est à l'infini, la première équation de l'article **883** se réduit à

$$aS = -ad.$$

Cette équation nous montre que, *lorsqu'un cône est circonscrit à un conoïde, son sommet et une asymptote de la courbe de contact sont situés de part et d'autre et à égales distances de la génératrice, dans le plan qui est tangent à l'infini.*

Pour quelques positions exceptionnelles d'un paraboloïde, les projections des génératrices n'ont pas une parabole pour enveloppe ; mais, afin d'éviter une discussion minutieuse et peu importante, nous remarquerons qu'on peut toujours prendre un plan de projection disposé de manière que le contour apparent de cette surface

soit une parabole, et que cela suffit pour que le théorème qui précède soit démontré d'une manière générale.

885. La tangente à la courbe d'ombre et le rayon de lumière sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice, et la génératrice de la surface en est une asymptote. Il résulte de là que la tangente se confond avec la génératrice en un autre point qu'aux sommets (art. **880**), seulement quand le rayon coïncide avec elle; la génératrice fait alors partie de la courbe d'ombre et est sa propre tangente. On peut étendre ce raisonnement aux asymptotes. Les génératrices ne sont donc tangentes ou asymptotes aux courbes d'ombre qu'aux sommets de la surface.

886. Supposons maintenant que les rayons de lumière soient parallèles à une droite R dont la direction est différente de celle de la génératrice AM (*fig* 353) : si le point M appartient à la courbe d'ombre, la tangente Md sera telle qu'en traçant une sécante quelconque UV, le rayon de lumière Ms et la tangente MB à Ω, on aura

$$\frac{bs}{as} \cdot \frac{bd}{ad} = -1.$$

Quand le point M s'éloigne à l'infini, le point s va également à l'infini, le rapport $\frac{bs}{as}$ est égal à l'unité, et l'on a

$$b_1 d_1 = -a_1 d_1;$$

par conséquent, *quand une surface gauche est éclairée par des rayons parallèles, l'asymptote à une branche infinie de la courbe d'ombre est dans le plan tangent à l'infini, et à égales distances de la génératrice de la surface gauche et de celle des génératrices de l'hyperboloïde osculateur qui est parallèle à cette droite.*

887. Quand les rayons de lumière sont parallèles à une génératrice G, cette droite fait partie de la courbe d'ombre. Le plan tangent au point de la génératrice voisine situé à l'infini est parallèle à G (art. **615**), et par suite aux rayons de lumière. Le point situé à l'infini sur la génératrice voisine de G appartient donc à la courbe d'ombre; en d'autres termes, la courbe d'ombre proprement dite a une branche qui rencontre la génératrice G à l'infini.

Pour reconnaître quelle est l'asymptote, nous remarquerons que si le point M est un point de contact pour des rayons parallèles à MB (*fig*. 353), cette droite est tangente à la courbe d'ombre. Lorsque le point M s'éloigne à l'infini sur MA, elle devient asymptote et prend la position $B_1 b_1$; les rayons sont alors parallèles à MA.

Il résulte de là que, *quand une génératrice* G *est parallèle aux rayons de lumière, la courbe d'ombre a une branche infinie dont l'asymptote est la génératrice parallèle à* G *dans l'hyperboloïde osculateur le long de cette droite.*

Parties réelles et parties virtuelles des courbes d'ombre propre (1).

888. *Définitions*. — Les surfaces, telles qu'on les considère dans les problèmes d'application, recouvrent des corps opaques, et la courbe de contact d'un cône circonscrit ne forme ligne d'ombre propre, lorsqu'un point lumineux est au sommet, que quand les génératrices rectilignes sont extérieures. Si, près du point de tangence, les génératrices sont dans l'intérieur du corps, la courbe de contact n'a aucune importance.

La *fig*. 368 représente une section faite dans le corps éclairé par un plan contenant le point lumineux S. On peut lui mener de ce point six tangentes, les points m, r et q appartiennent à la ligne de séparation d'ombre et de lumière; nous dirons que ce sont des points *réels* de la ligne d'ombre propre, tandis que nous appellerons *virtuels* les points p et t situés sur des tangentes géométriques qui n'existent pas comme rayons de lumière. La tangente Sn traverse le corps avant de le toucher extérieurement en n. Ce point n'est donc pas sur la séparatrice; nous le considérerons cependant comme réel : il est dans la position de tout autre point réel, tel que m ou r, devant lequel on placerait un écran. Le point p ne peut appartenir à la ligne d'ombre, quelque part que l'on suppose le point lumineux sur la tangente pS; le point n, au contraire, deviendrait utile, dans le cas où le point lumineux serait entre n_1 et n, ou au delà de n en S_1.

Si le corps opaque se trouvait de l'autre côté de la surface, comme il est représenté sur la *fig*. 367, les points réels deviendraient virtuels, et réciproquement. Nous avons déjà signalé cette circonstance à l'article **335**.

889. Les points réels et les points virtuels forment quelquefois des courbes séparées; ainsi dans le cas de la *fig*. 366, qui représente une surface de révolution éclairée par un point lumineux placé sur son axe, on trouve une ligne d'ombre virtuelle suivant le parallèle pp' et deux lignes d'ombre réelles suivant les parallèles mm' et nn'; la première seule est utile.

Le plus souvent les points réels et les points virtuels forment des parties distinctes d'une même courbe. Il est alors important de déterminer la position des *points limites*.

Une génératrice du cône circonscrit est extérieure ou intérieure près de son

---

(1) Nous avons déjà examiné cette question dans le VIe Livre de notre *Traité de Perspective* (1re édition), mais sans lui donner tout le développement qu'elle comporte. [Jules de la Gournerie a supprimé cette question dans la seconde édition de son *Traité de Perspective*. (E. L.)]

point de contact, suivant que ce point est réel ou virtuel. Au point limite, la génératrice passant de l'extérieur à l'intérieur du corps a un contact du second ordre avec la surface.

Cette circonstance ne peut pas se présenter sur les surfaces convexes, parce qu'elles n'ont qu'un contact du premier ordre avec leurs tangentes. La courbe d'ombre d'une surface de ce genre est donc entièrement réelle ou entièrement virtuelle. Elle est réelle pour une sphère en relief, et virtuelle pour une sphère creuse. Les droites parallèles aux rayons de lumière et tangentes à la surface supérieure de la niche représentée sur la *fig.* 206 sont noyées dans la maçonnerie près de leur point de contact, et nous n'avons eu à considérer que des ombres portées (art. **341**).

Les surfaces à courbures opposées ont, en chaque point, un contact du second ordre avec deux de leurs tangentes, qui sont les asymptotes de l'indicatrice (art. **796**). Leurs courbes d'ombre peuvent donc être composées d'arcs réels et d'arcs virtuels : aux points limites la génératrice du cône circonscrit, c'est-à-dire le rayon de lumière, est une des deux asymptotes de l'indicatrice.

890. En tout point de la courbe d'ombre, la tangente à cette ligne et le rayon de lumière sont deux diamètres conjugués de l'indicatrice : or l'asymptote d'une hyperbole est son propre diamètre conjugué; donc, aux points limites, le rayon de lumière est tangent à la ligne d'ombre.

Réciproquement, si le rayon de lumière est tangent à la ligne d'ombre, il se confond avec son diamètre conjugué; il est donc une asymptote de l'indicatrice, et par suite il a un contact du second ordre avec la surface, et il se trouve à la limite des tangentes extérieures et des tangentes intérieures. Un arc réel de la ligne d'ombre s'arrête au point de contact considéré.

Ces résultats sont soumis à certaines restrictions. Si le rayon de lumière, qui est asymptote de l'indicatrice de son point de contact, avait avec la surface un contact du troisième ordre, il serait tout entier d'un même côté, en dehors du corps, par exemple, et il ne formerait plus limite; la courbe serait réelle d'un côté comme de l'autre. On peut supposer qu'elle avait primitivement un arc virtuel, et que le point lumineux s'est transporté dans l'espace, de manière à réduire graduellement cet arc et à l'anéantir.

Nous ne reviendrons pas sur ces cas d'exception. Toutes les questions de Géométrie en présentent d'analogues.

891. La courbe de contact d'un cône circonscrit peut être considérée comme la directrice de cette surface; mais nous savons qu'un cône a un rebroussement lorsque la génératrice est tangente à la directrice (art. **217**). Nous voyons donc que *le cône circonscrit à une surface a un rebroussement le long de chacune des génératrices qui sont asymptotes de l'indicatrice de leur point de contact.* Si un point lumineux est au sommet du cône, les deux parties de cette surface qui se

réunissent à une génératrice de rebroussement correspondent, l'une à un arc réel de la courbe d'ombre, l'autre à un arc virtuel.

Quand un cône circonscrit à une surface a un rebroussement le long d'une génératrice, la courbe de contact ne peut passer sans rebroussement d'une partie à l'autre qu'en touchant la génératrice qui forme arête, et celle-ci, se trouvant tangente à la courbe de contact, est une asymptote de l'indicatrice; elle a donc un contact du second ordre avec la surface, et par suite elle doit être à la limite des tangentes extérieures et des tangentes intérieures.

Nous avons supposé que la courbe de contact n'avait pas de rebroussement; si elle en avait un, ses arcs, situés de part et d'autre du point de rebroussement, seraient tous les deux réels ou virtuels. Cette circonstance peut se présenter sur les surfaces qui ont des arêtes de rebroussement.

892. Quand on a déterminé une projection d'une ligne d'ombre, les tangentes à cette courbe menées par la projection du point lumineux font connaître les points limites. Il ne peut y avoir d'exception que quand le plan tangent est perpendiculaire au plan de projection, parce qu'alors la tangente à la courbe d'ombre et le rayon de lumière, même lorsqu'ils sont distincts dans l'espace, se confondent en projection.

Sur quelques surfaces on peut déterminer les points limites des courbes d'ombre par des méthodes particulières et plus simples.

Quand on construit une courbe d'ombre par la méthode des projections obliques (art. **371**), les points limites sont indiqués par des points de rebroussement de la trace du cône d'ombre. Alors, en prenant les ombres portées par les génératrices considérées, on trouve que l'une de ces ombres coupe celle qui la précède et celle qui la suit d'un même côté du point où elle est touchée par l'enveloppe.

893. *Étude des lignes d'ombre propre du tore.* — Nous nous sommes occupé des ombres du tore à l'article **343**, mais nous avons seulement considéré la partie ou nappe convexe de cette surface; nous allons maintenant rechercher les particularités que présente la ligne d'ombre propre sur la nappe à courbures opposées.

Nous supposons le point lumineux (S, S′) dans le plan méridien de front (*fig.* 358). Ce plan divise le tore en deux parties sur lesquelles les lignes d'ombre sont symétriques. Nous n'avons représenté que l'une des moitiés.

On détermine par les procédés de l'article **351** les courbes d'ombre (Bb, B′b') et (AG*uga*, A′G′$u'g'a'$); la première est sur la nappe convexe, la seconde sur celle dont les courbures sont opposées. Nous avons expliqué à l'article **878** comment on peut construire les tangentes à ces lignes. Si la méridienne était formée d'arcs de courbes différentes ayant un contact du premier ordre seulement, la ligne d'ombre serait brisée à chaque parallèle de raccordement. On trouve ainsi que la ligne d'ombre d'un cylindre terminé par une demi-sphère d'un diamètre

égal au sien se compose de deux droites et d'un arc de cercle qui ne les continue pas tangentiellement.

894. Il est important de distinguer les arcs réels et les arcs virtuels sur la courbe d'ombre de la nappe intérieure du tore.

Les points (A, A′) et (a, a') sont réels, car les rayons (SA, S′A′) et (Sa, S′a') sont extérieurs aux méridiennes. Nous allons chercher s'il y a entre eux des points limites.

Un point quelconque (M, M′) de la méridienne principale serait l'extrémité d'un arc utile de la ligne d'ombre, si l'une des deux asymptotes de l'indicatrice de la surface en ce point passait par le point lumineux. Il est facile de construire ces asymptotes (art. **822**); l'une d'elles est la droite (MN, M′N′); elle rencontre au point (N, N′) le cylindre vertical qui a pour trace horizontale le cercle décrit du point O comme centre, avec OS pour rayon. La seconde asymptote de l'indicatrice perce le même cylindre en un point dont la projection horizontale est symétrique de N par rapport à OS, et dont la projection verticale est N′. En attribuant successivement différentes positions au point M′ sur la méridienne principale, on détermine la courbe N′T, projection verticale de l'intersection du cylindre OS avec la surface lieu des asymptotes de l'indicatrice aux différents points de la méridienne A′B′.

Nous traçons une horizontale par le point S′, et du point K′ où elle rencontre la courbe d'erreur N′T nous menons une tangente K′L′ à la méridienne. Une des asymptotes de l'indicatrice du point (L, L′) passe au point (K, K′), et par suite (L, L′) est un point limite de la courbe d'ombre, lorsque le point lumineux est (K, K′). Si l'on suppose que le point lumineux, d'abord placé en (K, K′), tourne autour de l'axe, le point limite (L, L′) sera transporté sur son parallèle d'un même mouvement, c'est-à-dire en décrivant un arc d'un nombre égal de degrés. Quand le point lumineux arrivera en (S, S′), le point (L, L′) se trouvera sur une droite symétrique de OK par rapport à OS et qui sort du cadre de la figure. Comme d'ailleurs la courbe d'ombre est composée de deux parties symétriques par rapport au plan vertical OS, si nous ramenons le point L sur OK par un arc de cercle, nous aurons un point limite (G, G′), qui nous aurait été donné directement si nous avions considéré la deuxième asymptote de l'indicatrice du point (L, L′).

L'horizontale du point S′ rencontre la courbe d'erreur en un second point (k, k'), qui fait trouver un autre point limite (g, g'). La courbe (Aa, A′a') se compose par conséquent de deux arcs réels (AG, A′G′) et (ag, $a'g'$), et d'un arc virtuel (Gug, G′$u'g'$) [1]. Les rayons de lumière qui aboutissent aux points

---

[1] Il sera facile de comprendre la disposition des ombres sur le tore, quand nous aurons discuté la courbe d'ombre portée (art. 903 et 904).

La construction que nous avons donnée pour la détermination des points limites à l'aide d'une courbe d'erreur se trouve dans la *Stéréotomie* de Leroy.

(G, G′) et (g, g') doivent être tangents à la courbe sur chacune des projections. Ceux qui vont aux points (u, u') et (U, U′) sont tangents à la courbe d'ombre sur la projection horizontale, mais cela tient à ce que les plans tangents au tore en ces points sont verticaux (art. **892**).

895. La section du tore par un plan tangent en un point du cercle de gorge O′D′ a deux axes qui se croisent au point de contact (*fig.* 357); l'un est vertical et l'autre horizontal. Il résulte de là que chacune des branches qui passent au point double y a une inflexion [1], et par suite que les asymptotes de l'indicatrice sont entièrement extérieures à la surface (art. **797**). Lorsque le point lumineux est sur une de ces droites, les points limites (G, G′) et (g, g'), qui sont ordinairement l'un au-dessus, l'autre au-dessous du plan J′O′I′, sont réunis dans ce plan, et la partie virtuelle comprise entre eux a une longueur nulle.

Il résulte de ces considérations que, quand le point S′ s'élève, les points K′ et k' se réunissent sur la verticale du point D′ en un point T où la tangente à la courbe d'erreur est horizontale. La courbe d'ombre propre a deux points limites ou n'en a pas, suivant que S′ est au-dessous ou au-dessus de T.

La construction que nous avons donnée pour les points de la courbe d'erreur n'est pas immédiatement applicable au point T; mais, en rendant le plan tangent au tore au point D′ parallèle à l'un des plans de projection, on peut y placer sans difficulté les asymptotes de l'indicatrice, et déterminer leur intersection avec celles des génératrices du cylindre OS qui sont projetées sur D′T. Nous donnerons plus loin une construction analogue à celle que nous venons d'indiquer (art. **899**).

La courbe d'erreur est composée de deux parties symétriques par rapport à l'axe O′D′I′ : nous n'avons représenté que l'une d'elles. Il n'entre pas dans notre cadre de discuter les différentes formes de cette courbe, ni d'examiner les particularités que présente la surface gauche, lieu des asymptotes des indicatrices du tore aux différents points de la méridienne.

896. La construction que nous venons d'expliquer permet de déterminer les points limites des arcs réels de la courbe d'ombre propre de toute surface de révolution dont on connaît la méridienne. Si cette ligne est une courbe graphique, on déterminera ses rayons de courbure aux divers points considérés par la méthode de l'article **103**.

On peut prendre pour courbe d'erreur l'intersection de la surface gauche, lieu des asymptotes des indicatrices, avec le plan horizontal du point (S, S′); les points de cette ligne, qui se trouvent à la même distance de l'axe que le point S, sont précisément (K, K′) et (k, k').

897. Le cône circonscrit a des rebroussements le long des génératrices

---

[1] Nous avons déjà démontré à l'article 876 l'existence de cette double inflexion.

(SG, S′G′) et (Sg, S′g'). Pour les rendre apparents, nous avons construit la trace PEep de ce cône sur le plan horizontal XY.

Nous savons que le plan de rebroussement du cône le long de la génératrice (SG, S′G′) est le plan osculateur de la directrice (AGu, A′G′u') au point (G, G′) (art. **216**). Ce plan touche le tore au point (G, G′), car il appartient à la série des plans tangents communs au tore et au cône circonscrit. La tangente EH au rebroussement E est donc la trace, sur le plan XY, du plan qui touche le tore au point (G, G′), et par suite elle est perpendiculaire à la trace OK du plan méridien de ce point. La tangente eh est perpendiculaire à Ok.

898. *Détermination des points limites de la courbe d'ombre propre d'une surface de révolution éclairée par des rayons parallèles.* — Quand les rayons sont parallèles, les constructions que nous avons expliquées à l'article **894** ne sont plus applicables, parce que la courbe d'erreur s'éloigne à l'infini. Alors, pour déterminer les points de la méridienne principale où une des asymptotes de l'indicatrice a la même inclinaison que les rayons de lumière, on construit le cône directeur de la surface gauche lieu de ces asymptotes; on cherche quelles sont les génératrices du cône qui ont la même inclinaison que les rayons, et ensuite quelles sont les génératrices de la surface gauche qui leur correspondent.

Considérons le tore engendré par la révolution du cercle PQ autour de l'axe (O, O′Z) (*fig.* 359), et supposons-le éclairé par des rayons parallèles à la droite R située dans le plan vertical : nous construisons les droites (MV, M′V′), (MV_1, M′V′), asymptotes de l'indicatrice d'un point (M, M′) de la méridienne; par un point L choisi arbitrairement sur l'axe pour être le sommet du cône directeur, nous leur menons des parallèles (OB, LB′), (OB_1, LB′), et nous déterminons les traces B et B_1 de ces génératrices du cône.

Au point (M, m') les asymptotes de l'indicatrice sont (MV, $m'v'$) et (MV_1, $m'v'$) : les génératrices du cône qui leur sont parallèles ont leurs traces aux points b et b_1 symétriques de B et de B_1 par rapport à la droite OF; cette ligne est donc un axe de la trace du cône. La droite OH en est aussi un axe.

Quand le point M′ arrive en P sur le parallèle supérieur, les deux asymptotes de l'indicatrice se confondent en une seule droite perpendiculaire au plan vertical; il en est de même quand le point M′ se trouve en Q. Il résulte de là que chaque partie de la trace s'étend à l'infini, des deux côtés du point F et des deux côtés du point F_1.

899. Les rayons de courbure au point E sont EI et EO′. Si l'on prend le point O′ pour centre de l'hyperboloïde osculateur, cette surface sera de révolution autour de la verticale O′Z, et son demi-axe non transverse aura la longueur EU de la moyenne proportionnelle entre EI et EO′. La droite O′U est donc la projection d'une génératrice de l'hyperboloïde parallèle au plan vertical; on peut la regarder comme une asymptote de l'indicatrice du point E, qui a tourné de

90° autour de l'axe. Nous menons par le sommet (O, L) une droite (OD, LD′) parallèle à O′U, et la faisant tourner de 90° nous ramenons sa trace D en F et en F_1. Ces points sont les sommets de la trace du cône directeur.

900. Nous menons par le sommet (O, L) une droite (OH, LH′) parallèle au rayon (OH, R); cette ligne, en tournant autour de l'axe, engendre un cône de révolution qui a pour trace le cercle C_1HC.

Les deux cônes se coupent suivant quatre droites qui percent le plan horizontal aux points C, C_1, c et c_1. Nous pouvons supposer que les rayons de lumière étaient primitivement parallèles à la droite dont les projections sont OC et LC′; alors le point N′ de la méridienne, où la tangente est parallèle à LC′, se trouvait être un point limite de la courbe d'ombre; les rayons ayant tourné de telle manière que la droite (OC, LC′) qui leur est parallèle est venue coïncider avec (OH, LH′), le point limite a tourné d'un angle égal autour du point O et s'est placé en (G, G′). Les autres génératrices communes aux deux cônes font trouver trois autres points limites (G_1, G′), (g, g') et (g_1, g') (¹).

La courbe d'ombre sera composée d'arcs réels et d'arcs virtuels toutes les fois que le cercle OH coupera la trace Bb du cône directeur, c'est-à-dire lorsque l'on aura

$$\mathrm{OH} > \mathrm{OD}$$

ou

$$\cot \mathrm{LH'O''} > \cot \mathrm{UO'E}$$

ou encore

$$\cot\gamma > \frac{\mathrm{EO'}}{\mathrm{EU}},$$

en appelant γ l'angle que les rayons de lumière font avec le plan horizontal.

EU étant une moyenne proportionnelle entre EO′ et IE, l'équation précédente revient à

$$\tan^2\gamma < \frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{O'E}}.$$

901. *Courbe d'ombre portée.* — Nous allons maintenant étudier la courbe d'ombre portée par une surface sur elle-même; cette ligne est l'intersection de la surface considérée avec le cône circonscrit qui a son sommet au point lumineux.

Revenons à la *fig.* 368, qui représente une section d'un corps par un

(¹) Dunesme a fait connaître un procédé graphique pour déterminer les points où la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un tore a pour tangente une génératrice du cylindre (*Comptes rendus*, 2ᵉ semestre 1857); mais la construction qu'il indique nous paraît moins facile que celle que nous donnons. On trouve cette dernière dans le *Traité de Stéréotomie* de Leroy.

plan contenant le point lumineux S. Le rayon Sm touche la surface au point m, et si on le considère comme une droite géométrique indéfinie, il la coupe aux points m_1 et m_2. L'arc mm_1 est dans l'ombre et l'arc $m_1 r$ est éclairé; m_1 est donc un point réel de la courbe d'ombre portée, comme m est un point réel de la courbe d'ombre propre.

Sur le rayon Sp, les points p et p_1 sont des points virtuels des courbes d'ombre propre et d'ombre portée. La courbe d'ombre portée se compose ainsi d'arcs réels et d'arcs virtuels. Un point m de la courbe de contact est réel, comme point d'ombre, lorsqu'il se trouve en dehors des points de section m_1 et m_2, et alors le premier de ces deux points est réel sur la courbe d'ombre portée. Sur le rayon Sp, le point de contact p est situé entre les deux points de section p_1 et p_2; il est virtuel, et le point p_1 de la courbe d'ombre portée est également virtuel. Les seconds points de section, tels que m_2 et p_2, n'ont jamais d'importance, bien qu'ils appartiennent à la courbe géométrique de l'ombre portée.

Puisqu'un point de contact devient virtuel lorsqu'il passe entre les deux points de section, il est nécessairement réuni à l'un d'eux quand il se trouve à un point limite, et par suite le rayon de lumière a dans ce cas un contact du second ordre avec la surface, ce que nous avons déjà trouvé par des considérations un peu différentes (art. **889**). La ligne d'ombre portée devient virtuelle au même moment. Il résulte de là que *les arcs réels des courbes d'ombre propre et d'ombre portée ont les mêmes points limites.*

902. Considérons la courbe A d'intersection d'une surface à courbures opposées par son plan tangent en m (*fig.* 355). Si un point lumineux S′ est dans ce plan, le point m appartiendra à la courbe d'ombre propre, et l'intersection m_1 du rayon S′m_1 et de la ligne A sera un point de la courbe d'ombre portée. Le plan tangent au cône d'ombre le long de la génératrice S′m touche la surface en m, et par suite la courbe d'ombre portée et la courbe A ont l'une et l'autre pour tangente en m_1 l'intersection des plans tangents aux points m et m_1; elles sont donc tangentes.

Si le point S′ se meut dans le plan, lorsqu'il se trouvera en un point S sur l'une des asymptotes de l'indicatrice du point m, le rayon Sm sera tangent à la courbe A (art. **797**); le point m_1 se sera donc réuni au point m, et la courbe d'ombre portée se sera transportée en se modifiant de manière à passer par ce point; elle y sera tangente à la branche mm_1 de la ligne A, et par suite à la droite mS; cette droite, étant une asymptote de l'indicatrice et passant au point lumineux, sera tangente à la courbe d'ombre propre, et le point m sera un point limite. Nous voyons ainsi que *les courbes d'ombre propre et d'ombre portée se rencontrent tangentiellement aux points limites.*

903. *Étude des lignes d'ombre portée par un tore sur lui-même, et considérations*

générales [1]. — Si l'on coupe le tore représenté sur la *fig.* 358 par une série de plans verticaux contenant le point lumineux (S, S′), on pourra tracer dans chaque section les rayons tangents, déterminer les points où ils coupent la surface, et construire ainsi l'intersection du tore avec le cône d'ombre. On trouve la ligne

$$(\mathrm{GCF}gcf\mathrm{G},\quad \mathrm{G'C'F'}g'c'f'\mathrm{G'});$$

elle rencontre tangentiellement la courbe d'ombre propre aux points limites (G, G′) et (g, g'), et elle a des rebroussements aux points (F, F′) et (f, f') situés sur les rayons des points limites. Cette circonstance, que nous ne nous sommes pas arrêté à signaler dans les articles précédents, résulte de la forme même du cône (art. **891**). Ainsi, lorsque le point de section m_1 (*fig.* 368) se réunit au point de contact m pour former un point limite, le point m_2 devient point de rebroussement de la courbe géométrique de l'ombre portée.

On détermine la tangente au rebroussement (F, F′) en prenant l'intersection du plan tangent au tore en ce point, avec le plan de rebroussement du cône qui est le plan tangent au point (G, G′) (art. **897**). Nous avons fait la construction en prenant pour ligne de terre une droite xy plus rapprochée du tore que XY, afin que tous les tracés fussent dans le cadre de l'épure. La tangente au méridien principal au point F'_1, situé sur le même parallèle que (F, F′), est $\mathrm{F}'_1\alpha'_1$; on trouve d'après cela que la trace horizontale du plan tangent au tore est $\alpha\beta$. La trace du plan de rebroussement pour le cône est la droite $\mathrm{E}_1\beta$ parallèle à EH. La tangente au rebroussement pour le point (F, F′) est donc la droite (Fβ, F′β'). Le point (f, f') étant peu éloigné du parallèle supérieur, le plan qui y est tangent au tore fait un angle très petit avec le plan horizontal, et par suite la tangente au rebroussement de la projection horizontale est à peu près parallèle à eh. Nous ne l'avons pas déterminée d'une manière précise.

Nous avons tracé à une échelle quadruple la partie de la projection verticale de l'intersection voisine du point F′ (*fig.* 358 *bis*), afin d'en bien faire comprendre la forme. Au point (f, f') le plan tangent est à peu près perpendiculaire au plan vertical, et par suite il aurait fallu amplifier considérablement la partie de la figure voisine du point f' pour représenter avec netteté le rebroussement qui s'y trouve.

904. Une génératrice du cône, tangente au tore en un point pris sur l'arc AG et peu éloigné de G [2], va couper le tore en deux points dont le premier appar-

---

(1) Nous rappelons qu'il ne s'agit ici que de la discussion des lignes d'ombre considérées comme formées de parties réelles et de parties virtuelles. Nous avons étudié dans le Livre V toutes les questions qui se rattachent à la construction de ces lignes.

(2) Nos notations se rapportent seulement à la projection horizontale, mais les raisonnements s'appliquent aux lignes et aux points considérés dans l'espace.

tient à la partie réelle de la courbe d'ombre portée. Si le point de tangence s'avance vers le point A, les points de section se rapprochent et arrivent à se confondre en un certain point C qui se trouve nécessairement sur la courbe de contact ag, car la génératrice SC y est tangente à la ligne d'ombre portée, et par suite à la surface. Cette génératrice a d'ailleurs un premier point de contact c sur l'arc AG, elle est donc l'intersection de deux parties distinctes du cône circonscrit; et l'on peut déterminer sa position avec assez de précision en construisant, comme nous l'avons fait, la trace du cône sur un plan XY, et joignant le point double Q de cette courbe au point lumineux (1).

On reconnaît par les mêmes raisonnements, et en considérant les génératrices tangentes aux différents points de l'arc Cg, que le rayon SQ, bitangent au tore, doit toucher la courbe d'ombre portée à son premier point de contact c, comme au second C.

La ligne séparatrice de la partie éclairée et de la partie obscure sur la nappe intérieure du tore se compose de l'arc (AG, A′G′) de la courbe d'ombre propre, de l'arc (GC, G′C′) de la courbe d'ombre portée, et enfin de l'arc (Ca, C′a') de la courbe d'ombre propre.

905. On voit que les courbes d'ombre propre et d'ombre portée peuvent se rencontrer de deux manières différentes, d'abord lorsqu'un point de section m_1 se réunit au point de contact m (*fig.* 368), ensuite lorsque les deux points de section m_1 et m_2 se confondent. Dans ce dernier cas, qui est celui des points C et c (*fig.* 358), les deux courbes sont tangentes à deux diamètres conjugués de l'indicatrice de leur point de rencontre, car la courbe d'ombre portée a pour tangente le rayon de lumière, et cette droite est conjuguée à la tangente à la courbe d'ombre propre (2) (art. **877**). Il résulte de là que ces lignes ne peuvent

(1) On peut déterminer la position du rayon bitangent SQ par les constructions faciles auxquelles conduisent les deux remarques suivantes :

1° Pour que la distance de deux des points d'intersection du tore et d'une transversale rectiligne soit égale à la distance des deux autres, il faut et il suffit que cette transversale soit perpendiculaire à la droite qui joint sa trace sur le plan horizontal I′ J′ au centre (O, O′) de la surface.

On conclut de là que le cône, lieu des droites menées par un point fixe (S, S′), de manière que la somme de deux des segments interceptés entre ce point et le tore, soit égale à la somme des deux autres, a pour trace sur le plan horizontal I′ J′ le cercle décrit sur OS comme diamètre.

2° Le lieu des droites que l'on peut mener par le point (S, S′), de manière que le produit de deux des segments interceptés entre ce point et le tore soit égal au rectangle des deux autres, consiste en deux plans perpendiculaires au plan méridien OS. Pour obtenir leurs traces sur ce plan, il suffit de résoudre le problème suivant qui n'offre pas de difficulté : par un point pris dans le plan de deux cercles, mener une transversale telle que le rapport des segments déterminés par l'un des cercles soit égal au rapport des segments déterminés par l'autre, ces segments étant mesurés à partir du point donné. (Moutard.)

(2) Nous avons fait cette observation avec M. Mannheim.

se rencontrer tangentiellement qu'à un point limite, car elles ne sauraient avoir d'autre tangente commune qu'une asymptote de l'indicatrice.

Les observations que nous venons de présenter peuvent être faites quel que soit le corps qui porte ombre, et par conséquent nous avons le théorème suivant :

Quand sur une surface la courbe d'ombre propre et la courbe d'ombre portée par une autre surface quelconque se rencontrent, ces lignes sont tangentes à deux diamètres conjugués de l'indicatrice du point commun.

906. Si le point S′ s'abaisse, les points a et C se rapprochent l'un de l'autre. Quand le point S′ sera sur la tangente alterne commune des deux cercles A′B′ et $a'b'$, le point C et celui qui lui est symétrique sur la partie non représentée du tore seront confondus avec le point a; les points P, p et Q seront réunis; les deux parties du cône d'ombre se toucheront le long de la génératrice bitangente.

La partie dont la trace est EP touchera le cône au point a, et la courbe d'ombre portée aura un point double au point de contact a. Le point A sera un second point double de cette courbe. On pourra déterminer les tangentes à ces points par la méthode de l'article **865** [1].

Si le point S′ continue à s'abaisser, aucun rayon ne passera dans l'intérieur du tore, et la séparatrice sera composée seulement d'un arc de la ligne d'ombre propre et d'un arc de la ligne d'ombre portée.

907. *Cas où il est nécessaire d'avoir égard aux dimensions des corps lumineux.* — Jusqu'à présent nous avons supposé que les dimensions du corps lumineux pouvaient être négligées; lorsqu'il est nécessaire d'en tenir compte, la surface d'ombre devient une développable circonscrite, mais, le théorème des tangentes conjuguées étant applicable dans ce cas, comme dans celui du cône circonscrit, on est conduit à des conséquences analogues à celles que nous avons exposées

---

[1] On remplacera le tore par un hyperboloïde osculateur, et le cône par un cylindre osculateur. On obtiendra sans difficulté l'hyperboloïde (art. 869); s'il s'agit du point a, le rayon de la section droite du cylindre sera celui de la seconde section principale du tore en A. Il faut remarquer, en effet, que la génératrice Sa appartient à la partie du cône qui est circonscrite au tore le long de la ligne AG. Comme d'ailleurs cette ligne rencontre normalement, au point A, le méridien DB du tore et la génératrice Sa du cône, elle est tangente aux secondes sections principales des deux surfaces; ces sections sont donc dans le plan normal qui contient la tangente à la courbe de contact AG, et par suite leurs rayons de courbure sont égaux, conformément au théorème suivant de Ch. Dupin :

Quand deux surfaces sont tangentes l'une à l'autre le long d'une courbe, leurs sections par un plan tangent à cette courbe ont un contact du troisième ordre.

Pour prouver ce théorème, supposons que l'on fasse passer un plan sécant par deux points M et N de la ligne de contact A : les sections des surfaces seront tangentes en ces points. Si maintenant on transporte le plan de manière à le rendre tangent à la courbe A, les points M et N se confondront, et les sections auront quatre points communs réunis en un seul, ou un contact du troisième ordre.

Si le plan était tangent aux surfaces en un point M de la ligne de contact, le point M serait double dans les deux sections, et ces courbes, bien qu'ayant quatre points réunis en un seul, ne seraient plus tangentes.

dans les articles précédents. Toutefois la complication est un peu plus grande, parce qu'il faut avoir égard aux arcs virtuels de la courbe de contact sur le corps lumineux. Ainsi, lorsqu'une génératrice de la développable se confond avec une des asymptotes de l'indicatrice de son point de contact avec la surface éclairée, ce point n'est un point limite des courbes d'ombre que si la génératrice est extérieure au corps lumineux près du point où elle le touche. Cette observation n'a du reste aucune importance dans la pratique, car les surfaces lumineuses ne sont pas à courbures opposées.

Extension du théorème des tangentes conjuguées.

908. Le théorème des tangentes conjuguées ne donne aucune indication sur la tangente à la courbe d'ombre propre, quand la surface est osculée par un plan au point considéré. Nous allons étudier ce cas à l'aide du Calcul différentiel.

Considérons la surface

$$z = f(x, y); \tag{1}$$

l'équation de son plan tangent en un point est

$$z - z' = p(x - x') + q(y - y');$$

x', y', z' sont les coordonnées variables; x, y, z les coordonnées du point de contact, et p, q les dérivées partielles de la fonction z.

Si le plan tangent contient un point fixe (α, β, γ), on aura

$$z - \gamma = p(x - \alpha) + q(y - \beta). \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) déterminent la ligne de contact de la surface considérée avec le cône circonscrit dont le sommet est au point fixe.

En différentiant l'équation (2), on trouve, pour déterminer l'inclinaison sur l'axe des abscisses de la tangente à la projection de la courbe de contact sur le plan des xy, l'équation

$$[s(x - \alpha) + t(y - \beta)]\frac{dy}{dx} + [r(x - \alpha) + s(y - \beta)] = 0. \tag{3}$$

Quand au point considéré la surface est osculée par un plan, les dérivées r, s et t sont nulles, et $\frac{dy}{dx}$ se présente sous une forme indéterminée. Pour obtenir sa valeur, il faut différentier l'équation (3), en y regardant y comme une fonction de x et $\frac{dy}{dx}$ comme une quantité constante. On trouve

$$\begin{aligned}[w(x - \alpha) + v(y - \beta) + t]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ + 2[u(x - \alpha) + w(y - \beta) + s]\frac{dy}{dx} + [u(x - \alpha) + u(y - \beta) + r] = 0.\end{aligned}$$

Au point considéré, r, s et t sont nulles, et nous avons

$$[w(x-\alpha)+v(y-\beta)]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+2[u(x-\alpha)+w(y-\beta)]\frac{dy}{dx}+[u(x-\alpha)+u(y-\beta)]=0.$$

Cette équation donne deux valeurs pour $\frac{dy}{dx}$; par conséquent, *quand une surface est osculée par un plan, le point de contact est un point double (ou isolé) de la courbe d'ombre, si un point lumineux est situé dans le plan.*

En appelant m le coefficient angulaire de la projection sur le plan des xy du rayon de lumière qui aboutit au point considéré, on a

$$m=\frac{y-\beta}{x-\alpha}.$$

L'équation que nous avons obtenue devient

(4) $$(w+vm)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2(u+wm)\frac{dy}{dx}+(u+um)=0.$$

909. On a identiquement

$$dz=p\,dx+q\,dy+\tfrac{1}{2}(r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2)$$
$$+\frac{1}{2.3}(u\,dx^3+3u\,dx^2\,dy+3w\,dx\,dy^2+v\,dy^3)+\ldots;$$

r, s et t sont nulles au point considéré; p et q seront également nulles si nous supposons le plan des xy parallèle au plan osculateur. Négligeant alors les infiniment petits des ordres supérieurs au troisième, on a

$$dz=\frac{1}{2.3}(u\,dx^3+3u\,dx^2\,dy+3w\,dx\,dy^2+v\,dy^3).$$

dx et dy sont les coordonnées variables de la courbe d'intersection de la surface par un plan parallèle au plan osculateur, et distant de ce plan de la longueur infiniment petite dz. Cette courbe, qui est du troisième ordre, peut être considérée comme remplaçant l'indicatrice.

C étant une grandeur finie quelconque, l'équation

(5) $$ux^3+3ux^2y+3wxy^2+vy^3=C$$

représentera une courbe homothétique de l'indicatrice du troisième ordre. Quand C est nulle, elle donne trois droites que l'on peut considérer comme formant une indicatrice.

Nous désignerons, pour abréger, l'équation (5) par

(6) $$F=0.$$

910. Supposons que l'on trace dans le plan de la courbe (6) une série de droites parallèles, et qu'on prenne sur chacune d'elles les points centraux de ses intersections avec la

courbe, c'est-à-dire les points tels que le produit de leurs distances aux points où la droite coupe la courbe soit un maximum en grandeur absolue, le lieu de ces points sera une courbe que l'on pourra considérer comme le *diamètre* de la proposée *par rapport à la direction des sécantes* [1]. m étant le coefficient angulaire de cette direction, l'équation du diamètre est

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx} + m\frac{d\mathrm{F}}{dy} = 0;$$

ou bien, en prenant les dérivées dans l'équation (5),

$$(3ux^2 + 6uxy + 3wy^2) + m(3ux^2 + 6wxy + 3vy^2) = 0.$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$(w + vm)\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2(u + wm)\frac{y}{x} + (u + um) = 0;$$

elle représente deux droites, car elle est homogène et du second ordre. En la rapprochant de l'équation (4), on voit que ces deux droites sont respectivement tangentes aux deux branches de la courbe d'ombre.

Quand une surface est osculée par un plan en un point, si elle est éclairée par un point lumineux situé dans ce plan, le point d'osculation appartient deux fois à la courbe d'ombre, et les deux branches sont tangentes à deux droites qui forment le diamètre de l'indicatrice du troisième ordre par rapport à la direction du rayon de lumière.

CHAPITRE IV.

LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE ET RELATIVES A SES COURBURES.

§ I. — Lignes de courbure.

Lignes de courbure des surfaces de révolution, des surfaces développables et des surfaces-moulures.

911. Nous avons vu à l'article **820** qu'il existe sur toute surface deux séries de lignes tangentes en chacun de leurs points à une section principale, et nous avons dit que Monge les avait appelées *lignes de courbure*. Une courbe tracée sur une surface en est une ligne de courbure quand le lieu des normales à la surface en ses différents points est une développable. Lorsque l'on connaît les

[1] Voir les *Études analytiques sur la théorie des courbes planes*, par M. Félix Lucas, p. 8 et 9. Ces dernières considérations peuvent être rattachées à la théorie des polaires des divers ordres.

lignes de courbure de l'une des séries, on obtient celles de l'autre série en traçant des courbes qui les coupent toutes à angle droit, c'est-à-dire leurs *trajectoires orthogonales*.

Sur une surface de révolution, les lignes de courbure sont les méridiens et les parallèles, car les normales aux différents points d'un méridien sont dans le plan de cette courbe, et les normales aux divers points d'un parallèle forment un cône.

Quand l'axe perce la surface, tous les méridiens passent au point de rencontre, et par exception il y a en ce point une infinité de lignes de courbure. Si l'axe est normal à la méridienne, toutes les sections normales sont identiques, et le point est un ombilic (art. **793**). Si la méridienne coupe obliquement l'axe, la surface a une infinité de plans tangents au point d'intersection de ces lignes; chaque méridien est une section principale par rapport à l'un d'eux; l'autre section principale est le parallèle dont le rayon est nul.

Les normales à la sphère se rencontrent toutes au centre, et par suite une courbe quelconque tracée sur cette surface peut être considérée comme une ligne de courbure. Chaque point d'une sphère est un ombilic, et tout grand cercle peut être regardé comme une section principale à l'un quelconque de ses points.

912. Les génératrices rectilignes d'une développable en sont des lignes de courbure, car les normales à la surface aux différents points de l'une de ces droites forment un plan. Les lignes de courbure de la seconde série sont les trajectoires orthogonales des génératrices ou les développantes de l'arête de rebroussement (art. **436**, **441**). Sur un cylindre ces lignes sont les sections droites, et sur un cône les sections par des sphères ayant leur centre au sommet.

913. Considérons dans un plan une courbe AB et une droite G (*fig.* 361) : si le plan se meut en restant normal à un cylindre directeur, de manière que la droite G occupe successivement la position des diverses génératrices rectilignes de cette surface, et que chacun de ses points en décrive une section droite, la courbe AB, qui occupe une position invariable par rapport à G, décrira une surface que l'on appelle *surface-moulure*.

Dans le mouvement, une droite Mm perpendiculaire à G est toujours normale à la section droite décrite par le point m; sa longueur est constante : les courbes décrites par les points M et m ont donc une même développée, et par suite le plan mobile est perpendiculaire sur la tangente à la trajectoire du point M, c'est-à-dire qu'il est normal à la surface-moulure en un point quelconque de la courbe AB. Cette génératrice curviligne forme donc dans ses différentes positions les lignes de courbure de l'une des séries. Les lignes de la seconde série sont les courbes décrites par les différents points de AB.

Une surface-moulure peut être considérée comme l'enveloppe des positions

d'une surface de révolution dont l'axe se meut sur un cylindre de manière que ses différents points en décrivent des sections droites [1].

Observations pour la détermination des lignes de courbure de quelques surfaces.

914. *Lorsque sur une surface enveloppe les caractéristiques sont des lignes de courbure, elles sont aussi lignes de courbure sur les enveloppées,* car une enveloppe et l'une quelconque de ses enveloppées ont les mêmes normales aux divers points de la caractéristique correspondante. La proposition réciproque est évidemment vraie; elle donne un moyen de déterminer les lignes de courbure de quelques surfaces, et notamment de celles qui sont enveloppes d'une sphère mobile.

Quand un plan coupe une surface sous une inclinaison constante, l'intersection est une ligne de courbure de la surface, car les droites qui lui sont normales aux divers points de cette courbe sont également inclinées sur le plan; la surface qu'elles forment est donc d'égale pente et par suite développable (art. **545**) [2].

Théorème de Ch. Dupin sur les surfaces orthogonales.

915. On parvient quelquefois à déterminer les lignes de courbure par la considération des *surfaces orthogonales,* c'est-à-dire des surfaces qui se coupent à angle droit sur toute l'étendue de leur intersection.

Considérons trois surfaces orthogonales qui se croisent en un point A (*fig.* 360); soient AX, AY et AZ les tangentes aux lignes suivant lesquelles elles se coupent deux à deux : nous appellerons *première surface* celle qui est normale à la droite AZ, *seconde et troisième surfaces* celles qui sont respectivement normales aux droites AY et AX.

Nous prenons sur ces lignes, que nous considérons comme des axes, des points P, N et M à des distances du point A infiniment petites et égales.

Le point M appartient aux deux premières surfaces qui s'y coupent à angle droit, comme à tous les autres points de leur intersection. En désignant par α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2 les angles que les normales à ces surfaces au point M font avec les axes, nous avons

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0.$$

---

(1) MONGE, *Application de l'Analyse à la Géométrie,* § XVII.

(2) Cette proposition est due à Joachimsthal. Il existe un théorème plus général qui consiste en ce que, quand deux surfaces se coupent sous un angle constant, si leur intersection est une ligne de courbure de l'une d'elles, elle est aussi une ligne de courbure de l'autre.

Les angles α_1, β_1, α_2, γ_2 diffèrent infiniment peu d'un droit, les angles γ_1 et β_2 sont infiniment petits. On a par conséquent, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\cos\beta_1 + \cos\gamma_2 = 0. \tag{1}$$

En appelant α'_1, β'_1, γ'_1 et α'_3, β'_3, γ'_3 les angles que les normales aux première et troisième surfaces au point N font avec les axes, on trouve

$$\cos\gamma'_3 + \cos\alpha'_1 = 0.$$

Enfin, en nommant α''_2, β''_2, γ''_2 et α''_3, β''_3, γ''_3 les angles que les normales aux seconde et troisième surfaces au point P font avec les axes, on a

$$\cos\alpha''_2 + \cos\beta''_3 = 0. \tag{3}$$

Les longueurs infiniment petites AM et AN étant égales, le théorème de M. J. Bertrand (art. **783**) donne

$$\cos\beta_1 = \cos\alpha'_1, \tag{4}$$

car les angles β_1 et α'_1 sont complémentaires des angles que les normales à la première surface aux points M et N font respectivement avec les plans normaux et rectangulaires ZAX et ZAY. On trouve de la même manière

$$\cos\alpha''_2 = \cos\gamma_2, \quad \cos\gamma'_3 = \cos\beta''_3. \tag{5}$$

Ajoutant les équations (1) et (2) et ayant égard à l'équation (4), on obtient

$$2\cos\beta_1 + \cos\gamma_2 + \cos\gamma'_3 = 0.$$

Les équations (3) et (5) donnent d'ailleurs

$$\cos\gamma_2 + \cos\gamma'_3 = 0.$$

On a donc

$$\cos\beta_1 = 0.$$

Nous voyons que la déviation de la normale à la première surface au point M est nulle, et que par suite la droite AX est tangente à une ligne de courbure de cette surface; elle est également tangente à une ligne de courbure de la troisième surface, et chacun des autres axes jouit d'une propriété analogue pour les deux surfaces dont il touche l'intersection.

Il résulte immédiatement de là que, *si trois séries de surfaces sont telles que les surfaces de chaque série coupent partout à angle droit celles des deux autres séries, chaque courbe d'intersection est à la fois une ligne de courbure pour les deux surfaces de différentes séries auxquelles elle appartient* (¹).

Surfaces du second ordre orthogonales.

916. Deux surfaces du second ordre ayant les mêmes plans principaux peuvent être représentées par les équations

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2}=1,\quad \frac{x^2}{m'^2}+\frac{y^2}{n'^2}+\frac{z^2}{p'^2}=1.$$

En désignant les coordonnées variables par X, Y et Z, on trouve que les équations des plans tangents en un point commun (x, y, z) sont

$$\frac{x}{m^2}X+\frac{y}{n^2}Y+\frac{z}{p^2}Z=1,\quad \frac{x}{m'^2}X+\frac{y}{n'^2}Y+\frac{z}{p'^2}Z=1.$$

Pour que ces plans soient rectangulaires, il faut que l'on ait

$$\frac{x^2}{m^2m'^2}+\frac{y^2}{n^2n'^2}+\frac{z^2}{p^2p'^2}=0.$$

Cette équation représente un cône du second ordre, dont les axes sont dirigés selon les axes coordonnés; par conséquent, *quand deux surfaces du second ordre ont les mêmes plans principaux, tous les points où elles se coupent à angle droit appartiennent à un cône de cet ordre qui a les mêmes plans principaux*. D'après un théorème connu (art. **249**), les courbes d'intersection des trois surfaces considérées deux à deux se projettent sur un quelconque des plans coordonnés suivant des coniques. Les sommets de ces projections sont les projections des points des courbes situés dans les autres plans principaux.

Si les sections principales de deux surfaces du second ordre se rencontrent à angle droit, les surfaces elles-mêmes se couperont sous cet angle aux points où leur intersection perce les plans principaux, et ces points appartiendront au cône. Alors le cône et les surfaces que nous considérons se couperont deux à deux suivant trois courbes qui, projetées sur les plans principaux, seront du second ordre et auront tous leurs sommets (réels ou imaginaires) communs; elles

(¹) Ch. Dupin a donné ce théorème dans ses *Développements de Géométrie* (4ᵉ Mémoire). La démonstration que nous avons adoptée est de M. J. Bertrand (*Journal de Mathématiques*, 1844).

seront donc identiques, et par suite *deux surfaces du second ordre ayant les mêmes plans principaux sont orthogonales quand leurs sections principales se coupent à angle droit.*

917. *Quand une ellipse et une hyperbole ont les mêmes foyers, elles se rencontrent à angle droit,* car leurs tangentes en chacun des points communs sont les bissectrices des angles supplémentaires que comprennent les mêmes rayons vecteurs.

Réciproquement, *une ellipse et une hyperbole sont homofocales quand elles ont les mêmes axes et qu'elles se coupent à angle droit,* car l'hyperbole qui passe par les quatre points de rencontre des deux courbes et qui a les mêmes foyers que l'ellipse touche l'hyperbole donnée en quatre points, et par suite se confond avec elle.

De ce théorème et de celui qui a été démontré à l'article précédent, il résulte que *deux surfaces du second ordre sont orthogonales quand leurs sections principales sont homofocales.* On dit alors que les surfaces sont *homofocales.*

Lignes de courbure des surfaces du second ordre.

918. Considérons la surface du second ordre représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2-m^2}+\frac{y^2}{b^2-m^2}+\frac{z^2}{c^2-m^2}=1. \tag{1}$$

Les axes coordonnés sont rectangulaires; a^2, b^2, c^2 sont des coefficients et m^2 une constante arbitraire.

Les différences des carrés des demi-axes sont indépendantes des valeurs de m^2, et par suite, si l'on fait passer cette constante par tous les états de grandeur depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, toutes les surfaces données par l'équation auront leurs sections principales homofocales.

Quand m^2 est négative et très grande, la surface est un ellipsoïde; si l'on fait varier m^2 comme nous l'avons indiqué, le premier membre de l'équation (1) arrivera à contenir un terme négatif, puis deux et enfin trois; on aura dans ce dernier cas un ellipsoïde imaginaire.

En ne considérant que les surfaces réelles, nous voyons que le système complet des homofocales représentées par l'équation (1) comprend trois séries composées, la première d'ellipsoïdes, la seconde d'hyperboloïdes à une nappe, et la troisième d'hyperboloïdes à deux nappes. La transition d'une série à l'autre se fait par une surface ayant un axe nul, c'est-à-dire par une conique. Nous avons trouvé des dispositions analogues dans le système des surfaces du second ordre qui peuvent être inscrites dans une même développable (art. **526**) [1].

---

[1] Nous avons déjà eu l'occasion de considérer les surfaces du second ordre homofocales (art. 544).

919. *Par un point quelconque de l'espace on peut faire passer une surface de chaque série.* — On le reconnaît facilement par la discussion directe des séries; ainsi, les ellipsoïdes forment une suite continue depuis l'aire d'une ellipse jusqu'à une surface dont les axes sont infinis, et par suite ils remplissent l'espace de leurs points.

L'équation (1) va nous conduire aux mêmes résultats; on peut la mettre sous la forme

$$(b^2-m^2)(c^2-m^2)x^2+(a^2-m^2)(c^2-m^2)y^2+(a^2-m^2)(b^2-m^2)z^2 \\ -(a^2-m^2)(b^2-m^2)(c^2-m^2)=0.$$

Si x, y et z sont les coordonnées d'un point donné, on aura une équation du troisième degré pour déterminer la constante m^2 qui particularise la surface à laquelle appartient ce point. On peut supposer que a^2 est plus grand que b^2, et b^2 plus grand que c^2; alors, en faisant successivement m^2 égal à a^2, b^2, c^2 et $-\infty$, on trouve des valeurs alternativement positives et négatives pour le polynôme qui forme le premier membre de l'équation. Les trois valeurs de m^2 sont donc toujours réelles, et les surfaces qu'elles déterminent appartiennent à des séries différentes.

920. Il résulte de ces diverses considérations, et des théorèmes démontrés aux articles **916** et **917**, que les surfaces des trois séries représentées par l'équation (1) sont orthogonales, et par suite que leurs intersections mutuelles sont leurs lignes de courbure.

Considérons spécialement la surface qui correspond à la valeur 0 de m^2 et dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{2}$$

Nous aurons ses lignes de courbure en prenant son intersection avec l'ensemble des surfaces représentées par l'équation (1).

L'élimination de z entre les équations (1) et (2) donne

$$\frac{a^2-c^2}{a^2-m^2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2-c^2}{b^2-m^2}\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

La projection d'une ligne de courbure d'une surface du second ordre sur l'un quelconque de ses plans principaux est une conique.

En appelant a' et b' les demi-axes de cette courbe considérée comme une ellipse, nous avons

$$a'^2=\frac{a^2-m^2}{a^2-c^2}a^2, \quad b'^2=\frac{b^2-m^2}{b^2-c^2}b^2. \tag{4}$$

L'élimination de m^2 entre ces équations donne

$$(5)\qquad \frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}\,\frac{a'^2}{a^2}+\frac{b^2-c^2}{b^2-a^2}\,\frac{b'^2}{b^2}=1.$$

On voit que les demi-axes des coniques, projections des lignes de courbure sur un plan principal, sont les coordonnées d'une autre conique. On a, pour déterminer les demi-axes α et β de cette *courbe auxiliaire* considérée comme une ellipse, les équations

$$(6)\qquad \alpha^2=\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}a^2,\quad \beta^2=\frac{b^2-a^2}{b^2-c^2}b^2.$$

921. *Lignes de courbure de l'ellipsoïde scalène.* — Pour discuter les équations que nous venons d'obtenir et en déduire des constructions, nous devons faire des hypothèses sur les signes des carrés a^2, b^2 et c^2, et sur leurs grandeurs relatives. Nous supposons que l'on a

$$(7)\qquad a^2>b^2,\quad b^2>c^2,\quad c^2>0,$$

c'est-à-dire que nous considérons la projection des lignes de courbure d'un ellipsoïde scalène sur le plan de l'axe majeur et de l'axe moyen.

Les équations (6) donnent une valeur positive pour α^2 et une valeur négative pour β^2; la conique auxiliaire est donc une hyperbole.

La *fig.* 363 montre la construction des longueurs réelles α et $\beta\sqrt{-1}$. La courbe ADB est la moitié de la section de l'ellipsoïde située dans le plan de projection; le point F est un de ses foyers. Les courbes V et U sont les rabattements autour des axes KA et KD des autres sections principales. Le point f est un foyer de la première de ces ellipses; le point f_1, un foyer de la seconde.

D'après les équations (6) nous avons

$$\alpha=\frac{\mathrm{KF}}{\mathrm{K}f}\mathrm{KB}=\mathrm{KO},\quad \beta\sqrt{-1}=\frac{\mathrm{KF}}{\mathrm{K}f_1}\mathrm{KD}=\mathrm{KG}.$$

Lorsque l'on connaît les longueurs α et $\beta\sqrt{-1}$, on peut tracer l'arc OI de l'hyperbole auxiliaire. Sur la *fig.* 365, dont l'échelle est double, nous avons établi cet arc sans reproduire la construction pour déterminer les axes.

D'après nos hypothèses, α est nécessairement plus petit que a, et le point O est entre les points K et B.

Si nous attribuons à a' une valeur déterminée KN (*fig.* 365), l'ordonnée NH sera la grandeur correspondante de b'. L'ellipse $\mathrm{NMN_1M_1}$, qui a pour axes les doubles des longueurs KN et NH, est la projection d'une ligne de courbure.

Quand on donne à a' une longueur KP plus petite que KO, l'ordonnée b' de l'hyperbole OI est imaginaire, et par suite la ligne de courbure correspondante a pour projection une hyperbole dont l'axe non transverse se trouve sur la droite KD. Si nous appelons b_1 la moitié de la longueur réelle de cet axe, nous aurons

$$b_1^2 = -b^2.$$

L'équation (5) deviendra

$$(5\ bis) \qquad \frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}\frac{a'^2}{a^2} - \frac{b^2-c^2}{b^2-a^2}\frac{b_1'^2}{b^2} = 1.$$

En appelant α et β_1 les demi-axes de cette conique, nous aurons

$$(6\ bis) \qquad \alpha^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}a^2, \quad \beta_1^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}b^2.$$

α et β_1 sont les longueurs KO et KG (*fig.* 363); la *seconde auxiliaire* est donc une ellipse OG (*fig.* 365). L'hyperbole RR_1SS_1 qui passe au point P a pour axes les doubles de l'abscisse KP et de l'ordonnée correspondante KQ.

922. Pour donner de la régularité à la répartition des lignes de courbure, nous avons tracé la courbe D_1eD, rabattement sur le plan de projection de la moitié de la section principale contenue dans le plan passant par l'axe mineur et par l'axe moyen ; nous avons partagé cette ligne en parties sensiblement égales, nous avons projeté les points de division sur D_1D, et par ces projections nous avons fait passer des ellipses. On pourrait déterminer les sommets des hyperboles, en divisant d'une manière analogue l'arc appartenant à la troisième section principale et projeté sur OO_1. Cette construction n'est pas faite sur l'épure de Monge que nous avons voulu reproduire sans altération.

Les ellipses principales sont des lignes de courbure, car leurs plans coupent normalement l'ellipsoïde. Les lignes de courbure qui se projettent suivant des ellipses ne se rencontrent pas, et par suite elles appartiennent à une même série ; celles dont les projections sont des hyperboles rencontrent les premières et dépendent de l'autre série.

L'ellipse principale contenue dans le plan DD_1 appartient à la série des lignes de courbure dont les projections sont des hyperboles; celle qui est dans le plan AB de l'axe majeur et de l'axe mineur appartient à la même série pour les parties qui se projettent sur les segments BO et AO_1, et à l'autre série pour la partie projetée sur OO_1; elle forme donc une transition, et elle est la seule qui passe aux points O et O_1.

923. Le point projeté en O est rabattu en T sur l'ellipse V dont les demi-axes sont a et c (*fig.* 363). Nous avons trouvé

$$\overline{KO}^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}a^2; \quad \text{d'où} \quad \overline{OT}^2 = \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}c^2;$$

ajoutant ces deux équations, on obtient

$$\overline{\mathrm{KT}} = a^2 - b^2 + c^2.$$

Si KJ est le diamètre de V conjugué à KT, nous aurons

$$\overline{\mathrm{KJ}}^2 + \overline{\mathrm{KT}}^2 = a^2 + c^2, \quad \text{et par suite} \quad \mathrm{KJ} = b.$$

La section diamétrale conjuguée à KT est un cercle, car ses axes KD et KJ ont des longueurs égales. L'indicatrice du point T lui est d'ailleurs homothétique (art. **795**); les rayons de courbure des sections normales en ce point sont donc égaux. En résumé, les points O et O_1 de la surface (*fig.* 365), par lesquels il ne passe qu'une ligne de courbure, sont des ombilics.

Les hyperboles sont parasites au delà des points où elles rencontrent l'ellipse $\mathrm{ADBD_1}$ (*fig.* 365); les ellipses sont utiles sur toute leur longueur, mais si l'on attribuait à a' une valeur supérieure à KB, la valeur correspondante de b' serait plus grande que KD, et l'ellipse déterminée par ces demi-axes serait entièrement parasite.

924. Nous allons maintenant chercher la projection des lignes de courbure de l'ellipsoïde scalène sur le plan qui contient l'axe majeur et le petit axe.

Pour approprier à cette projection les équations de l'article précédent, il suffit d'y remplacer

$$y^2,\ z^2,\ b^2,\ c^2,\ a'^2,\ b'^2,\ \alpha^2 \text{ et } \beta^2$$

par

$$z^2,\ y^2,\ c^2,\ b^2,\ a_1'^2,\ c_1'^2,\ \alpha_1^2 \text{ et } \gamma_1^2.$$

$a_1'^2$, $c_1'^2$, α_1^2 et γ_1^2 sont de nouvelles quantités qui sont suffisamment définies par la substitution que nous venons d'indiquer.

Les équations (6) deviennent

$$(8) \qquad \alpha_1^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2} a^2, \quad \gamma_1^2 = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2} c^2.$$

Il résulte de nos hypothèses que α_1^2 et γ_1^2 sont positifs, et par suite que la conique auxiliaire est une ellipse XΓ (*fig.* 362). Nous déterminons ses axes α_1 et γ_1 par une construction analogue à celle qui a été expliquée à l'article **921**, et nous reportons leurs longueurs KX et KΓ à une échelle double sur la *fig.* 364. L'ellipse $\mathrm{A'EB'E_1}$ y représente la section de l'ellipsoïde par le plan de projection.

Il est facile de voir que α_1 et γ_1 sont respectivement plus grands que a et c : les points X et Γ se trouvent donc en dehors de l'ellipse $\mathrm{A'EB'E_1}$; d'après cela, quelque position que l'on assigne au sommet d'une conique sur KB' ou sur KE,

qu'on le place en φ' ou en μ, on trouvera toujours une seconde coordonnée réelle $\varphi'\chi$ ou $\mu\xi$. Les projections des lignes de courbure sont donc des ellipses, et l'arc XΓ de la conique auxiliaire suffit pour les déterminer.

925. En faisant les substitutions convenables dans l'équation (3), on obtient, pour équation générale des coniques projections des lignes de courbure sur le plan de l'axe majeur et de l'axe moyen,

$$(9) \qquad \frac{a^2-b^2}{a^2-m^2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2-c^2}{m^2-c^2}\frac{z^2}{c^2}=1.$$

La droite qui passe par deux des sommets de l'ellipse auxiliaire non situés sur un même axe a pour équation

$$(10) \qquad \frac{x}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}+\frac{z}{c}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}}=1.$$

Si l'on suppose que chaque radical porte avec lui le double signe, cette équation représentera l'une quelconque des quatre droites indéfinies qui forment les côtés du losange XΓX′Γ′.

L'élimination de z entre les équations (9) et (10) donne

$$(11) \qquad \frac{c^2-a^2}{a^2-m^2}(a^2-b^2)\frac{x^2}{a^2}-\frac{2x}{a}\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}+(m^2-a^2)=0.$$

Les deux racines de cette équation sont égales quelle que soit m, par conséquent toutes les coniques représentées par l'équation (9) sont tangentes aux droites XΓ, ΓX′, X′Γ′, Γ′X, et le système de ces quatre lignes forme leur enveloppe.

Quand m^2 égale b^2, l'équation (9) détermine l'ellipse principale $A'EB'E_1$. En introduisant cette valeur de m^2 dans l'équation (11), et résolvant, on obtient

$$x=a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}.$$

Cette valeur est précisément celle que donne la première des équations (6) pour la longueur α qui représente l'abscisse des points O et O_1 (*fig.* 365). Les ombilics sont donc les points de contact de l'ellipse principale $A'EB'E_1$ avec les côtés du losange circonscrit XΓX′Γ′.

926. Quand on donne à a'_1 une valeur plus grande que KX (*fig.* 364), l'ordonnée c'_1 de l'ellipse auxiliaire XΓ est imaginaire, et la conique correspondante est une hyperbole. Pour déterminer la longueur réelle $c'_1\sqrt{-1}$, on peut tracer une *seconde auxiliaire* qui sera une hyperbole, ayant pour axe transverse X′X et pour axe non transverse ΓΓ′.

La série générale des coniques représentées par l'équation (9) comprend donc des hyperboles ayant leurs sommets sur la droite XX′, au delà des points X et X′; elle en comprend aussi qui ont leurs sommets sur la droite ΓΓ′, au delà des points Γ et Γ′ : on pourrait déterminer leurs axes par une *troisième auxiliaire*. Ces deux suites d'hyperboles ont respectivement pour enveloppes les prolongements des côtés du losange au delà des points X et X′ et au delà des points Γ et Γ′.

927. *Observations sur les parties parasites des projections des lignes de courbure de l'ellipsoïde scalène.* — Le système général de coniques déterminé par l'hyperbole auxiliaire OI (*fig.* 365) forme les projections des lignes de courbure de toutes les surfaces du second ordre dont les demi-axes a, b et c satisfont aux deux équations (6).

Si nous nous donnons arbitrairement l'excentricité absolue e de la section faite dans la surface considérée par le plan de projection, nous aurons pour déterminer a, b et c les équations

$$a^2 - b^2 = e^2, \quad (a^2 - c^2)\alpha^2 = a^2 e^2, \quad (b^2 - c^2)\beta^2 = - b^2 e^2,$$

desquelles on déduit

$$a^2 = \frac{\beta^2 + e^2}{\alpha^2 + \beta^2}\alpha^2, \quad b^2 = \frac{\alpha^2 - e^2}{\alpha^2 + \beta^2}\beta^2, \quad c^2 = \frac{(\alpha^2 - e^2)(\beta^2 + e^2)}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

En faisant passer la quantité e^2 par tous les états de grandeur, nous aurons les systèmes d'axes des surfaces du second ordre dont les lignes de courbure se projettent sur les deux séries de coniques que représente la *fig.* 365.

D'après les hypothèses (7) et eu égard aux équations (6), on a

$$\alpha^2 > 0, \quad \beta^2 < 0, \quad \alpha^2 < -\beta^2.$$

On trouve facilement les résultats ci-dessous :

	e^2 NÉGATIVE.	e^2 COMPRISE ENTRE o et α^2.	e^2 COMPRISE ENTRE α^2 et $-\beta^2$.	e^2 PLUS GRANDE QUE $-\beta^2$.
a^2	Positif...........	Positif...........	Positif...........	Négatif et plus petit que b^2 en grandeur absolue.
b^2	Positif...........	Positif...........	Négatif...........	Négatif...........
c^2	Positif et plus grand que a^2 et b^2.	Positif et plus petit que a^2 et b^2.	Négatif et plus petit que b^2 en grandeur absolue.	Positif...........

Quand e^2 est négative, nous trouvons un ellipsoïde projeté sur le plan de l'axe mineur et de l'axe moyen : les points O et O_1 sont sur le premier. Les grands axes des ellipses qui sont dessinées étant sur AB, on ne voit pas immédiatement comment la disposition que nous indiquons peut être réalisée ; mais il faut remarquer que la grandeur absolue de β^2 étant supérieure à α^2, l'angle des asymptotes de l'hyperbole auxiliaire est obtus, et que par suite, à partir d'un certain point, les valeurs de b' surpassent celles de a' ; il en résulte qu'une des ellipses de la série générale est un cercle, et que celles qui la suivent ont leur grand axe sur la droite indéfinie $D_1 D$.

Lorsque e^2 est positive et plus petite que α^2, les surfaces sont des ellipsoïdes projetés sur le plan de l'axe majeur et de l'axe moyen. La figure est établie spécialement pour ce cas.

Quand e^2 est comprise entre α^2 et $-\beta^2$, on obtient des hyperboloïdes à deux nappes projetés sur le plan qui contient le plus grand des deux axes non transverses et l'axe transverse; les points O et O_1 sont sur ce dernier. Les ellipses ont chacune deux arcs utiles et deux parasites; les hyperboles qui se trouvent en dedans du contour apparent sont utiles, les autres parasites.

Enfin, lorsque e^2 est plus grande que $-\beta^2$, on a des hyperboloïdes à deux nappes projetés sur le plan des deux axes non transverses : les points O et O_1 sont sur le plus petit des deux. Les ellipses et les hyperboles sont utiles sur toute leur longueur.

928. On trouve par des raisonnements analogues que les coniques qui sont tangentes aux quatre côtés du losange $X\Gamma X'\Gamma'$ (*fig.* 364) sont les projections des lignes de courbure d'une série d'ellipsoïdes et de deux séries d'hyperboloïdes à deux nappes. Le plan de projection contient l'axe majeur et l'axe mineur de chaque ellipsoïde, l'axe transverse et l'axe non transverse mineur de chaque hyperboloïde.

On peut dire d'une manière générale que les dispositions représentées en partie sur les *fig.* 364 et 365 sont celles des lignes de courbure de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde à deux nappes, projetées sur le plan des ombilics et sur un autre des plans principaux.

929. Il nous resterait à étudier les lignes de courbure de l'hyperboloïde à une nappe, mais nous nous bornerons à quelques observations. Sur le plan de l'ellipse de gorge, les coniques sont à peu près disposées comme celles de la *fig.* 365 : l'angle des asymptotes de l'hyperbole auxiliaire est aigu, et par suite toutes les ellipses ont leur grand axe sur la même droite. Les points O et O_1 sont dans l'intérieur de l'ellipse de gorge, et appartiennent à un segment parasite de la projection de la section par le plan qui contient l'axe non transverse et l'axe transverse majeur : l'hyperboloïde gauche, étant une surface à courbures opposées, ne peut en effet avoir d'ombilics.

Sur le plan de l'axe non transverse et de l'axe transverse mineur, la courbe auxiliaire est une ellipse imaginaire. Cela indique qu'à toute valeur réelle de a' ou b' correspond une grandeur imaginaire pour b' ou a', et que par suite les courbes des deux séries sont des hyperboles telles que les axes transverses des unes et les axes non transverses des autres sont sur une même droite. En remplaçant successivement β^2 par $-\beta_1^2$ et γ^2 par $-\gamma_1^2$, on obtient deux hyperboles qui font respectivement connaître les axes des coniques des deux séries.

Observations sur les dispositions des lignes de courbure près d'un ombilic.

930. Les raisonnements que nous avons présentés à l'article **820** pour établir qu'il passe deux lignes de courbure en chaque point d'une surface ne subsistent pas pour un ombilic, car l'équation (20) de l'article **811** montre qu'en un tel point la déviation est nulle dans toutes les directions; mais, comme la même circonstance n'a pas lieu aux points voisins, les surfaces lieux des normales aux divers points d'une courbe qui passe à un ombilic sont en général gauches, et n'ont de remarquable que d'avoir un sommet sur la génératrice qui rencontre la surface considérée à l'ombilic.

Les lignes de courbure présentent près des ombilics diverses dispositions. Nous constaterons ici celles que l'on rencontre sur les surfaces que nous connaissons.

1° Sur les surfaces du second ordre, une seule ligne de courbure passe à un ombilic; elle forme transition entre les deux séries.

2° Quand une méridienne est rencontrée normalement par l'axe, le point commun est un ombilic de la surface de révolution. Une infinité de lignes de courbure, toutes de la même série, passent à ce point.

3° Quand le centre de courbure C d'une méridienne pour un point M est sur l'axe de révolution, les points du parallèle décrit par le point M sont des ombilics. Deux lignes de courbure, un méridien et le parallèle, passent à chacun d'eux.

Les méridiens sont en général les lignes de plus grande courbure d'un côté du parallèle, et de plus petite courbure de l'autre côté.

Monge a appelé *lignes des courbures sphériques* les lignes dont tous les points sont des ombilics.

4° Sur la sphère, tous les points sont des ombilics, et une courbe quelconque peut être considérée comme ligne de courbure.

Mesure de la courbure d'une surface en un point.

931. La considération des lignes de courbure est d'une grande utilité dans diverses recherches géométriques. Nous allons en donner un exemple.

Soit, sur une surface, un rectangle ACDB (*fig.* 369) dans lequel deux côtés opposés appartiennent à deux lignes de courbure infiniment voisines : les côtés de ce rectangle étant infiniment petits doivent être considérés comme rectilignes et égaux deux à deux. La normale à la surface au point A rencontre les normales aux sommets B et C en des points P et Q. Les segments AP et AQ sont les rayons principaux R_1 et R_2, et, en appelant ε et η les angles APB et AQC, on a

$$AB = R_1 \varepsilon, \quad AC = R_2 \eta.$$

L'aire ABDC doit être par conséquent égale à $R_1 R_2 \varepsilon\eta$.

Supposons maintenant que par le centre o d'une sphère d'un rayon égal à l'unité, on fasse passer quatre plans respectivement parallèles aux plans qui contiennent les normales en deux sommets voisins du rectangle ABDC, on déterminera sur la sphère un rectangle *abdc*, dont l'aire sera $\varepsilon\eta$, et l'on aura

$$\frac{abdc}{\text{ABDC}} = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

On peut regarder le périmètre *abdc* comme le lieu des pieds des rayons parallèles aux normales aux différents points du périmètre ABDC.

La forme rectangulaire n'a aucune importance pour le résultat que nous venons d'obtenir, car, quelle que soit l'aire infiniment petite considérée, on peut toujours la concevoir divisée en rectangles dont les côtés ayant des longueurs infiniment petites du second ordre seront dirigés sur les lignes de courbure.

Nous voyons d'après cela que *si, par le centre d'une sphère d'un rayon égal à l'unité, on mène des droites parallèles aux normales à une surface aux différents points du périmètre d'une aire infiniment petite, on déterminera sur la sphère une aire dont le rapport à l'aire considérée sera égal à l'unité divisée par le produit des rayons de courbure principaux de la surface* [1]. Gauss a appelé ce rapport *mesure de la courbure;* en adoptant cette définition, on doit considérer la courbure comme positive ou négative, suivant que la surface est convexe ou à courbures opposées.

---

[1] On peut voir pour ce théorème une Note de Binet sur un Mémoire par Olinde Rodrigues, dans le troisième Volume de la *Correspondance de l'École Polytechnique*.

§ II. — Lignes asymptotiques.

Considérations générales.

932. Nous avons dit à l'article **820** que, sur une surface, une ligne asymptotique est une courbe tangente en chaque point à une asymptote de l'indicatrice de ce point. Il résulte de cette définition et du théorème de l'article **818** que *tous les plans osculateurs d'une ligne asymptotique d'une surface sont tangents à cette surface.* Nous avons dû faire, il est vrai, dans l'énoncé de la proposition de l'article **818**, cette restriction que le contact de la courbe avec une asymptote de l'indicatrice soit seulement du premier ordre, mais une ligne ne peut avoir des inflexions qu'en des points singuliers.

Réciproquement, et en vertu d'un théorème que nous avons établi à l'article **797**, *une courbe tracée sur une surface est asymptotique, quand chacun de ses plans osculateurs est tangent à la surface.*

Lignes asymptotiques des surfaces gauches.

933. Les surfaces du second ordre ont pour asymptotiques des droites qui ne sont réelles que pour l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique.

Sur une surface gauche, les génératrices sont les asymptotiques de l'une des séries, et on appelle spécialement *asymptotiques* celles de ces lignes qui appartiennent à la seconde série.

Considérons une génératrice G et appelons G′ la génératrice qui lui est infiniment voisine : G′ appartient à l'hyperboloïde osculateur le long de G. Les génératrices du second système de cet hyperboloïde sont tangentes aux asymptotiques de la surface, et par suite quatre de ces lignes interceptent sur G et sur G′ des segments dont les rapports anharmoniques sont égaux (art. **699**), même en ayant égard aux infiniment petits du premier ordre. Les quatre asymptotiques coupent successivement les diverses génératrices, et, d'après ce que nous venons de voir, le rapport anharmonique des points de rencontre est invariable de l'une à l'autre. Nous avons donc ce théorème : *Dans toute surface gauche, le rapport anharmonique des points où quatre asymptotiques déterminées rencontrent deux génératrices quelconques est constant.* On peut encore dire (art. **699**, note) que *les points où les lignes asymptotiques d'une surface gauche coupent deux génératrices quelconques forment sur ces droites des divisions homographiques.*

Quand la surface est un conoïde, les hyperboloïdes osculateurs sont des paraboloïdes, et, en raisonnant comme précédemment, on trouve que les *asym-*

ptotiques interceptent sur deux génératrices quelconques des segments proportionnels (art. **610**) [1].

934. Quand une génératrice passe à un sommet, elle n'est pas croisée à ses différents points par les asymptotiques, car elle est une ligne de courbure et les asymptotes des indicatrices sont confondues avec elle. Au sommet, tous les plans contenant la génératrice doivent être considérés comme tangents, et chacun d'eux est le plan osculateur d'une asymptotique qui rencontre tangentiellement la génératrice section normale d'un rayon infini.

Quand la surface a une directrice rectiligne, cette droite est une asymptotique en tous ses points et notamment à chacun des sommets où elle passe. On voit ainsi qu'à un sommet une asymptotique peut ne pas être tangente à la génératrice. En résumé, *les asymptotiques d'une surface gauche passent à chaque sommet, et y sont en général tangentes à la génératrice.*

935. On considère quelquefois la surface gauche formée par celles des normales à une courbe gauche qui sont respectivement situées dans les plans osculateurs et que l'on appelle *normales principales*. La directrice est une courbe asymptotique de la surface gauche, car chacun de ses plans osculateurs lui est tangent. Nous concluons de là que le lieu des normales principales à une courbe gauche ne peut pas être un hyperboloïde, car les lignes asymptotiques de cette surface sont des droites [2].

En tout point de la directrice, les deux asymptotiques de la surface gauche sont cette courbe et la génératrice, lignes qui se rencontrent à angle droit. Il résulte de là que *les rayons de courbure principaux de la surface sont égaux en grandeur absolue aux divers points de la directrice.*

Lorsqu'une ligne asymptotique d'une surface gauche est une trajectoire orthogonale des génératrices, cette surface est le lieu des normales principales à l'asymptotique [3].

Lignes asymptotiques des surfaces de révolution.

936. Les surfaces de révolution n'ont des lignes asymptotiques que sur les parties qui sont engendrées par les arcs de la méridienne dont la convexité est tournée

---

(1) Ces théorèmes sont dus à M. Paul Serret (*Thèse sur les propriétés géométriques des courbes à double courbure*).

(2) L'étude de la surface lieu des normales principales à une courbe gauche se ramène à l'étude de la surface lieu des normales à une développable sur laquelle la courbe donnée est une géodésique. Cette développable est l'enveloppe des plans tangents à la courbe gauche donnée et respectivement perpendiculaires à ses plans osculateurs.

En se reportant à l'article 851, on voit que *la grandeur absolue du produit des rayons de courbure de la surface lieu des normales principales à une courbe gauche, en un point de cette courbe, est égale au carré du rayon de seconde courbure correspondant à ce point.* (MANNHEIM.)

(3) Ces théorèmes sont dus à M. J. Bertrand, *Journal de M. Liouville*, 1850.

vers l'axe, car ce sont les seules dont les courbures soient négatives (art. **931**). Ces parties sont limitées à des parallèles le long desquels la surface est touchée par un plan, et quelquefois à un parallèle d'inflexion Aa (*fig.* 356).

En un point C du parallèle Aa, la méridienne, qui est une section principale, a un rayon infini; les deux lignes asymptotiques lui sont donc tangentes, et, comme elles ne peuvent dépasser le point C, elles forment les deux branches d'un rebroussement. On voit que le parallèle d'inflexion est le lieu des points de rebroussement des asymptotiques, et que les deux branches de chacune de ces lignes appartiennent aux deux séries différentes.

Les sections principales sont les méridiens et les courbes tangentes aux parallèles; aucun de leurs rayons de courbure n'est infini dans la partie comprise entre Aa et Bb. Il résulte de là qu'à partir du rebroussement C, les deux branches d'une asymptotique se rapprochent continuellement du parallèle Bb. D'ailleurs, elles ne peuvent pas l'atteindre, car ce parallèle est une asymptotique qui n'est rencontrée par aucune autre, parce qu'en chacun de ses points la surface a un plan tangent unique, et une seule section à courbure nulle. Il passe par tout point de la zone considérée, quelque voisin qu'il soit du parallèle Bb, deux asymptotiques qui d'un côté se rapprochent de ce parallèle, et de l'autre s'avancent vers le cercle Aa. Il résulte de ces diverses considérations que *les asymptotiques sont toutes asymptotes du parallèle supérieur* Bb.

§ III. — Lignes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles.

Détermination des sections normales surosculées par des cercles en un point d'une surface.

937. Considérons deux surfaces Σ et Σ', l'une quelconque, l'autre du deuxième ordre et osculatrice de la première en un de ses sommets : ces deux surfaces se traversent, et l'on reconnaît, par des considérations analogues à celles de l'article **865**, qu'il y a un contact du troisième ordre entre leurs sections par un même plan normal contenant la tangente à une des branches de l'intersection. La section faite dans Σ' est une conique ayant un sommet au point de contact : la section de Σ est donc surosculée par un cercle.

Nous prenons pour origine le point où les surfaces se touchent, et pour axe des ordonnées z leur normale commune : les deux autres axes sont dans le plan tangent. Si nous ne considérons que la partie voisine de l'origine, pour laquelle l'ordonnée z est infiniment petite du second ordre, l'équation de la surface Σ, supposée algébrique ou développée suivant les puissances entières des variables, se réduira à la forme suivante, quand on y négligera les infiniment petits d'un ordre plus

élevé que le troisième :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &Mx^3 + M'y^3 + Nx^2y + N'xy^2 \\ &\qquad + Ax^2 + A'y^2 + Bxy + B'zx + B''yz + Cz = 0. \end{aligned}\right.$$

La surface du second ordre Σ' osculatrice de Σ en un de ses sommets est représentée par l'équation (art. **792**)

$$Ax^2 + A'y^2 + Kz^2 + Bxy + Cz = 0,$$

dans laquelle K est un coefficient arbitraire. En considérant seulement la partie de Σ' voisine de l'origine, et négligeant le terme en z^2 qui est du quatrième ordre, l'équation se réduit à

$$(2)\qquad Ax^2 + A'y^2 + Bxy + Cz = 0.$$

Les sections normales surosculées par des cercles, dans la surface Σ, sont tangentes aux intersections des surfaces représentées par les équations (1) et (2). L'élimination de z nous fera donc connaître les tangentes à ces courbes.

Eu égard à l'équation (2), l'équation (1) se réduit à

$$Mx^3 + M'y^3 + Nx^2y + N'xy^2 + (B'x + B''y)z = 0.$$

L'élimination de z entre cette dernière et l'équation (2) donne

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(M' - \frac{A'B''}{C}\right)\frac{y^3}{x^3} + \left(N' - \frac{A'B'}{C} - \frac{BB''}{C}\right)\frac{y^2}{x^2} \\ &\qquad + \left(N - \frac{AB''}{C} - \frac{BB'}{C}\right)\frac{y}{x} + \left(M - \frac{AB'}{C}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

On voit qu'il passe par tout point d'une surface trois sections normales surosculées par des cercles, et qu'il ne peut y en avoir plus de trois, à moins qu'elles ne jouissent toutes de cette propriété : tous les coefficients de l'équation sont alors nuls. Deux des trois sections peuvent évidemment être imaginaires.

938. Si la surface proposée Σ est du second ordre, M, M′, N et N′ seront nuls, et l'équation (3) se réduira à

$$A'B''\frac{y^3}{x^3} + (A'B' + BB'')\frac{y^2}{x^2} + (AB'' + BB')\frac{y}{x} + AB' = 0.$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$\left(A'\frac{y^2}{x^2} + B\frac{y}{x} + A\right)\left(B''\frac{y}{x} + B'\right) = 0.$$

Elle se divise donc en deux équations :

$$A'\frac{y^2}{x^2} + B\frac{y}{x} + A = 0,$$

$$B''\frac{y}{x} + B' = 0.$$

La première représente l'intersection de la surface du second ordre par le plan des xy, et par suite les génératrices rectilignes qui sont en effet des cercles d'un rayon infini ; la seconde détermine la tangente à une section normale surosculée par un cercle d'un rayon fini. Cette section est toujours réelle.

Dans le cas qui nous occupe, les surfaces Σ et Σ' sont toutes les deux du second ordre. Elles se coupent d'ailleurs suivant deux droites : leur intersection complète comprend donc, en outre, une courbe plane (art. **252**). Il est facile de reconnaître que cette courbe est en général située dans un plan oblique.

Détermination sur les surfaces du second ordre des lignes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles.

939. On peut concevoir des courbes qui soient tangentes aux sections normales surosculées par des cercles, comme les lignes de courbure le sont aux sections principales. Chaque surface a trois séries de ces lignes ou une seule série.

939 *a*. Nous avons donné en 1855, dans le *Journal de M. Liouville,* l'équation générale des courbes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles. Nous allons reproduire ce travail en développant les calculs plus que nous ne l'avons fait alors.

Nous nous occuperons d'abord d'une surface quelconque, sur laquelle nous considérons une section par un plan normal en un point. Nous appelons R le rayon de courbure de la section en ce point, et α, β, γ les cosinus des angles que sa tangente fait avec trois axes coordonnés rectangulaires. Nous regardons l'ordonnée z du point de la surface comme une fonction des coordonnées horizontales x et y, et nous désignons suivant l'usage par p, q, r, ... ses dérivées partielles des différents ordres.

En posant

$$(1) \qquad Z_2 = t\beta^2 + 2s\beta\alpha + r\alpha^2,$$

on a, d'après une formule connue,

$$(2) \qquad R^2 = \frac{p^2 + q^2 + 1}{Z_2^2}.$$

Si la section est surosculée par un cercle, elle a le même rayon de courbure au point infiniment voisin de celui qui est considéré, et par suite on peut différentier l'équation (2) en regardant R comme constant. On a ainsi

$$(p^2 + q^2 + 1)\,dZ_2 - [(ps + qt)\,dy + (pr + qs)\,dx]Z_2 = 0.$$

En appelant S l'arc infiniment petit de la section normale, on a

$$(3)\qquad dy = S\beta, \quad dx = S\alpha,$$

et l'équation devient

$$(4)\qquad (p^2+q^2+1)\,dZ_2 - [(ps+qt)\beta + (pr+qs)\alpha]Z_2 S = 0.$$

Nous allons chercher la valeur de dZ_2. En différentiant l'équation (1), et en y remplaçant dx et dy par leurs valeurs (3), on obtient

$$dZ_2 = (v\beta^3 + 3w\beta^2\alpha + 3u\beta\alpha^2 + u\alpha^3)S + 2(t\beta + s\alpha)\,d\beta + 2(s\beta + r\alpha)\,d\alpha.$$

Nous posons

$$(5)\qquad Z_3 = v\beta^3 + 3w\beta^2\alpha + 3u\beta\alpha^2 + u\alpha^3,$$

En portant dans l'équation (4) la valeur de dZ_2 simplifiée par cette notation, on obtient

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &(p^2+q^2+1)Z_3 S + 2(p^2+q^2+1)[(t\beta+s\alpha)\,d\beta + (s\beta+r\alpha)\,d\alpha] \\ &\qquad\qquad - [(ps+qt)\beta + (pr+qs)\alpha]Z_2 S = 0. \end{aligned}\right.$$

Il faut maintenant déterminer les différentielles $d\alpha$ et $d\beta$.

La normale à la surface et la tangente à la section au point considéré ont respectivement pour équations

$$\left\{\begin{aligned} x'-x+p(z'-z)=0,\\ y'-y+q(z'-z)=0;\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} (x'-x)\gamma=(z'-z)\alpha,\\ (y'-y)\gamma=(z'-z)\beta,\end{aligned}\right.$$

x', y' et z' étant les coordonnées courantes. Le plan de la section contient ces deux droites, et par suite on trouve que son équation est

$$(7)\qquad (\beta+q\gamma)(x'-x) - (\alpha+p\gamma)(y'-y) + (p\beta-q\alpha)(z'-z) = 0.$$

Les différentielles $d\alpha$, $d\beta$ et $d\gamma$ doivent être telles que la tangente au point infiniment voisin de celui que nous considérons soit dans le plan de la section. En différentiant les équations de la tangente par rapport aux coordonnées du point de contact, on a

$$(x'-x)\,d\gamma - \gamma\,dx = (z'-z)\,d\alpha - \alpha\,dz,$$
$$(y'-y)\,d\gamma - \gamma\,dy = (z'-z)\,d\beta - \beta\,dz.$$

Les termes $\gamma\,dx$ et $\alpha\,dz$ sont égaux à $\alpha\gamma S$ et par conséquent égaux entre eux. Les quantités $\gamma\,dy$ et $\beta\,dz$ sont aussi égales. Les deux équations que nous venons d'obtenir se réduisent donc à

$$(x'-x)\,d\gamma = (z'-z)\,d\alpha, \quad (y'-y)\,d\gamma = (z'-z)\,d\beta.$$

D'après ce que nous avons dit, les valeurs de $(x'-x)$ et de $(y'-y)$ prises dans ces deux dernières équations doivent satisfaire à l'équation (7). Cette condition donne

$$(8)\qquad (\beta+q\gamma)\,d\alpha - (\alpha+p\gamma)\,d\beta + (p\beta-q\alpha)\,d\gamma = 0.$$

La tangente à la section au point considéré étant perpendiculaire à la normale à la surface, on a

$$(9)\qquad p\alpha + q\beta - \gamma = 0.$$

Les axes étant rectangulaires, on a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \tag{10}$$

En différentiant les équations (9) et (10) et ayant égard aux relations (3), on obtient

$$p\,d\alpha + q\,d\beta - d\gamma + Z_2 S = 0, \tag{11}$$

$$\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma = 0. \tag{12}$$

Les équations (8), (11) et (12) vont nous donner les différentielles cherchées $d\alpha$ et $d\beta$.

Pour faire facilement l'élimination, nous posons

$$a = \beta + q\gamma, \quad b = -\alpha - p\gamma, \quad c = p\beta - q\alpha. \tag{13}$$

L'équation (8) devient

$$a\,d\alpha + b\,d\beta + c\,d\gamma = 0. \tag{8 bis}$$

Éliminant $d\beta$ et $d\gamma$ entre les équations (8 *bis*), (11) et (12), on obtient

$$d\alpha = -\frac{(b\gamma - c\beta)Z_2 S}{(b\gamma - c\beta)p + (c\alpha - a\gamma)q + (b\alpha - a\beta)}. \tag{14}$$

En remplaçant dans chacun des facteurs binômes a, b et c par leurs valeurs (13), et en éliminant ensuite γ par l'équation (9) et γ^2 par l'équation (10), on trouve

$$b\gamma - c\beta = -p, \quad c\alpha - a\gamma = -q, \quad b\alpha - a\beta = -1.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (14) donne

$$d\alpha = -\frac{pZ_2 S}{p^2 + q^2 + 1};$$

on a de même

$$d\beta = -\frac{qZ_2 S}{p^2 + q^2 + 1};$$

en portant les valeurs de $d\alpha$ et de $d\beta$ dans l'équation (6), on obtient

$$Z_3(p^2 + q^2 + 1) - 3[(ps + qt)\beta + (pr + qs)\alpha]Z_2 = 0.$$

Enfin, si nous remplaçons Z_2 et Z_3 par les polynômes que ces signes représentent, nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} &(p^2 + q^2 + 1)\left[\frac{v}{3}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 + w\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + u\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{u}{3}\right] \\ &\quad - \left[t\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + 2s\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + r\right]\left[(ps + qt)\frac{\beta}{\alpha} + (pr + qs)\right] = 0. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

La quantité $\frac{\beta}{\alpha}$ est la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des ab-

scisses la projection sur le plan XOY d'une droite tangente, au point considéré, à une section normale surosculée par un cercle. L'équation (15) est du troisième degré en $\frac{\beta}{\alpha}$; une surface quelconque a donc en chacun de ses points trois sections de ce genre, dont une au moins est réelle.

Pour avoir l'équation différentielle des lignes tangentes en chacun de leurs points à une section normale surosculée par un cercle, il suffit de remplacer $\frac{\beta}{\alpha}$ par sa valeur $\frac{dy}{dx}$ prise dans les relations (3). On trouve

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &(p^2+q^2+1)\left[\frac{v}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+w\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+u\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{u}{3}\right]\\ &\quad-\left[t\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+2s\left(\frac{dy}{dx}\right)+r\right]\left[(ps+qt)\frac{dy}{dx}+(pr+qs)\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Cette formule nous sera utile plus loin.

940. D'après ce que nous avons vu (art. **938**), les surfaces du second ordre n'ont qu'une série de lignes tangentes aux sections normales surosculées par un cercle, non compris les génératrices. Sur ces surfaces les courbes dont nous nous occupons sont d'ailleurs telles que toute section normale, tangente à l'une d'elles en un point, est une conique ayant un sommet à ce point. Nous allons les déterminer par cette propriété.

Considérons un plan P tangent en un point M à une surface du second ordre, et en un point G à une sphère ayant le même centre que la surface (*fig.* 371) : le rayon de cette sphère est la perpendiculaire AG abaissée sur le plan P du centre commun A. Si nous concevons une développable circonscrite à la sphère et à la surface, la droite MG en sera une génératrice, et la tangente ML à la courbe de contact au point M sera, dans l'indicatrice de ce point, le diamètre conjugué à MG [1].

Nous faisons passer par le centre A un plan Q parallèle à P ; il coupe la surface du second ordre suivant une conique homothétique à l'indicatrice du point M : les diamètres EF et IJ, respectivement parallèles à MG et à ML, sont par conséquent conjugués.

La normale au point M doit être parallèle à GA : elle rencontre EF en un point D. Nous faisons passer un plan par cette normale et par la droite ML tangente à la courbe de contact; il coupe la surface du second ordre suivant une

(1) Nous n'avons tracé ni les contours apparents de la sphère et de l'ellipsoïde, ni leurs lignes de contact avec la développable. Ces lignes sont inutiles à la démonstration, et elles eussent compliqué la figure. Nous avons d'abord tracé les courbes EIFJ et EMF, puis nous avons déterminé la conique BMC en faisant des sections par des plans parallèles à P : son centre est à l'intersection de MD avec le diamètre de la conique EMF conjugué à la direction AG.

conique BMC. Son intersection BC avec le plan Q est parallèle à ML et à IJ : le milieu de la corde BC est par conséquent au point D. Il résulte de là que la droite MD est dans la conique BMC un diamètre conjugué à la direction ML; comme d'ailleurs elle est perpendiculaire à ML, on voit que le point M est un sommet de cette courbe.

Nous obtenons ainsi ce théorème : *Si l'on circonscrit une développable à une surface du second ordre et à une sphère concentrique, la ligne de contact sur la surface sera tangente en chacun de ses points à une section normale surosculée par un cercle.*

941. En renversant l'ordre des raisonnements, on trouve que *quand, sur une surface du second ordre, un point* M *est un des sommets d'une section normale* BMC, *cette courbe est tangente en* M *à la ligne de contact de la surface considérée avec une développable qui lui serait circonscrite ainsi qu'à une sphère de même centre qu'elle.* Il suit de là que le plan tangent P n'aura pas cessé de toucher la sphère dont le rayon est AG, s'il roule sur la surface du second ordre de manière que son point de contact se transporte sur la section BMC à une distance infiniment petite de M. Nous avons donc un second théorème réciproque du premier : *Lorsqu'une courbe tracée sur une surface du second ordre est telle que chacun de ses points soit un sommet de la section normale qui lui est tangente, les plans tangents à la surface en ses différents points sont tous à une même distance du centre.*

Il résulte de ces théorèmes que, déduction faite des génératrices rectilignes, *il ne passe par un point d'une surface du second ordre qu'une courbe tangente à des sections normales surosculées par des cercles,* car le plan tangent en un point ne touche qu'une sphère concentrique à la surface.

Poinsot a appelé *polhodie* la courbe de contact d'un ellipsoïde avec une développable circonscrite à cette surface et à une sphère concentrique [1]. Nous adopterons cette expression en l'étendant d'ailleurs aux lignes qui jouissent de la même propriété sur les autres surfaces du second ordre.

942. Les observations que nous avons présentées à l'article **540**, et les formules que nous avons données dans les articles qui précèdent celui-là, permettent de déterminer facilement les polhodies d'une surface du second ordre donnée.

Les droites diamétrales conjuguées communes à la sphère et à la surface considérée sont dirigées suivant les axes de cette dernière. Si nous désignons par

---

[1] La courbe que Poinsot a appelée *polhodie* est tracée sur un ellipsoïde dans lequel l'inverse de la valeur du carré de l'axe mineur est plus grand que la somme des inverses des carrés des deux autres axes $\left(\frac{1}{c^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$. Le savant géomètre a été conduit à l'étude de cette courbe par des considérations de Mécanique (*Journal de M. Liouville*, 1851).

les lettres m et n les longueurs appelées b et c à l'article **537**, et si nous conservons les autres notations de cet article, les deux premières équations de condition (5) seront

$$\frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{\nu^2}{n^2} = 1,$$

$$\left(1 - \frac{q^2}{m^2}\right)\frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{\mu^2}{m^2} = 1.$$

m et n d'une part, p et q de l'autre, sont les demi-axes des lignes doubles de la développable situées dans les deux plans coordonnés respectivement perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées verticales : λ, μ et ν sont les demi-axes d'une surface du second ordre inscrite dans la développable.

Si nous représentons par a, b et c les demi-axes de l'ellipsoïde considéré, et par r le rayon de la sphère, la développable devant être circonscrite à ces deux surfaces, nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{a^2}{p^2} + \frac{c^2}{n^2} = 1, \\ &\left(1 - \frac{q^2}{m^2}\right)\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{m^2} = 1; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{r^2}{p^2} + \frac{r^2}{n^2} = 1, \\ &\left(1 - \frac{q^2}{m^2}\right)\frac{r^2}{p^2} + \frac{r^2}{m^2} = 1. \end{aligned}\right.$$

On déduit facilement de ces quatre équations les valeurs de m^2, n^2, p^2 et q^2 :

$$m^2 = r^2\frac{b^2 - a^2}{r^2 - a^2}, \quad p^2 = r^2\frac{a^2 - c^2}{r^2 - c^2},$$

$$n^2 = r^2\frac{c^2 - a^2}{r^2 - a^2}, \quad q^2 = r^2\frac{b^2 - c^2}{r^2 - c^2}.$$

Les équations de la courbe de contact de la développable avec une surface inscrite du second ordre sont données à l'art. **539** (¹). La première est

$$\frac{p^2 x^2}{\lambda^4} + \frac{q^2 y^2}{\mu^4} = 1.$$

(¹) Puisque nous avons occasion de revenir sur les développables circonscrites, nous remarquerons que la proposition de l'art. 513 n'est qu'un corollaire d'un théorème plus général qui consiste en ce que les génératrices d'une développable circonscrite à une série de surfaces du second ordre sont divisées homographiquement par les lignes de contact de ces surfaces. On peut obtenir ce théorème par la méthode suivie aux art. 511 et suivants; on peut aussi le déduire, par la théorie des polaires réciproques, d'une proposition de Chasles (*Comptes rendus*, 2ᵉ semestre de 1857, p. 1062). Il permet de tracer facilement les projections de la ligne de contact qui passe par un point, quand on connaît trois des lignes doubles.

Remplaçant p^2 et q^2 par leurs valeurs trouvées plus haut, on obtient

$$(a^2-c^2)\frac{x^2}{\lambda^4}+(b^2-c^2)\frac{y^2}{\mu^4}=\frac{r^2-c^2}{r^2}.$$

Pour avoir la projection sur le plan horizontal XOY de la courbe de contact de la développable avec l'ellipsoïde, on remplace λ et μ par a et b, et l'on a

$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{c^2}{r^2} \quad (^1).$$

943. On peut arriver à cette seconde équation de la polhodie en calculant la distance r du centre de la surface du second ordre

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

à son plan tangent. On trouve

$$\frac{1}{r^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4},$$

x, y et z étant les coordonnées du point de contact. En éliminant z^2 entre ces équations, on obtient l'équation à laquelle nous sommes parvenus par la considération de la développable circonscrite.

943 *bis*. On peut déduire ce résultat de l'équation (16) de l'art. 939*a*.

Les lignes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles forment en général trois systèmes. Quand la surface est gauche, l'un d'eux est formé des génératrices rectilignes, mais on peut facilement l'éliminer, car les polynômes

$$\frac{v}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+w\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+u\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{u}{3},$$
$$t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2s\left(\frac{dy}{dx}\right)+r$$

ont alors, comme l'on sait, un facteur commun qui, égalé à zéro, représente ces droites.

---

(1) Pour obtenir une seconde équation d'une polhodie par la méthode de l'art. 942, sans appliquer les formules générales démontrées précédemment (art. 537 à 540), on rapporte l'ellipsoïde, de demi-axes a, b, c, et la sphère concentrique, de rayon r, aux axes de l'ellipsoïde. Puis, exprimant que le plan tangent à l'ellipsoïde en x', y', z' coïncide avec le plan tangent à la sphère en x'', y'', z'', on obtient trois égalités donnant x'', y'', z''. L'équation de la sphère étant satisfaite par ces valeurs, on a une égalité qui, en y supprimant les accents de x', y', z', donne une équation de la polhodie cherchée. L'élimination de z entre cette équation et celle de l'ellipsoïde conduit à la dernière de l'art. 942. (E. L.)

Lorsque la surface est du second ordre, elle possède deux systèmes de génératrices rectilignes : le premier des polynômes est divisible par le second, et le quotient est nécessairement égal à

$$\frac{v}{3t}\frac{dy}{dx}+\frac{u}{3r}.$$

L'équation différentielle des lignes du troisième système, le seul qu'il y ait lieu de considérer, est donc

$$(p^2+q^2+1)\left(\frac{v}{3t}\frac{dy}{dx}+\frac{u}{3r}\right)-(ps+qt)\frac{dy}{dx}-(pr+qs)=0,$$

ou bien

$$(1)\qquad \left[\frac{v}{3t}(p^2+q^2+1)-(ps+qt)\right]\frac{dy}{dx}+\left[\frac{u}{3r}(p^2+q^2+1)-(pr+qs)\right]=0.$$

Appliquons cette formule à la surface représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

On trouve d'abord

$$p=-\frac{c^2x}{a^2z},\quad q=-\frac{c^2y}{b^2z},\quad r=-\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2z^3},\quad s=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3},$$
$$t=-\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2z^3},\quad \frac{u}{3}=-\frac{c^6(b^2-y^2)x}{a^4b^2z^5},\quad \frac{v}{3}=-\frac{c^6(a^2-x^2)y}{a^2b^4z^5};$$

et ensuite

$$p^2+q^2+1=\frac{c^2}{z^2}\left(\frac{c^2x^2}{a^4}+\frac{c^2y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^2}\right),$$
$$ps+qt=\frac{c^6y}{a^2b^2z^4}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}+\frac{a^2}{b^2}\right),$$
$$pr+qs=\frac{c^6x}{a^2b^2z^4}\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}\right).$$

En portant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve, après quelques réductions qui se présentent spontanément,

$$\frac{y}{b^4}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\frac{b^2z^2}{c^4}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{x}{a^4}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\frac{a^2z^2}{c^4}\right)=0.$$

En éliminant le binôme $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ à l'aide de l'équation (2), on obtient

$$\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y\,dy}{b^2}+\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x\,dx}{a^2}=0,$$

et, en intégrant, on a

$$(3)\qquad \left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}=C.$$

On arrive ainsi à l'équation donnée par Poinsot pour la projection horizontale de la polhodie, pour laquelle le plan tangent est à une distance du centre égale à $\frac{c}{\sqrt{1-C}}$ [1].

944. Nous voyons que les projections sur le plan horizontal XOY des polhodies tracées sur une même surface du second ordre sont des coniques homothétiques dont les axes se confondent, en direction, avec les axes horizontaux de la surface.

Si nous désignons par a' et b' les longueurs des demi-axes de l'une des coniques, nous aurons

$$a'^2 = \frac{a^4}{a^2-c^2}\left(1-\frac{c^2}{r^2}\right), \quad b'^2 = \frac{b^4}{b^2-c^2}\left(1-\frac{c^2}{r^2}\right),$$

d'où

$$\frac{b'}{a'} = \pm\frac{b^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}}.$$

La *fig.* 372 représente plusieurs polhodies tracées sur un ellipsoïde scalène. Nous avons

$$a = \text{OA}, \quad b = \text{OB}, \quad c = \text{O'C'},$$
$$a > b, \quad b > c.$$

Les projections horizontales des courbes sont des ellipses.

Après avoir déterminé sur les projections verticales les foyers F et f, on obtient par une construction facile les points K et L, qui satisfont aux conditions

$$\text{O'K} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-c^2}}, \quad \text{O''L} = \frac{b^2}{\sqrt{b^2-c^2}};$$

prenant alors les longueurs OP et PQ respectivement égales à O'K et à O''L, nous pouvons tracer la droite OQ, qui est telle que les coordonnées de ses différents points sont les moitiés des axes des diverses ellipses.

945. Les projections des courbes sur le plan vertical perpendiculaire à l'axe moyen BB_1 sont données par l'équation

$$\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2} + \left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)\frac{z^2}{c^2} = 1-\frac{b^2}{r^2}.$$

Elle se réduit à

$$z = \pm\frac{c^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}\,x$$

(1) La démonstration géométrique que nous avons donnée aux art. 940 et 941 a été trouvée par M. Mannheim, à qui nous avions communiqué les résultats du calcul qui précède.

dans le cas particulier où la constante r est égale à b. La polhodie est alors formée en projection de deux droites $O'N'$ et $O'N'_1$, et dans l'espace de deux ellipses. On peut obtenir les droites $O'N'$ et $O'N'_1$, soit par la construction qu'indique la formule que nous venons de trouver, soit en relevant sur le contour apparent $C'A'$ le sommet N de l'ellipse horizontale qui passe par les points B et B_1.

Les projections des autres polhodies sont des hyperboles semblables au système des droites $O'N'$ et $O'N'_1$. On obtient un point M' ou R' de chacune d'elles, en relevant sur le contour apparent $C'A'$ le sommet M ou R de l'ellipse correspondante.

Sur le plan perpendiculaire à l'axe majeur, les projections sont des ellipses comme sur le plan perpendiculaire à l'axe mineur.

A chaque sommet de la surface, toute section normale est surosculée par un cercle, mais il passe seulement deux polhodies aux sommets B et B_1, extrémités de l'axe moyen. Chacun des quatre autres sommets doit être considéré comme formant à lui seul une de ces courbes.

Nous pourrions faire, sur les parties parasites des projections des polhodies, des observations analogues à celles que nous avons présentées à l'art. **927**, pour les projections des lignes de courbure.

Il serait facile de construire pour une valeur de r les trois lignes doubles concentriques de la développable circonscrite, sa courbe de contact avec la sphère, son arête de rebroussement, etc. Nous ne nous arrêterons pas à ces questions, mais nous les indiquons comme des sujets d'exercices graphiques [1].

§ IV. — Lignes géodésiques. — Lignes tangentes aux sections de même courbure.

Définitions et considérations générales.

946. On peut concevoir sur les surfaces certaines lignes dont le tracé dépend des courbures, mais qui diffèrent des courbes que nous avons étudiées, en ce qu'il en passe une infinité par chaque point. De ce nombre, sont les lignes géodésiques et les lignes tangentes aux sections normales de même courbure.

Nous avons déjà parlé des *lignes géodésiques* à l'art. **482**; ce sont des courbes tracées sur une surface, et dont la longueur entre deux quelconques de leurs points est plus courte que celle de toute autre ligne voisine que l'on pourrait tracer sur la surface entre ces points. Nous avons vu que sur une développable une géodésique a tous ses plans osculateurs normaux à la surface.

---

(1) M. Valson a démontré que le produit des rayons de courbure principaux d'une surface du second ordre est constant en tous les points d'une polhodie.

Considérons maintenant une surface quelconque Σ et la géodésique A qui passe par deux points m et n. Si une surface est circonscrite à Σ le long de A, cette courbe en sera une géodésique, car toute ligne tracée sur Σ entre m et n, et infiniment voisine de A, appartient à la surface circonscrite, et, par hypothèse, l'arc mn de A est un minimum entre toutes les lignes de ce genre. Or on peut circonscrire à Σ une développable le long de A ; la courbe A en sera une géodésique, et par suite ses plans osculateurs seront normaux à la développable ; ils seront donc aussi normaux à la surface inscrite. Nous voyons que le théorème démontré à l'art. **482** pour les développables doit être étendu à une surface quelconque.

La propriété des géodésiques d'avoir leurs plans osculateurs normaux à la surface les caractérise complètement et pourrait servir à les définir. Elle établit une certaine correspondance entre ces lignes et les asymptotiques qui ont leurs plans osculateurs tangents à la surface.

Quant aux courbes tangentes aux sections normales de même courbure, nous nous bornerons à dire que chacune d'elles est caractérisée par une valeur du rayon de courbure des sections normales touchées. Il passe généralement par chaque point deux courbes qui correspondent à un même rayon. Quand cette constante est infinie, on trouve les asymptotiques.

Courbure géodésique.

947. Lorsqu'une courbe s tracée sur une surface Σ est projetée sur le plan tangent en un de ses points, la projection S est une section droite du cylindre projetant ; par conséquent, si l'on appelle r et R les rayons de courbure des lignes s et S au point considéré, et γ l'angle que le plan osculateur de la première fait avec le plan tangent, on aura, en vertu du théorème de Meusnier,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\cos\gamma.$$

Quand la courbe s est une asymptotique, γ est nul et il y a égalité entre les courbures $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{r}$. Dans le cas, au contraire, où la ligne s est une géodésique, γ est égal à 90° et $\frac{1}{R}$ est nul. Cette circonstance a conduit à appeler la quantité $\frac{1}{R}$ *courbure géodésique* de la ligne s considérée sur la surface Σ.

Si l'on circonscrit à la surface une développable le long de s, et qu'on la développe sur un plan, le rayon de courbure de la transformée de s sera $\frac{r}{\cos\gamma}$

(art. **474** et **819**). Il suit de là que, *lorsqu'une courbe est tracée sur une surface, sa courbure géodésique en un point est la courbure de sa transformée dans le développement de la développable circonscrite dont elle est la ligne de contact.*

948. Nous conservons les notations précédentes, et de plus nous appelons R_1 le rayon de courbure de la section faite dans la développable circonscrite par un plan perpendiculaire à la génératrice rectiligne, et φ l'angle de la courbe s avec cette section.

Le rayon de courbure de la section normale à Σ et tangente à s est $\frac{r}{\sin\gamma}\cdot$ Le théorème d'Euler donne par conséquent

$$\frac{\sin\gamma}{r} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1}.$$

Cette équation et celle qui a été donnée à l'article précédent permettent de déterminer deux des quantités engagées dans la question quand les autres sont connues. Il existe quelques applications utiles des constructions que l'on déduit de ces formules, principalement pour les courbes tracées sur un plan flexible et enroulées avec lui sur une développable. Ainsi, connaissant le rayon de courbure de l'ellipse A′B′ en un point D′ (*fig.* 301) et le rayon OV, on peut déterminer le plan osculateur et le rayon de courbure de la directrice du conoïde au point correspondant d (*voir* l'art. **671** pour la génération du conoïde).

LIVRE NEUVIÈME.

SURFACES HÉLICOIDES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

Définition de l'hélice. — Projection de cette courbe sur un plan parallèle à son axe.

949. On appelle *hélice* une courbe tracée sur un cylindre de révolution, et qui en rencontre toutes les génératrices sous un même angle. Lorsque le cylindre est développé, les génératrices sont des droites parallèles, et la transformée de l'hélice les coupant sous un angle constant est nécessairement une droite. Réciproquement, toute ligne du cylindre dont la transformée est rectiligne rencontre les génératrices sous un angle constant, et par suite est une hélice.

Lorsque l'on développe la surface, un cercle de section droite AE (*fig.* 370) et une hélice AG deviennent des droites ([1]); la ligne Aa décrite par leur point d'intersection A est par suite une développante commune de ces courbes (art. **483**).

L'arc AP et le segment PM compris sur une génératrice entre la section droite et l'hélice deviennent, après le développement, les coordonnées ap et pm du point m de la transformée rectiligne où s'est placé le point M. Nous en concluons que, *pour une hélice, les ordonnées rectilignes sont proportionnelles aux abscisses curvilignes,* mesurées sur une section droite à partir du point où les courbes se rencontrent.

On voit encore, en considérant une tangente aG, que *la sous-tangente* aE *est égale à l'abscisse curviligne* AE *du point de contact* G.

Deux points A et A_1, dont les abscisses diffèrent d'une circonférence, sont sur

([1]) La *fig.* 370 est une perspective axonométrique dans laquelle les deux axes horizontaux sont également inclinés sur le plan de projection, et qui par conséquent est du nombre de celles que l'on appelle *monodimétriques* (art. 396).

une même génératrice. Leur distance est le *pas* de l'hélice. L'arc $AMGA_1$ compris entre eux forme une *spire*. L'axe du cylindre est souvent appelé l'*axe* de l'hélice.

En désignant par r le rayon du cylindre ou la distance des points de l'hélice à l'axe, l la longueur d'une spire, H le pas de l'hélice, et β l'angle que forme la courbe avec une section droite, ou le complément de celui sous lequel elle rencontre les génératrices, on a

$$(1) \qquad r = \frac{H}{2\pi}\cot\beta, \quad l\sin\beta = H.$$

950. Nous aurons souvent à considérer la longueur $\frac{H}{2\pi}$; nous l'appellerons le *pas réduit* de l'hélice, et nous la représenterons par h; d'où

$$(2) \qquad h = \frac{H}{2\pi}.$$

Nous aurons alors

$$(1\ bis) \qquad r = h\cot\beta, \quad l\sin\beta = 2\pi h.$$

Le pas réduit est le rapport de l'ordonnée rectiligne PM d'un point M de l'hélice à son azimut AOP; c'est aussi le rayon de la circonférence dont la longueur est égale au pas. On construit le pas réduit en le considérant comme le quatrième terme d'une proposition dont les trois premiers sont successivement une circonférence rectifiée, son rayon et le pas de l'hélice. Quand le pas d'une hélice sera donné, nous supposerons toujours que le pas réduit est connu, et réciproquement.

951. Pour construire la projection verticale d'une hélice située sur un cylindre vertical donné, lorsque l'on connaît son pas et l'un de ses points (A, A'), on partage le cercle de section droite AB (*fig.* 373), qui est la projection horizontale de cette courbe, en un certain nombre de parties égales, douze par exemple, en prenant le point A pour un des points de division; on mène par ces différents points des perpendiculaires à l'horizontale XY du point A'; on porte un douzième du pas au-dessus de XY, sur la première de ces droites à partir de la trace ou origine A, deux douzièmes sur la seconde, et ainsi de suite. On obtient de cette manière treize points par spire.

Sur la *fig.* 373, l'origine donnée A est sur le diamètre du cercle qui est perpendiculaire à la ligne de terre. Cette circonstance introduit dans les constructions une symétrie qui les rend plus faciles.

La tangente à l'hélice en un point (n, n') a sa trace horizontale a sur la tangente au cercle AB au point n, à une distance de ce point égale à la longueur rectifiée de l'abscisse curviligne An (art. **949**). La détermination de ce point permet

de construire la projection verticale $a'n'$ de la tangente. Le lieu des traces des tangentes forme une développante du cercle AB.

952. Il est facile d'obtenir l'équation de la projection verticale A′A″ de l'hélice (*fig.* 373). Si nous appelons z l'ordonnée pm' d'un point (m, m') de l'hélice, nous aurons

$$z = k \operatorname{arc} \mathrm{A}m,$$

k étant un coefficient constant. L'abscisse x du point m' étant la longueur $\mathrm{A}'p$ égale au sinus de l'arc Am dans le cercle AB, dont nous désignons le rayon par r, nous obtenons

$$x = r \sin \frac{\mathrm{A}m}{r}.$$

Ces deux équations donnent

$$x = r \sin \frac{z}{kr}.$$

Pour avoir la valeur de k en fonction du rayon r et du pas H, nous remarquons que, quand l'abscisse est r, l'ordonnée z est le quart de H. On a donc, en vertu de l'équation précédente,

$$r = r \sin \frac{\mathrm{H}}{4kr}, \quad \text{d'où} \quad k = \frac{h}{r},$$

et par suite l'équation de la courbe devient

$$(3) \qquad x = r \sin \frac{z}{h}.$$

On voit que la projection d'une hélice sur un plan perpendiculaire à son axe est une sinusoïde (art. **147**).

953. Un arc croît plus rapidement que son sinus; par conséquent, à partir de l'origine A′, l'ordonnée z croît plus rapidement que l'abscisse x, et, d'un côté comme de l'autre, la courbe tourne sa convexité vers la ligne de terre : elle a donc une inflexion en A′. On arrive au même résultat, soit en faisant le développement du cylindre sur le plan tangent en A′, soit en s'appuyant sur le théorème démontré à l'article **474**. Par la première manière, on voit que les points de la sinusoïde situés de part et d'autre de la ligne de terre se transportent de différents côtés pour se rendre sur la tangente en A′; par la seconde, on remarque que, l'hélice ayant pour transformée une droite, son plan osculateur est toujours normal au cylindre, et que par suite au point A′ il est perpendiculaire au plan vertical.

Nous voyons, par cette dernière considération, que la normale principale d'une hélice en un point (A, A′) est la perpendiculaire (AO, A′) abaissée de ce point sur l'axe.

Projection oblique d'une hélice sur un plan perpendiculaire à son axe.

954. Si un cercle horizontal AB (*fig.* 374) tourne autour de son centre O, et s'élève en même temps de manière que ce centre parcoure une verticale (O, A′A″), ces deux mouvements étant d'ailleurs uniformes, un quelconque de ses points tel que (A, A′) décrira une hélice. Toute hélice peut être considérée comme engendrée de cette manière.

Supposons maintenant que le cercle mobile soit éclairé par des rayons parallèles à une droite (R, R′) : son ombre sur le plan horizontal sera le même cercle AB qui tournera autour de son centre O, pendant que ce point s'avancera sur la droite Ox parallèle à R.

Lorsque le cercle AB aura achevé une révolution en s'élevant, l'ombre O_1 de son centre sera parvenue en D, et le point de contact du cercle d'ombre avec la droite Aa parallèle à R aura atteint la position C, après avoir décrit sur le cercle la circonférence entière et sur la droite le segment AC. Eu égard aux sens des mouvements, si ces longueurs sont égales, c'est-à-dire si l'on a

$$OD = 2\pi \times OA,$$

le cercle d'ombre aura roulé sans glisser sur la droite Aa. Quand cette condition est remplie, l'ombre que projette sur le plan horizontal l'hélice engendrée par le point (A, A′) du cercle est la courbe décrite par le point A de la circonférence AB, lorsqu'elle roule sur la droite Aa.

Nous appelons γ l'angle que les rayons de lumière font avec le plan horizontal, r le rayon du cercle AB, et H la hauteur qui correspond à une révolution, ou le pas de l'hélice (AB, A′A″) : l'équation ci-dessus devient

$$H \cot\gamma = 2\pi r;$$

ou, en introduisant le pas réduit h,

$$h \cot\gamma = r.$$

En se reportant à la première des équations (1 *bis*), on voit que la condition consiste en ce que les rayons doivent avoir la même inclinaison sur le plan horizontal que les tangentes à l'hélice.

On appelle *cycloïde* la courbe engendrée par un point d'un cercle qui roule sur une droite sans glisser; nous pouvons donc énoncer ainsi le théorème que nous venons de démontrer : *La projection oblique d'une hélice sur un plan perpendiculaire à son axe est une cycloïde, lorsque les projetantes ont la même inclinaison sur*

ce plan que les tangentes à l'hélice. On voit encore que *toute cycloïde est l'ombre d'une hélice pour une direction donnée de rayons parallèles.*

Une cycloïde AC a des rebroussements aux points A et C, où elle rencontre la droite de roulement Aa, car ces points sont les ombres de ceux de l'hélice où la tangente est parallèle aux rayons de lumière (art. **217**).

955. Quand les rayons de lumière ont une inclinaison différente de celle des tangentes à l'hélice, on peut déterminer sur le rayon OA (*fig.* 375) une longueur OP ou g qui satisfasse à l'équation

$$g = h \cot \gamma.$$

Le point P, étant entraîné dans le mouvement du cercle, engendrera une hélice dont l'ombre sera la cycloïde décrite par le même point P, lorsque le cercle dont le rayon est OP roule sur sa tangente Pp. Les cercles AB et PK étant d'ailleurs supposés former un système invariable, on voit que l'ombre de l'hélice décrite par le point A est la courbe que ce même point engendre lorsque le cercle PK roule sur sa tangente Pp.

Quand un cercle roule dans un plan sur une de ses tangentes, la courbe décrite par un point du plan entraîné dans le mouvement est appelée *cycloïde raccourcie* ou *cycloïde allongée,* suivant que le point est dans l'intérieur ou à l'extérieur du cercle. Nous pouvons donc dire que *la projection oblique d'une hélice sur un plan perpendiculaire à son axe est une cycloïde raccourcie ou allongée, suivant que les projetantes sont plus ou moins inclinées sur ce plan que les tangentes à l'hélice* [1].

Pour construire le rayon g du cercle générateur, nous prenons une hauteur A″G égale au quart du pas A′A″, puis menant du point G une horizontale et du point A″ un rayon de lumière A″C′, nous obtenons le segment GI′ égal à $\frac{1}{4}$H $\cot \gamma$. Nous portons sur la tangente Bb une longueur BJ égale au quart de cercle BE : l'angle BOJ a pour tangente $\frac{1}{2}\pi$. Nous projetons I′ en I, et I en K : le segment OK est le rayon cherché. La grandeur de l'angle BOJ est 57°31′6″. Cette construction revient, en ce qui concerne le pas réduit h, aux tracés indiqués à l'article **950**, mais nous n'avons opéré que sur le quart de la circonférence et le quart du pas.

Quand les projetantes sont verticales, le rayon OP du cercle mobile est nul, et la cycloïde allongée se réduit au cercle AB.

---

[1] Ce théorème et le précédent sont dus à Guillery. *Voir* une communication de Th. Olivier à la Société Philomathique, 1847.

Surfaces hélicoïdes. — Hélicoïdes réglés.

956. On appelle *surface hélicoïdale,* ou simplement *hélicoïde,* la surface lieu des hélices qui ont un axe commun et un même pas, et qui passent par les différents points d'une directrice. On peut regarder cette surface comme engendrée par la directrice qui tourne autour de l'axe d'un mouvement uniforme, et qui a en même temps un mouvement uniforme de translation parallèle à la direction de cette droite ; car, si l'axe est supposé vertical, les augmentations des hauteurs des points de la courbe sont proportionnelles aux accroissements de leurs azimuts ; ces points décrivent par suite des hélices ayant un axe commun et un même pas : on dit qu'ils ont un même *mouvement hélicoïde.*

Nous voyons que la courbe que nous avons prise pour directrice peut être considérée comme une génératrice. Elle est appelée *méridienne* quand elle est plane et que son plan contient l'axe. Un hélicoïde est déterminé quand on connaît l'axe, le pas des hélices et une directrice.

Lorsqu'une surface se meut de manière que ses différents points décrivent autour d'un axe des hélices de même pas, son enveloppe est un hélicoïde, car deux enveloppées consécutives ont toujours les mêmes positions relatives, et par suite la caractéristique est une courbe déterminée et invariable sur l'enveloppe.

Une surface hélicoïde est coupée suivant des hélices par tout cylindre de révolution ayant le même axe qu'elle.

957. Lorsque la directrice que doivent rencontrer les hélices est une droite (BC, B′C′) (*fig.* 376), cette ligne pouvant être considérée comme une génératrice, la surface est un *hélicoïde réglé.* L'hélice qui passe au pied (A, A′) de la commune perpendiculaire à la génératrice rectiligne et à l'axe est appelée *hélice de gorge :* sa distance à l'axe est la plus petite, et par suite l'angle de ses tangentes avec le plan horizontal est le plus grand.

Si l'on considère sur la génératrice un segment déterminé B′C′, et qu'on mène par le point C′ une verticale et par le point B′ une horizontale, on aura un triangle rectangle $C'C'_1B'$ qui sera le même dans toutes les positions de la droite (BC, B′C′), car les points de cette ligne s'élevant de quantités égales, le côté $C'C'_1$ conservera la même longueur. L'angle $C'B'C'_1$ que la génératrice forme avec le plan horizontal est donc constant, et par suite *le cône directeur d'un hélicoïde réglé est de révolution.*

958. En tout point de la surface il passe une hélice ; le plan tangent contient la tangente à cette courbe et la génératrice. En un point (M, M′) (*fig.* 376) la tangente à l'hélice a pour projection horizontale la perpendiculaire MT au rayon OM ; le plan tangent contient donc deux droites dont les projections hori-

zontales MT et BC sont différentes, et par suite il n'est pas vertical. Au point (A, A') la tangente à l'hélice et la génératrice se projettent sur BC; par conséquent, si ces droites sont distinctes dans l'espace, le plan vertical BC sera tangent en (A, A'), et l'hélicoïde aura deux plans tangents différents aux points (A, A') et (M, M') d'une même génératrice; cette surface sera donc gauche.

On a un *hélicoïde développable* lorsque la génératrice est tangente à l'hélice de gorge, car la surface est alors le lieu des tangentes à une courbe gauche. Pour que cette circonstance se présente, il faut que l'on ait

$$h \cot\alpha = b,$$

h étant le pas réduit commun des hélices, α l'angle de la génératrice avec le plan horizontal et b le rayon du cylindre sur lequel l'hélice de gorge est tracée [1].

Ligne de striction de l'hélicoïde gauche. — Paramètre d'une génératrice.

939. Nous savons que le plan tangent à une surface gauche, en un point situé à l'infini sur une génératrice donnée, est parallèle au plan tangent au cône directeur le long de la génératrice correspondante (art. **615**). Cette proposition va nous permettre de déterminer le point central d'une génératrice d'un hélicoïde gauche.

Soient (O, O'Z) l'axe de la surface (*fig.* 377), (EF, E'F') l'hélice de gorge et (AG, A'G') une génératrice parallèle au plan vertical : nous prenons le cercle EF pour trace horizontale du cône directeur, et nous déterminons la position S que le sommet de ce cône occupe sur l'axe, en menant la droite E'S parallèle à G'A'.

---

[1] Dans un Mémoire sur les hélicoïdes réglés (*Bulletin de l'École de Cluny*, 1877), j'ai proposé, pour la brièveté, de remplacer les expressions *surface de la vis à filets triangulaires*, *surface de la vis à filets carrés*, par celles-ci, *hélicoïde aigu*, *hélicoïde droit*. M. Jules de la Gournerie m'a exprimé l'intention de modifier la première de ces dénominations, et de les généraliser.

Soient une hélice directrice d'un hélicoïde réglé, d'axe OZ; la tangente CB à l'hélice en un de ses points C; une génératrice CA de l'hélicoïde, CA étant située dans le plan tangent P en C au cylindre sur lequel est l'hélice; par suite celle-ci est l'*hélice de gorge;* nous nommerons le cylindre qui la contient *cylindre de gorge*. Appelons ε l'angle de CA avec CB.

Lorsque ε est nul, l'hélicoïde engendré est l'*hélicoïde développable*.

Supposons que CA tourne autour de C dans le plan P; dans une position, CA est perpendiculaire à CB, et dans une autre, à OZ; d'où il résulte trois espèces d'hélicoïdes réglés que nous proposons de nommer *hélicoïde général oblique, hélicoïde général droit, hélicoïde général à plan directeur*.

Lorsque le rayon du cylindre de gorge devient nul, le premier est la *surface de la vis à filets triangulaires*, les deux autres donnent la *surface de la vis à filets carrés*. Ces deux dernières expressions pourraient donc être avantageusement remplacées par les dénominations suivantes : *hélicoïde oblique, hélicoïde droit*. (E. L)

Le plan vertical AG est perpendiculaire au plan tangent au cône le long de l droite (EO, E′S), parallèle à la génératrice considérée de l'hélicoïde, et par suit il est le plan central de cette génératrice (art. **622**); mais nous avons v qu'il touche la surface au point (A, A′) de l'hélice de gorge : *le point central d'un génératrice est donc le point où elle rencontre l'hélice de gorge, et cette courbe es la ligne de striction de la surface.*

960. Proposons-nous de déterminer le paramètre de la génératrice (GA, G′A′ (*fig.* 377).

En appelant k_1 ce paramètre, p la distance de la génératrice considérée à l génératrice voisine, et σ l'angle de ces droites, nous avons (art. **623**)

$$k_1 = \frac{p}{\sigma}.$$

Puisque l'hélice de gorge est la ligne de striction, si l'on prend sur cette courbe une longueur $A'm'$ infiniment petite, le point m' sera le point central de la génératrice voisine de (GA, G′A′). On peut regarder ce point comme étant dans le plan vertical AG, car il n'en est éloigné que d'une longueur infiniment petite du second ordre. La longueur p est donc la perpendiculaire abaissée du point m' sur la génératrice A′G′, et l'on a

$$p = A'm' \sin m'A'n;$$

ou bien, en désignant par α et β les angles que la génératrice et la tangente à l'hélice font avec le plan horizontal,

$$p = \frac{A'q}{\sin\beta} \sin(\beta - \alpha).$$

Pour avoir σ nous allons considérer sur le cône directeur les deux génératrices respectivement parallèles à celles de l'hélicoïde qui passent aux points (A, A′) et (m, m'). La première est (EO, E′S), et nous obtenons la projection horizontale de la seconde en traçant le rayon Ot parallèle à la tangente mT. Nous avons alors

$$\sigma = \frac{Et}{E'S}, \quad \text{d'où} \quad \sigma = \frac{OE}{E'S} \widehat{EOt},$$

et enfin

$$\sigma = \widehat{EOt} \cos\alpha.$$

En portant dans l'expression de k_1 les valeurs que nous venons de trouver pour p et σ, on obtient

$$k_1 = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\beta \cos\alpha} \times \frac{A'q}{\widehat{EOt}}.$$

Mais EOt est l'angle dont chaque point de la génératrice tourne autour de l'axe, pendant qu'il s'élève de la hauteur $A'q$; on a donc

$$\frac{A'q}{\widehat{EOt}} = h,$$

et par suite

$$(4) \qquad k_1 = h\left(1 - \frac{\tang\alpha}{\tang\beta}\right).$$

Nous avons d'ailleurs la relation (art. **958**)

$$(5) \qquad \tang\beta = \frac{h}{b};$$

la formule (4) peut donc être remplacée par une des suivantes :

$$(6) \qquad k_1 = h - b\tang\alpha,$$

$$(7) \qquad k_1 = b(\tang\beta - \tang\alpha).$$

Nous savons que la surface est développable quand les angles α et β sont égaux (art. **958**); la formule donne alors pour k_1 une valeur nulle, comme cela devait être.

Les valeurs de h, b, α et β sont constantes pour un hélicoïde, et par suite toutes les génératrices ont le même paramètre. Il était facile de prévoir ce résultat, car deux génératrices consécutives ont toujours les mêmes positions relatives.

961. Les équations (4), (6) et (7) donnent simplement la grandeur absolue du paramètre, car nous n'avons fait aucune convention sur les signes des quantités qui entrent dans les seconds membres, et, en raisonnant sur la *fig.* 377, nous les avons toutes indistinctement considérées comme positives. Nous allons présenter sur ce sujet quelques observations, qui n'offrent aucun intérêt pour les constructions que l'on déduit directement de la considération des hélicoïdes, mais qui sont indispensables pour l'interprétation des formules.

Lorsque le point qui décrit une hélice s'élève, il tourne vers la droite ou vers la gauche d'une personne qui serait placée sur l'axe du cylindre et qui regarderait ce point. L'hélice est *dextrorsum* dans le premier cas et *sinistrorsum* dans le second. Nous avons en général représenté les hélices sinistrorsum, parce que ce sont celles que l'on trouve dans les vis qui sont le plus souvent employées.

Nous mesurerons les ordonnées positives de bas en haut et les azimuts positifs de droite à gauche, de manière que l'azimut du point A (*fig.* 377) soit donné par l'arc EA et égal à $+90°$. Alors le pas, ou la hauteur dont le point qui décrit

la courbe s'élève lorsque son azimut augmente de $+360^o$, est positif ou négatif suivant que l'hélice est sinistrorsum ou dextrorsum.

Nous considérerons en général le rayon b comme positif et $\cot\beta$ comme ayant le même signe que le pas : la formule ($b = h\cot\beta$) sera ainsi maintenue sans altération. Enfin $\cot\alpha$ aura le même signe que $\cot\beta$ ou un signe contraire, suivant que les angles aigus formés par l'hélice de gorge et par la génératrice avec le plan horizontal seront ou non tournés d'un même côté. Lorsque, pour généraliser les résultats d'une formule, nous donnerons au rayon b une valeur négative, la valeur correspondante de $\cot\beta$ devra avoir un signe contraire à celui du pas.

D'après cela, et eu égard à la disposition de la *fig.* 377, les quantités b, h, $\cot\alpha$ et $\cot\beta$ sont positives.

Si h était nul, la formule (6) donnerait pour k_1 une valeur négative, mais alors la surface serait un hyperboloïde de révolution, et la génératrice (AG, A′G′) se trouverait dans la même position que la génératrice (ae, $a'e'$) de la *fig.* 312. Or nous avons vu à l'art. **727** que le paramètre de cette dernière est positif : la formule (6) donne donc à k_1 un signe contraire à celui qui résulte de nos conventions. Nous devons par suite considérer k_1 comme une quantité égale au paramètre, mais de signe contraire, et si nous appelons k ce paramètre lui-même, nous aurons

$$(4\ bis) \qquad k = h\left(\frac{\tang\alpha}{\tang\beta} - 1\right),$$

$$(6\ bis) \qquad k = b\tang\alpha - h,$$

$$(7\ bis) \qquad k = b(\tang\alpha - \tang\beta).$$

Par le point E′ (*fig.* 377), nous traçons une droite E′L parallèle à K′A′ : le paramètre k est égal au segment LS que l'on considérera comme ayant son origine au point L, et qui, étant dirigé de haut en bas, sera négatif.

Hélicoïdes réglés applicables les uns sur les autres.

962. Nous supposons qu'on fasse varier α, b et h, et nous allons chercher les relations qui doivent exister entre ces trois quantités pour que les hélicoïdes qu'elles déterminent puissent être appliqués les uns sur les autres.

Il faut d'abord que le paramètre des génératrices ne change pas (art. **775**); on doit par suite considérer la quantité k comme constante dans les équations qui précèdent.

Il faut encore que, lorsque l'on aura placé deux hélicoïdes de manière qu'ils se raccordent le long d'une génératrice, et que l'on déformera le second, les éléments successifs de son hélice de striction viennent se placer sur l'hélice de

striction du premier. Cela exige que l'angle de cette ligne avec les génératrices, qui est égal à $(\alpha - \beta)$, soit le même dans les deux surfaces. Par conséquent, si l'on appelle ε un angle constant quelconque, on doit avoir

$$\alpha - \beta = \varepsilon.$$

En portant la valeur $(\alpha - \varepsilon)$ de β dans les équations (4 *bis*), (5) et (7 *bis*), on obtient

$$h = \frac{k}{\operatorname{tang}\alpha \cot(\alpha - \varepsilon) - 1}, \tag{8}$$

$$b = h \cot(\alpha - \varepsilon), \tag{9}$$

$$b = \frac{k}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}(\alpha - \varepsilon)}. \tag{10}$$

Ces trois équations n'en forment que deux réellement distinctes.

Si l'on fait varier α entre $(\varepsilon + 90^\circ)$ et $(\varepsilon - 90^\circ)$, les équations (8) et (10) donneront les valeurs correspondantes de h et de b, pour des grandeurs données des constantes k et ε; et l'on aura une série complète d'hélicoïdes gauches pouvant être appliqués les uns sur les autres.

963. Les systèmes suivants méritent d'être remarqués :

1°	$\alpha = \varepsilon,$	$h = 0,$	$b = k \cot\varepsilon;$
2°	$\alpha = 90^\circ + \varepsilon,$	$h = -k,$	$b = 0;$
3°	$\alpha = 0,$	$h = -k,$	$b = k \cot\varepsilon;$
4°	$\alpha = 90^\circ,$	$h = 0,$	$b = 0.$

Dans le premier cas, la surface devient un hyperboloïde gauche de révolution. Dans le second, l'hélice de striction se réduit à l'axe. Dans le troisième cas, les génératrices sont toutes parallèles à un plan perpendiculaire à l'axe : l'hélicoïde est donc un conoïde; il a le même pas que la surface précédente, et son rayon est égal à celui du cercle de gorge de l'hyperboloïde.

Enfin, la surface n'existe pas quand les génératrices sont parallèles à l'axe. Le résultat que les formules donnent dans ce cas indique que, quand α approche indéfiniment de 90°, le pas réduit h et le rayon b convergent vers zéro.

Dans le cas particulier où ε est égal à -90°, la seconde surface se confond avec la troisième, et la série comprend un hélicoïde dont les génératrices rectilignes rencontrent l'axe à angle droit. L'hyperboloïde est alors réduit à l'axe, et ne présente plus qu'une limite.

964. Pour avoir la relation qui existe entre b, h et les constantes du pro-

blème, il faut éliminer α entre les équations (9) et (10). En faisant d'abord disparaître l'angle $(\alpha - \varepsilon)$, on obtient

$$b \operatorname{tang} \alpha = h + k.$$

L'équation (9) peut être mise sous la forme suivante :

$$(h \operatorname{tang} \varepsilon - b) \operatorname{tang} \alpha + b \operatorname{tang} \varepsilon + h = 0.$$

L'élimination de α entre ces deux équations donne

$$b^2 + h^2 - k \cot \varepsilon . b + kh = 0. \tag{11}$$

Si l'on considère b et h comme des coordonnées rectangulaires variables, cette équation représentera un cercle.

Nous traçons deux axes rectangulaires OB et OH (*fig.* 384); nous prenons sur le second une longueur OK égale à $-k$, et nous menons la droite KA qui rencontre OH sous un angle OKA complémentaire de ε : le cercle passant par les points A, O et K est celui que détermine l'équation (11). Une grandeur OB_1 étant attribuée à b, on trouve, en traçant la droite mB_1M parallèle à OH, que les valeurs correspondantes de h sont

$$+ B_1 M, \quad \text{et} \quad - B_1 m.$$

Dans le cas particulier où ε est égal à 90°, le cercle a pour diamètre le segment OK.

965. En ajoutant les équations (8) et (10), après avoir multiplié les deux membres de la première par $\operatorname{tang}\alpha$, nous obtenons

$$h \operatorname{tang} \alpha + b = \frac{k \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang}(\alpha - \varepsilon)}{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang}(\alpha - \varepsilon)} + \frac{k}{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang}(\alpha - \varepsilon)};$$

$$b + h \operatorname{tang} \alpha = k \cot \varepsilon;$$

d'où

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{k \cot \varepsilon - b}{h}.$$

Si nous remplaçons les différentes quantités du second membre par leurs grandeurs prises sur la *fig.* 384, en supposant b égal à OB_1, nous aurons

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{OA - OB_1}{B_1 M}, \quad \operatorname{tang} \alpha = - \frac{OA - OB_1}{B_1 m}.$$

Traçons les droites MA et mA : l'équation que nous venons de trouver montre

que les valeurs de α qui correspondent à la grandeur OB_1 de b sont B_1MA et $(180° - B_1mA)$ ou H_1AM et H_1Am, la droite AH_1 étant parallèle à AH. Si le point M était sur l'arc AG, il faudrait considérer l'angle α comme aigu, et prendre la droite AH_2 pour un de ses côtés.

On peut d'ailleurs faire la construction en ordre inverse, et se donner, au lieu du rayon b du cylindre sur lequel l'hélice de gorge est tracée, le pas réduit h ou l'angle α des génératrices avec le plan horizontal. On détermine immédiatement deux quelconques de ces quantités quand la troisième est connue, et l'on a un hélicoïde gauche appartenant à la série générale déterminée par les valeurs de k et de ε. Le cercle OKA donne donc une solution complète du problème (1).

Les abscisses des points du cercle les plus éloignés de l'axe OH, et les ordonnées de ceux qui sont le plus loin de l'axe OB, sont les valeurs extrêmes de b et de h. On reconnaît ainsi que le pas réduit h et le rayon b ont l'un et l'autre un maximum positif et un maximum négatif, et l'on a un moyen facile de déterminer les grandeurs de la variable α qui leur correspondent.

Développable asymptote d'un hélicoïde gauche.

966. Considérons deux hélicoïdes gauches ayant un même axe, un même pas, et dans lesquels les génératrices AG et A_1G_1, parallèles au plan vertical, ont une même projection $A'G'$ (*fig.* 378). Le plan $(G_1G', G'A')$, qui contient ces deux droites et qui est perpendiculaire au plan central de chacune d'elles, touche les deux hélicoïdes au point infiniment éloigné où elles se rencontrent. Si les deux génératrices se transportent d'un même mouvement pour décrire les hélicoïdes, leur plan sera toujours tangent à l'infini à ses surfaces, et par suite elles se raccordent le long d'une hélice tracée sur un cylindre d'un rayon infini.

Il suit de là qu'en faisant varier le rayon de l'hélice de gorge d'un hélicoïde gauche, on peut obtenir une série d'hélicoïdes réglés, tous asymptotes les uns des autres; mais l'un d'eux est développable, car, lorsque le rayon variable est égal à la longueur r déterminée par l'équation

$$r = h \cot\alpha,$$

la génératrice, qui fait toujours avec le plan horizontal l'angle α, est tangente à l'hélice de gorge. Cet hélicoïde est la développable asymptote de tous les autres.

On peut obtenir le rayon r par une construction analogue à celle qui est expliquée à la fin de l'art. **955**.

---

(1) Cette construction élégante a été donnée par Bour dans son Mémoire sur la déformation des surfaces.

Hélices doubles de l'hélicoïde réglé.

967. Soient BC et B_1C_1 (*fig.* 385) les projections horizontales de deux génératrices, et 2τ l'angle AOA_1 : la hauteur du point A_1 au-dessus du point A est $2\tau h$; le point I, considéré comme appartenant à la droite BC, est élevé au-dessus du point A d'une quantité $b\operatorname{tang}\tau\operatorname{tang}\alpha$, b et α désignant, comme précédemment, la distance de la génératrice à l'axe et son angle avec le plan horizontal. Il suit de là que si l'on a

$$\tau h - b\operatorname{tang}\tau\operatorname{tang}\alpha = 0,$$

les deux génératrices BC et B_1C_1 se couperont dans l'espace.

On peut déterminer graphiquement les valeurs de τ qui satisfont à cette condition, en cherchant les points de rencontre des courbes représentées par les équations

$$\rho = \tau h, \quad \rho = \operatorname{tang}\tau\operatorname{tang}\alpha,$$

ρ et τ étant des coordonnées polaires ou des coordonnées rectilignes. Il y a une infinité de solutions.

On peut supposer que la droite BC et les diverses génératrices qu'elle rencontre sont entraînées dans l'espace d'un même mouvement hélicoïde, de manière qu'elles décrivent toutes la surface; le point I et les autres points de rencontre engendreront alors des hélices doubles. On voit ainsi que les nappes de la surface se coupent suivant une série indéfinie d'hélices.

CHAPITRE II.

HÉLICOÏDE DÉVELOPPABLE.

Considérations générales.

968. Un hélicoïde développable est déterminé quand on connaît l'hélice arête de rebroussement : sur la *fig.* 379 l'arc considéré de cette courbe est (AB, A'B'). La trace horizontale de la surface, lieu des traces des tangentes à l'hélice, est la développable A*geb* du cercle AB : lorsqu'elle est construite, on obtient avec précision la position des diverses génératrices. Nous en avons déterminé deux

(Gg, G$'g'$), (Bb, B$'b'$) parallèles au plan vertical, et une troisième (Ee, E$'e'$) dans une situation quelconque.

Nous savons construire le cône directeur d'un hélicoïde réglé, et par conséquent nous pourrons déterminer les plans tangents à un hélicoïde développable, et les asymptotes des branches infinies de ses sections planes (art. **470**). Nous allons examiner successivement ces problèmes.

Plans tangents.

969. Le plan tangent à un hélicoïde développable en un point quelconque (n, n') (*fig.* 379) est tangent tout le long de la génératrice (Ee, E$'e'$) qui passe en ce point; sa trace Tt est donc tangente en e à la développante du cercle trace de la surface, et par suite perpendiculaire à la droite Ee. Il résulte de là qu'une génératrice est la ligne de plus grande pente du plan tangent qui la contient, et que tous les plans tangents font avec le plan horizontal des angles égaux à celui des génératrices avec ce plan. La surface est donc d'égale pente. Nous aurions pu arriver immédiatement à ce résultat en remarquant que le cône directeur est de révolution.

970. Proposons-nous maintenant de *mener à un hélicoïde développable un plan tangent par un point non situé sur la surface.*

Nous nous donnons l'hélicoïde par la projection horizontale ABC de l'arête de rebroussement (*fig.* 380), l'arc de développante bgAec trace de la partie considérée de la surface, et une génératrice (Cc, C$'c'$); le point donné est (F, F$'$).

Nous construisons le cône directeur en plaçant son sommet au point (F, F$'$); une de ses génératrices est la droite (Ff, F$'f'$) parallèle à (Cc, C$'c'$); sa trace horizontale est le cercle qui a son centre en F et dont le rayon est Ff.

Le plan cherché fait avec le plan horizontal le même angle que la droite (Cc, C$'c$); comme d'ailleurs il passe par le point (F, F$'$), il est tangent au cône directeur, et sa trace, que nous savons être tangente à la développante bAc, doit de plus toucher le cercle Ff.

La tangente commune ee_1 est la trace d'un plan qui satisfait aux conditions du problème, car les génératrices projetées sur les droites parallèles Ee et Fe_1 font avec le plan horizontal des angles égaux et dirigés dans le même sens; elles sont donc parallèles, et par suite le plan contenant la droite ee_1 et le point (F, F$'$) touche l'hélicoïde le long de la génératrice Ee. Il n'en est pas de même des génératrices projetées sur les droites hH et h_1F : elles ne s'élèvent pas dans le même sens, et l'on doit les considérer comme formant avec le plan horizontal des angles supplémentaires. La tangente commune hh_1 ne correspond donc pas à une solution.

La droite gg_1 est la trace d'un plan tangent passant par le point (F, F$'$), car la

génératrice gG touche l'arête de rebroussement au-dessous du plan horizontal, et se trouve bien parallèle à la génératrice g_1F du cône directeur. La droite ii_1 doit être rejetée ainsi qu'une autre tangente commune qui aurait son point de contact sur la développante près du point A, et que nous n'avons pas tracée par crainte de porter un peu de confusion sur l'épure.

Si l'on a quelque doute sur la position relative, dans l'espace, des deux génératrices Fh_1 et Hh, on le dissipera en construisant leurs projections verticales.

971. Nous allons maintenant résoudre le problème de *mener à un hélicoïde développable un plan tangent parallèle à une droite donnée* (SD, S'D') (*fig*. 381 et 382). On connaît la trace bAc de la partie considérée de la surface, et l'une des génératrices (eE, e'E').

Concevons un plan passant par la droite (SD, S'D') et parallèle au plan cherché ; il fera avec le plan horizontal le même angle que les génératrices de la surface ; il sera donc tangent au cône directeur placé de manière à avoir son sommet en un point (S, S') de la droite. La trace du plan cherché est par conséquent parallèle à l'une des tangentes Dm et Dn à la trace horizontale du cône directeur; elle est d'ailleurs tangente à la développante bAc. Ces conditions déterminent quatre droites : trois d'entre elles gg_1, hh_1 et kk_1 sont les traces de plans qui satisfont au problème. La quatrième ii_1 est à rejeter, car le plan tangent qu'elle détermine n'est pas parallèle au plan tangent au cône directeur le long de la génératrice Sn : les inclinaisons de ces plans sont égales, mais de sens contraire.

Sections planes.

972. Pour construire l'intersection d'une surface réglée par un plan, on détermine les rencontres, avec le plan, d'un certain nombre de génératrices convenablement espacées ; les branches infinies correspondent aux génératrices parallèles au plan sécant, et par suite à celles des génératrices du cône directeur qui sont contenues dans un plan mené par le sommet de ce cône, et parallèle au plan sécant.

Soient (*fig*. 383)

(An, A'n') l'hélice arête de rebroussement d'un hélicoïde développable ;
(GB, G'B') une génératrice parallèle au plan vertical ;
AV la développante du cercle trace horizontale de la surface ;
(P, P') le plan sécant.

Nous déterminons le sommet (O, S) du cône directeur, lorsque ce cône a pour trace le cercle AB (art. **959**), et nous faisons passer par ce point un plan parallèle à (P, P'); sa trace horizontale coupe la trace du cône en deux points m et q;

les génératrices correspondantes du cône sont parallèles au plan sécant : nous considérerons seulement celle qui est projetée sur Om.

Quand la génératrice OA du cône prend la position Om, la génératrice parallèle BG de l'hélicoïde se place en nL et a sa trace en L. Le plan tangent à la surface le long de la droite (nL, n'L') a pour trace la droite LH perpendiculaire à nL. L'asymptote, intersection du plan sécant et du plan tangent le long de la génératrice nL, perce le plan horizontal au point H où se coupent les traces de ces plans; elle est d'ailleurs parallèle aux génératrices (Om, Sm') et (nL, n'L') du cône directeur et de la surface; il est donc facile de tracer ses projections HR et H'R'.

La droite nL est la projection d'une infinité de génératrices qui ont leurs traces aux différents points où nL rencontre la développante indéfinie AV. A chacune d'elles correspond une branche infinie avec asymptote. La génératrice du cône directeur qui a sa trace en q fait trouver une autre série de branches infinies. On voit donc que, quand l'angle α des génératrices avec le plan horizontal est plus petit que l'angle θ du plan sécant avec le même plan, la section a deux branches infinies avec asymptotes, dans chaque partie de la surface qui correspond à une spire de l'arête de rebroussement.

Si l'angle α était égal à θ, le plan sécant serait parallèle à une génératrice et au plan tangent le long de cette droite; la section aurait par conséquent des branches paraboliques. Enfin, si α surpassait θ, la courbe n'aurait pas de branche infinie dans la partie qui correspond à une spire de l'hélice; elle se déroulerait indéfiniment comme une développante de cercle.

Si l'on suppose que le plan (P, P') se meuve parallèlement à lui-même, l'asymptote se transportera dans le plan tangent HL, et se confondra avec la génératrice nL quand la trace P passera par le point L. L'intersection se composera alors de cette génératrice qui est sa propre asymptote, et d'une courbe qui la rencontrera tangentiellement au point (n, n') (art. **449**).

973. *Seconde méthode applicable à toutes les surfaces d'égale pente.* — Considérons une surface d'égale pente et un plan qui rencontrent respectivement le plan horizontal sous des angles α et θ. Soient (*fig.* 386)

M la projection horizontale d'un point de leur intersection;
MT une génératrice de la développable;
P la trace de cette surface;
EI celle du plan sécant.

Le plan tangent le long de la génératrice MT a pour trace la perpendiculaire TE à MT (art. **545**); par suite la projection de la tangente en M à la courbe d'intersection est EM. D'ailleurs, si l'on abaisse la perpendiculaire MI sur EI, on

aura, en appelant ζ l'ordonnée verticale du point M de l'espace,

$$\zeta = \text{MI} \tang\theta, \quad \zeta = \text{MT} \tang\alpha;$$

d'où

$$\frac{\text{MT}}{\text{MI}} = \frac{\tang\theta}{\tang\alpha}.$$

974. Nous décrivons un cercle d'un rayon quelconque OD (*fig.* 387); par son centre O nous tirons une droite OF parallèle à IE, et nous prenons sur cette ligne un point F tel que l'on ait

$$\frac{\text{OF}}{\text{OD}} = \frac{\tang\theta}{\tang\alpha}.$$

Nous traçons ensuite le rayon OB perpendiculaire à la projection de la génératrice considérée MT, et nous joignons BF : les triangles TMI et FOB sont semblables (*fig.* 386 et 387), car les angles IMT et FOB sont égaux comme formés par des droites respectivement perpendiculaires [1], et les côtés qui les comprennent sont proportionnels en vertu des équations qui précèdent. L'angle OFB est donc égal à l'angle ITM et par suite à l'angle IEM, car les angles MTE et MIE étant droits, les points E, T, I et M sont sur une circonférence. Nous voyons donc que la droite FB est parallèle à la tangente EM.

D'après cela, il est facile de construire la projection horizontale de la section et ses tangentes, quand le cercle auxiliaire est tracé et le point fixe F déterminé. Pour avoir le point M situé sur une génératrice TM, on trace les droites TE et OB qui lui sont perpendiculaires, puis la droite BF : la parallèle à cette ligne menée par le point E est tangente à la courbe au point M où elle rencontre TM. On peut, en faisant la construction en ordre inverse, déterminer le point de l'intersection où la tangente est parallèle à une droite donnée.

Toutes les fois que l'angle θ du plan sécant avec le plan horizontal sera plus grand que l'angle α de la développable, le point F se trouvera en dehors du cercle auxiliaire, et on pourra mener de ce point deux tangentes au cercle. Chacune de ces divergentes sera perpendiculaire au rayon correspondant; la tangente parallèle EM sera alors perpendiculaire à TE, parallèle à la génératrice TM, et par conséquent asymptote. Quand le point F est dans l'intérieur du cercle, la courbe d'intersection n'a pas de branche infinie, à moins que l'arête de rebroussement de la surface n'en ait elle-même [2].

---

[1] On place le point F arbitrairement d'un côté ou de l'autre du point O, sur le diamètre parallèle à IE. La condition de l'égalité des angles IMT et FOB montre de quel côté du centre O on doit ensuite tracer le rayon OB.

[2] Cette construction nous a été communiquée par Bour pour l'hélicoïde développable. M. Mannheim a remarqué qu'elle s'étendait à toutes les surfaces d'égale pente.

975. Pour appliquer commodément cette construction à l'hélicoïde développable, nous supposons que les plans de projection ont été choisis de telle manière que la trace horizontale EO′ du plan sécant (EO′, O′M′) passe par le centre O du cercle OC projection de l'arête de rebroussement (*fig.* 388), et soit perpendiculaire à la ligne de terre.

Nous prenons le cercle OC pour cercle auxiliaire; le point fixe F est alors sur la trace O′E du plan. Pour le déterminer, il suffit de tracer la parallèle C′K à la trace verticale C′M′ du plan sécant jusqu'à la projection O′Z de l'axe, et ensuite la droite KF'_1 faisant l'angle α avec XY : la longueur OF est égale au segment $O'F'_1$.

Sur notre figure le point F est extérieur au cercle; il en résulte que l'intersection a deux branches infinies dans chaque partie de la surface qui correspond à une spire de l'hélice de rebroussement. Les projections des asymptotes sont alternativement parallèles aux tangentes Fb et Fb_1. Nous en avons construit deux de chaque série.

Les points tels que n, où les différentes branches de la courbe se coupent, appartiennent aux hélices doubles (art. **967**).

L'application de ce procédé, à la détermination des sections planes du cône de révolution et des surfaces d'égale pente étudiées dans le VI[e] Livre, donne lieu à des exercices graphiques intéressants.

Hélicoïde développable déterminé par deux hélices directrices.

976. *Les cercles* A *et* B (*fig.* 392) *étant les projections de deux hélices de même pas et de même sens dont les traces sont aux points a et b, on demande de déterminer un hélicoïde développable auquel ces courbes appartiennent.*

Nous décrivons les développantes aG et bG traces des développables dont ces hélices sont les arêtes de rebroussement; de l'un de leurs points d'intersection G nous menons les tangentes Gm et Gn, et nous joignons les points de contact m et n. Les hélices étant de même pas et de même sens, les points m et n de l'espace peuvent se transporter sur ces courbes d'un même mouvement hélicoïde, et alors la droite mn décrira un hélicoïde réglé. Cette surface est d'ailleurs développable, car les tangentes aux directrices aux points m et n d'une génératrice se rencontrent au point G (1).

On obtient le rayon du cercle projection de l'arête de rebroussement, en abaissant une perpendiculaire du centre o sur mn.

(1) Cette construction est due à Th. Olivier (*Développements de Géométrie descriptive*).

Développement de l'hélicoïde.

977. L'hélice étant une ligne géodésique du cylindre sur lequel elle est tracée, tous ses plans osculateurs sont normaux à cette surface. Les rayons principaux du cylindre sont d'ailleurs l'un infini, l'autre égal à r; par conséquent, si l'on appelle ρ le rayon de courbure de l'hélice en un point, le théorème d'Euler donne immédiatement

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\cos^2\beta \text{ (1)}.$$

Jusqu'à présent nous avons surtout considéré la courbure des sections planes des surfaces; mais, ainsi que nous l'avons déjà remarqué (art. **797**), les théorèmes relatifs aux rayons de courbure peuvent être étendus aux courbes gauches. La grandeur d'un rayon de courbure est en effet déterminée par les positions relatives de trois points infiniment voisins de la courbe; le plan qui contient ces trois points est celui de la courbe si elle est plane, et simplement son plan osculateur si elle est gauche (2).

Les grandeurs r et β sont les mêmes pour tous les points de l'hélice; le rayon de courbure ρ est donc constant. Il suit de là que, dans le développement d'un hélicoïde développable, la courbe plane transformée de l'arête de rebroussement a tous ses rayons de courbure égaux à ρ (art. **475**), et que par conséquent c'est un cercle dont le rayon est ρ.

978. Il n'est pas nécessaire de recourir au théorème d'Euler pour obtenir la formule que nous avons trouvée à l'article précédent. Nous remarquerons d'abord que deux arcs de même longueur d'une hélice sont évidemment superposables, et que par conséquent le rayon de courbure de cette ligne en ses différents points est constant, ainsi que celui de sa transformée (art. **475**).

Considérons sur l'hélicoïde deux génératrices A et B tangentes à l'arête de rebroussement en des points qui comprennent une demi-spire; appelons ρ le rayon de la circonférence transformée de cette courbe, et désignons par a et b les génératrices du cône directeur respectivement parallèles à A et à B. Les droites a et b sont dans un plan qui contient l'axe du cône.

---

(1) Cette formule est applicable à une courbe quelconque et à sa projection sur un plan parallèle au rayon de courbure.

(2) Les formules démontrées dans la Note de l'art 861 permettent de trouver facilement, pour un point de l'hélice, l'expression du rayon de courbure et la position du plan osculateur; car β' est nul, r' est infini et θ égale 90°, si l'on prend le plan horizontal perpendiculaire à l'axe de l'hélice, et le plan vertical parallèle à la tangente à cette courbe au point considéré. (E. L.)

La longueur d'une demi-spire est $\frac{\pi r}{\cos\beta}$ (art. **949**). Les génératrices A et B comprennent donc après le développement un angle égal à $\frac{\pi r}{\rho\cos\beta}$.

Si nous supposons le cône directeur placé de manière à avoir pour trace horizontale la projection de l'arête de rebroussement, les génératrices a et b perceront ce cercle en deux points distants d'une demi-circonférence πr. Dans le développement du cône, la trace de cette surface a pour transformée un arc de cercle dont le rayon est $\frac{r}{\cos\beta}$. L'angle que les droites a et b font après le développement est donc égal à $\pi\cos\beta$ (art. **167**).

Quand la surface et le cône sont développés, les droites A et B d'une part, a et b de l'autre, comprennent encore des angles égaux (art. **481**); nous avons par conséquent

$$\pi\cos\beta = \frac{\pi r}{\rho\cos\beta}, \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{r}{\cos^2\beta}.$$

La génératrice A$'o'$ du cône directeur (*fig.* 389) est égale à $\frac{r}{\cos\beta}$; donc, en élevant à A$'o'$ en o' la perpendiculaire $o'\omega'$, nous déterminerons un segment A$'\omega'$ qui sera égal à ρ (¹).

979. Si nous voulons faire le développement de la partie de la surface qui correspond à une demi-spire (ADG, A'D'G') de l'arête de rebroussement (*fig.* 389), nous tracerons deux droites rectangulaires A$''g''$ et g''G$''$ respectivement égales à la demi-circonférence AG et à la moitié du pas; l'hypoténuse A$''$G$''$ sera la longueur de la demi-spire de l'hélice; nous la porterons sur une circonférence décrite avec un rayon $\omega_1 D_1$ (*fig.* 390) égal à A$'\omega'$ (*fig.* 389), et nous obtiendrons l'arc A_1G_1, transformée de la partie (AG, A'G') de l'arête de rebroussement.

La longueur d'une spire de l'hélice est égale à $\frac{2\pi r}{\cos\beta}$, et par suite à la circonférence dont le rayon est $\frac{r}{\cos\beta}$ ou A$'o'$. En rectifiant la moitié de ce cercle, on obtient directement la longueur A$''$G$''$.

Une spire occupe sur le cercle de la transformée de l'hélice un arc dont le rapport à la circonférence est

$$\frac{\left(\frac{2\pi r}{\cos\beta}\right)}{2\pi\rho}.$$

Eu égard à la valeur de ρ, cette expression est égale à $\cos\beta$ ou à $\frac{dD}{d'D'}$ (*fig.* 389). On peut, en mesurant ces deux longueurs, calculer l'amplitude de l'arc A_1G_1.

(¹) Nous devons à M. Mannheim la détermination de la valeur de ρ par la considération du cône directeur.

La transformée $A_1 g_1$ de la développante Ag est une développante du cercle $A_1 G_1$ (art. **473**). On peut par cette considération obtenir la formule de l'art. **977**, en supposant connue l'équation aux arcs et aux rayons de courbure de la développante de cercle [1].

980. *Les transformées des diverses hélices de la surface sont des cercles concentriques;* car, pour avoir l'une d'elles, il faut porter une longueur constante sur chaque génératrice, à partir du point où elle touche le cercle dans lequel se change l'arête de rebroussement.

Si l'on veut avoir la transformée de l'arc d'hélice projeté sur le segment *pmn* (*fig.* 389), on portera sur la tangente $D_1 d_1$ (*fig.* 390) une longueur $D_1 m_1$ égale à $D'm'$; la courbe cherchée sera l'arc de cercle passant par le point m_1 et ayant son centre au point ω_1. Nous n'avons pas représenté sur la *fig.* 389 la projection verticale de cette hélice par crainte de confusion.

Nous savons que le rayon de courbure de l'arête de rebroussement n'est pas altéré par le développement (art. **475**). Les rayons de courbure des autres hélices ne sont pas ceux des cercles de leurs transformées.

981. Reprenons l'équation de l'art. **977**

$$\rho = \frac{r}{\cos^2 \beta}.$$

Si l'on attribue à ρ une grandeur déterminée quelconque et que l'on fasse varier β et r, on aura une infinité d'hélicoïdes dont les arêtes de rebroussement se transformeront suivant le même cercle, lorsqu'on les développera sur un plan, et qui par conséquent pourront être développés les uns sur les autres.

Remplaçant dans cette formule $\cos^2 \beta$ par sa valeur en fonction de r et de h, déduite de la première équation (1 *bis*) de l'art. **950**, on obtient

$$h^2 + r^2 - \rho r = 0.$$

En considérant h et r comme des coordonnées rectangulaires variables, l'équation précédente représentera un cercle qui passe par l'origine, dont le centre est sur l'axe des r et dont le diamètre est égal à ρ. Ce cercle étant tracé, on trouvera pour chaque valeur de r deux ordonnées égales et de signes contraires qui détermineront deux hélicoïdes développables de même pas, l'un dextrorsum, l'autre sinistrorsum, tous deux applicables sur le premier hélicoïde.

---

(1) Cette équation est

$$R^2 = 2rs.$$

R et s sont les rayons de courbure E*e* (*fig.* 389) et l'arc correspondant A*e*.

Centres de courbure de l'hélice et surface lieu de ses développées.

982. Si nous portons le rayon de courbure $A'\omega'$ de D en ω (*fig*. 389), le point (ω, D') sera le centre de courbure de l'hélice (AG, A'G') pour le point (D, D'). Le lieu des centres de courbure de cette ligne est une seconde hélice, de même pas qu'elle, et projetée sur le cercle décrit du point o comme centre, avec $o\omega$ pour rayon. Appelant r' le rayon de ce cercle, nous avons

$$r' = \rho - r = r \operatorname{tang}^2 \beta,$$

d'où

$$rr' = h^2.$$

Cette formule est symétrique en r et en r'; les deux hélices ont d'ailleurs les mêmes normales principales. Il résulte de là que la première est le lieu des centres de courbure de la seconde, comme celle-ci est le lieu des centres de courbure de la première.

Une semblable réciprocité ne peut pas exister entre des lignes planes, parce que les normales principales à une courbe de ce genre sont toutes dans un plan, et qu'elles y ont nécessairement une enveloppe, de sorte que le lieu des centres de courbure est une développée de la courbe.

La formule que nous avons trouvée montre que, *quand deux hélices sont telles que chacune d'elles soit le lieu des centres de courbure de l'autre, leur pas réduit commun est moyen proportionnel entre les rayons des cylindres sur lesquels elles sont tracées.*

983. Considérons une hélice (AB, A'B') (*fig*. 391) et le plan (GG', G'E'), qui lui est osculateur au point (E, E') où sa tangente est parallèle au plan vertical; si nous supposons que ce plan se meuve en restant toujours osculateur de l'hélice, l'enveloppe de ses positions sera la développable dont l'hélice (AB, A'B') est l'arête de rebroussement (art. **465**).

L'angle β que le plan forme avec le plan horizontal, le pas réduit des hélices et le rayon r du cylindre sur lequel est l'hélice arête de rebroussement de là développable enveloppe, sont reliés par la formule (art. **966**)

$$r = h \cot \beta.$$

Considérons maintenant un plan (gg', g'E') perpendiculaire au premier, et le coupant suivant une horizontale qui rencontre l'axe; puis supposons qu'il soit entraîné dans le mouvement : l'hélicoïde développable enveloppe de ses positions aura son arête de rebroussement (ab, $a'b'$) située sur un cylindre dont le rayon r' sera donné par la formule

$$r' = h \operatorname{tang} \beta.$$

Le produit rr' est égal à h^2; par conséquent, et eu égard à la position des hélices, chacune d'elles est le lieu des centres de courbure de l'autre (art. **982**).

Le plan normal à l'une des hélices en un point quelconque (E, E') est osculateur de l'autre au point (e, e') situé dans le même plan horizontal. Chacun des hélicoïdes est donc l'enveloppe des plans normaux à l'arête de rebroussement de l'autre hélicoïde, et par conséquent le lieu des développées de cette courbe.

Exercice pour la section d'un hélicoïde développable par un plan, et le développement de cette surface.

984. Nous avons représenté sur la *fig.* 393 la partie d'un hélicoïde développable qui correspond à une spire de l'hélice directrice.

Cette courbe se projette sur le cercle ABC.... La trace horizontale de la surface est l'arc de développante A*cdegh*... correspondant à une circonférence; l'arc symétrique As_1r_1... est la projection de la trace de la surface sur le plan horizontal $a'_1j'_1$ élevé au-dessus du premier d'une hauteur égale au pas.

Nous partageons le cercle en parties égales, et, traçant les tangentes aux points de division, nous avons les projections horizontales d'un certain nombre de génératrices. Chacun des segments Aa_1, cc_1, dd_1, ..., compris entre les deux développantes, est égal à la longueur de la circonférence ABC....

Nous projetons les points des développantes A*cde*... et $As_1r_1q_1$... respectivement sur deux horizontales $j's'$ et $a'_1j'_1$; puis, joignant les points correspondants A' et a'_1, b' et b'_1, ..., nous avons les projections verticales des génératrices considérées.

La branche A*cd*... de la développante n'a pu être tracée en entier, et par suite les traces horizontales de deux génératrices manquent sur la figure; mais il est facile de reconnaître par la construction que les génératrices qui, sur le plan horizontal, ont des positions symétriques par rapport à la droite AOJ, sont parallèles sur le plan vertical; par conséquent, pour avoir les projections des deux dernières génératrices, il suffit de tracer par les points A'_1 et u'_1 des droites respectivement parallèles à a'_1A' et b'_1b'.

Les projections verticales des génératrices dessinent par leur enveloppe la sinusoïde projection de l'hélice directrice.

Les plans tangents le long des génératrices $(jj_1, j'j'_1)$ et $(Aa_1, A'a'_1)$ sont perpendiculaires au plan vertical, et par suite ces droites forment le contour apparent vertical de la surface. La ponctuation est établie en conséquence.

Nous avons représenté les deux arcs d'hélice qui sont les intersections de

la développable par un cylindre de révolution qui a le même axe qu'elle, et qui passe par un point J_1.

985. L'hélicoïde est coupé par un plan (VV_1, $V'\alpha'$) perpendiculaire au plan vertical, et passant par le point de division (P, P') de l'arête de rebroussement. La position du plan rend très facile la construction de la projection horizontale de la courbe d'intersection. Pour montrer comment on peut l'obtenir par la méthode de l'art. **975**, nous avons déterminé le point fixe F et la développante $a_2 b_2 c_2 \ldots$, trace de la surface sur le plan horizontal qui contient le point O'_2 où l'axe perce le plan sécant.

La tangente de rebroussement de la projection horizontale de la section au point P est déterminée soit par le point F, soit par un point v_4 intersection des traces, sur le plan horizontal auxiliaire xy, du plan tangent et du plan sécant.

Le point F étant extérieur au cercle ABC..., la courbe a deux branches infinies (art. **974**). Les points à l'infini sont situés sur les génératrices dont les projections horizontales passent par le point F. Nous avons construit l'asymptote nn_1, parallèle à la tangente Fm, en opérant sur le plan horizontal $a'_1 j'_1$; l'autre asymptote est en dehors du cadre de l'épure.

986. Pour faire le développement, nous déterminons le rayon $q'\omega$ de la circonférence transformée de l'hélice (art. **978**); nous décrivons cette circonférence (*fig.* 395), et nous prenons sur elle un arc AA_1 égal à la longueur $A'A'_1$ d'une spire (*fig.* 393). Nous partageons l'arc AA_1 (*fig.* 395) en autant de parties égales que le cercle AJ l'a été; par les points de division nous traçons des tangentes qui représentent les génératrices, puis nous construisons les développantes Abcd, $A_1 u_1 s_1 r_1 \ldots$ transformées des traces (art. **979**).

On obtient la transformée de la courbe de section par le plan (VV_1, $V'\alpha'$) en déterminant, sur chaque génératrice, le point qui lui appartient. Pour avoir le point γ il faut connaître la vraie grandeur du segment $g'_1\gamma'$ (*fig.* 393); on y parvient facilement en ramenant par une horizontale le point γ' en γ'' sur la génératrice $A'a'_1$, parallèle au plan vertical. La longueur $a'_1\gamma''$ est portée sur la génératrice $g_1 g$ (*fig.* 395), à partir de g_1.

On place la tangente Pv_4 et l'asymptote nn_1 (*fig.* 395), par les procédés ordinaires des développements.

987. La transformée de l'intersection est $\beta\varepsilon$P $\delta\gamma\alpha$ (*fig.* 395). On peut se proposer de chercher ses points d'inflexion. Pour les obtenir, il faut construire les génératrices de contact des plans tangents perpendiculaires au plan sécant (art. **477**); comme d'ailleurs les plans tangents à l'hélicoïde sont respectivement parallèles à ceux de son cône directeur, on peut opérer sur ce cône, et lui appliquer la méthode de l'art. **170**, car il est de révolution. Nous avons représenté la construction sur la *fig.* 394. La droite (S, S'D') est l'axe du cône; les droites S'k' et D'I' respectivement parallèles à $j'_1 j'$ et $V'\alpha'$ (*fig.* 393) sont la génératrice pa-

rallèle au plan vertical, et la trace d'un plan sécant parallèle au plan (VV_1, $V'\alpha'$). Nous avons mis les mêmes lettres que sur la *fig.* 104, afin de rendre la concordance facile à saisir.

Nous trouvons que deux des plans tangents à l'hélicoïde sont perpendiculaires au plan sécant. Les génératrices de contact sont parallèles l'une à (SI, S'I'), l'autre à (SI_1, S'I') (*fig.* 394). Ces génératrices sont voisines, la première de (ll_1, $l'l'_1$), la seconde de (hh_1, $h'h'_1$) (*fig.* 393); le bras Pα doit donc avoir deux inflexions près des points où il rencontre les génératrices ll_1 et hh_1 (*fig.* 395). L'une d'elles est très rapprochée du sommet P, et par conséquent le rebroussement se présente graphiquement comme s'il était du second ordre (art. **478**).

CHAPITRE III.

SURFACE DE LA VIS A FILETS TRIANGULAIRES.

Définition. Généralités.

988. Ainsi que nous le dirons plus loin, les surfaces des filets triangulaires d'une vis sont engendrées par le mouvement hélicoïde d'une droite autour d'un axe qu'elle rencontre. On appelle, en conséquence, cette variété de l'hélicoïde réglé *surface de la vis à filets triangulaires* (1). L'axe remplace l'hélice de gorge et forme par suite la ligne de striction (art. **959**). Le paramètre des génératrices est égal et de signe contraire au pas réduit h (art. **961**), car le rayon que nous avons appelé b a une longueur nulle.

Nous avons déjà considéré cette surface à l'occasion des hélicoïdes applicables les uns sur les autres (art. **963**).

Soient (*fig.* 396)

(O, O'Z) l'axe de la surface;

(AO, A'I) la position initiale de la génératrice rectiligne que nous supposons parallèle au plan vertical;

A'A″ le pas commun des hélices : nous traçons les projections de l'hélice décrite par le point (A, A') de la génératrice, et nous considérons cette courbe comme une directrice.

(1) *Voir* la Note de l'art. 958.

On construit facilement la génératrice qui passe par un point déterminé (B, B′) de l'hélice directrice, en remarquant que d'une position à une autre tous les points de cette droite s'élèvent de quantités égales. Si l'on prend le segment IJ égal à B_0B', le point J sera celui où l'axe est coupé par la génératrice qui croise l'hélice au point (B, B′).

Après une demi-révolution, la génératrice (AO, A′I) prend la position (CO, C′L); ces deux droites se rencontrent en un point (E, E′) situé sur une hélice double, dont la distance à l'axe est la longueur OE égale à $\frac{H}{4}\cot\alpha$. Si la génératrice (CO, C′L) fait une révolution entière, elle prendra la position (CO, C″P), et coupera la droite (AO, A′I) en un point (F, F′) qui appartiendra à une hélice double, que nous n'avons pas tracée, et dont la distance à l'axe est $\frac{3H}{4}\cot\alpha$. En considérant les intersections des génératrices situées dans le plan méridien principal, on reconnaît que la surface possède un nombre indéfini d'hélices doubles (art. **967**), et que leurs rayons forment une progression arithmétique dont la raison est $\frac{H}{2}\cot\alpha$.

On considère la surface comme formée d'une *nappe supérieure* et d'une *nappe inférieure*, respectivement décrites par les parties de la génératrice A′E′ qui sont au-dessus et au-dessous du point I où elle rencontre l'axe.

Sections planes.

989. Nous savons construire le cône directeur d'un hélicoïde réglé (art. **959**), et par suite nous pouvons déterminer les asymptotes des branches infinies de la section plane d'une surface de vis à filets triangulaires (art. **748**). Quand le plan est moins incliné que les génératrices, la courbe a deux branches infinies pour chaque partie de la surface qui correspond à une spire de l'hélice directrice.

L'intersection de la surface par un plan perpendiculaire à l'axe présente un intérêt particulier.

Soit X_1Y_1 le plan sécant (*fig.* 396) : les génératrices (AO, A′I) et (BO, B′J) sont coupées aux points (N, N′) et (M, M′). Le triangle rectangle formé dans l'espace par le rayon vecteur OM, que nous appelons ρ, le segment O'_1J de l'axe, et la partie de la génératrice projetée sur JM′, donne

$$\rho = O'_1J\cot\alpha, \quad \text{ou} \quad \rho = IJ\cot\alpha + O'_1I\cot\alpha.$$

IJ est la hauteur dont chaque point de la génératrice s'est élevé au-dessus de sa

position initiale ; par conséquent, si nous appelons ω l'azimut AOB du point M, la longueur IJ sera ωh, et nous aurons

$$\rho = \omega h \cot\alpha + \mathrm{ON},$$

ou bien

$$\rho = r\omega + \mathrm{ON},$$

en posant

$$r = h \cot\alpha.$$

L'équation que nous venons de trouver montre que *la section de la surface de la vis à filets triangulaires par un plan perpendiculaire à l'axe est une spirale d'Archimède* (art. **673**). La tangente à cette courbe à l'origine fait avec la droite AC un angle AOS égal à $-\frac{\mathrm{ON}}{r}$.

Les points doubles G et R de la spirale appartiennent aux hélices doubles.

Un plan perpendiculaire à l'axe n'est parallèle à aucune génératrice ; la section s'étend cependant indéfiniment et doit être considérée comme ayant une branche infinie qui correspond à une génératrice située à l'infini (art. **599**).

Le paramètre r de la spirale est le rayon du cylindre sur lequel est l'arête de rebroussement de l'hélicoïde développable asymptote (art. **966**). Pour construire cette longueur on peut développer le quart de cercle VC sur sa tangente VU, projeter le point double E' en E_1 et celui-ci en K : la longueur OK est le paramètre r. Cette construction est analogue à celle du rayon OK de la *fig.* 375 (art. **955**).

990. Considérons la droite OM (*fig.* 404), projection d'une génératrice qui perce le plan horizontal en un point M de la spirale d'Archimède OL, trace de l'hélicoïde : le plan vertical OM est le plan central de la génératrice (art. **959**), et par suite le plan tangent au point de cette ligne situé à l'infini a pour trace la droite MN perpendiculaire à OM. L'enveloppe des droites telles que MN doit être la développante de cercle trace de l'hélicoïde développable asymptote.

Il est facile de vérifier ce résultat. Si nous appelons φ l'azimut BOM du point considéré M de la spirale OL, nous aurons

$$\mathrm{OM} = r\varphi.$$

Traçons le cercle AG dont le rayon est r et le centre O, la droite GN parallèle à OM et tangente à ce cercle, et ensuite les rayons OA, OG respectivement perpendiculaires à OB et à OM : le segment GN de la tangente sera égal à OM, par suite à $r\varphi$ et enfin à l'arc AG, car l'angle AOG est égal à BOM. Le lieu des points N, enveloppe des droites MN, est donc une développante du cercle AG ; ce cercle est d'ailleurs la projection de l'arête de rebroussement de la développable asymptote (art. **966**).

De ce qui précède, et en considérant uniquement les tracés sur le plan horizontal, on conclut les deux théorèmes suivants :

L'enveloppe des droites menées par les divers points d'une spirale d'Archimède, perpendiculairement aux rayons vecteurs, est une développante du cercle qui a son centre à l'origine de la spirale, et dont le rayon est égal au paramètre de cette courbe.

Le lieu des pieds des perpendiculaires, abaissées du centre d'un cercle sur les tangentes à l'une des développantes, est une spirale d'Archimède.

Plans tangents.

991. Une surface de vis à filets triangulaires étant donnée par son axe (O, O′Z) (*fig.* 399), une hélice directrice (AC, A′C′), et la génératrice (AO, A′O′) parallèle au plan vertical, proposons-nous de déterminer son plan tangent en un point (M, M′) d'une génératrice (ON, RN′). Il passe au point donné une hélice qui se projette horizontalement sur le cercle décrit du point O comme centre avec OM pour rayon ; elle rencontre la génératrice initiale (AO, A′O′) au point (D, D′). Si l'on prend pour plan horizontal d'opération le plan xy qui contient ce point, on obtiendra la trace l de la tangente à l'hélice considérée, au point (M, M′), en portant sur la tangente ML au cercle MD une longueur $\mathrm{M}l$ égale à l'arc MD. Il est d'ailleurs facile d'avoir les traces k et K de la génératrice sur les plans horizontaux xy et XY ; les traces du plan cherché, sur ces plans, sont par conséquent la droite kl et sa parallèle KL menée par le point K.

On peut modifier cette construction de manière à n'avoir à faire des tracés que sur le plan horizontal [1].

Nous menons par le point M la droite IQ perpendiculaire à KL, et par O la perpendiculaire OQ à OM : les deux triangles LMK et MOQ, qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, donnent

$$\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MK}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OQ}}.$$

Le point L étant la trace de la tangente à l'hélice MD sur le plan XY nous avons

$$\frac{\mathrm{M'M'_0}}{\mathrm{ML}} = \frac{\mathrm{H}}{2\pi \times \mathrm{OM}},$$

H étant le pas des hélices ; car chacun des deux membres est une expression de

---

[1] Dans son *Dictionnaire des Mathématiques appliquées* (p. 982), H. Sonnet fait remarquer que « la construction qui précède a été modifiée d'une manière heureuse par M. de la Gournerie ». (E. L.)

la tangente trigonométrique de l'angle que les tangentes à l'hélice font avec le plan horizontal.

Multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on a

$$\frac{M'M'_0}{MK} = \frac{H}{2\pi \times OQ},$$

et enfin, en introduisant le pas réduit h, et remarquant que le premier membre est la tangente de l'angle α, on obtient

$$OQ = h \cot \alpha.$$

La longueur de la perpendiculaire OQ est donc constante, et égale au paramètre de la spirale d'Archimède trace de la surface sur un plan horizontal (art. **989**).

D'après cela, pour déterminer le plan tangent en un point M d'une génératrice OK, il suffit d'élever au point O une droite OQ perpendiculaire à OK et égale au paramètre r, de tracer la droite QM et de lui abaisser de la trace K de la génératrice une perpendiculaire KL : cette droite est la trace horizontale du plan tangent.

Si l'on donne à la figure différentes dispositions, on reconnaîtra que la perpendiculaire OQ doit toujours être dirigée du côté où s'étend la branche de la spirale d'Archimède sur laquelle se trouve la trace de la génératrice que l'on considère.

Cette seconde construction est beaucoup plus facile que la première quand le paramètre r a été déterminé. On doit la préférer lorsque l'on veut avoir plusieurs plans tangents. En renversant l'ordre des tracés, on a la solution du problème inverse : ainsi, étant donnée la trace LK d'un plan contenant une génératrice OK, pour trouver le point de contact de ce plan il suffit d'élever OQ perpendiculaire à OK, et d'abaisser QI perpendiculaire à KL : cette droite coupe OK au point cherché M.

992. Si le point M se meut sur la génératrice OK, la trace KL du plan tangent et sa perpendiculaire QM tourneront l'une autour du point K, l'autre autour du point Q. Lorsque le point M sera en K, la droite LK devra être tangente à la spirale d'Archimède : la normale à cette courbe au point K passe donc au point Q, ce qui démontre que *dans la spirale d'Archimède la sous-normale est constante et égale au paramètre* [1].

Quand le point M est à l'infini, la droite QM est parallèle à OK, et par suite la trace du plan tangent est perpendiculaire à la projection de la génératrice.

---

[1] En admettant ce théorème, déjà établi à l'article 674, on arrive directement aux tracés que nous avons donnés pour la détermination du plan tangent; mais nous n'avons pas voulu que cette construction importante reposât sur une proposition qui n'a été démontrée que d'une manière incidente.

Nous avons obtenu précédemment ce résultat par la considération du cône directeur.

Lorsque le point M est en O, la droite KL se confond avec KO.

La perpendiculaire QI peut être considérée comme la projection de celle des droites de plus grande pente du plan tangent qui passe au point de contact, ou de la tangente de plus grande pente de la surface au point M. Quelle que soit la position du point M, cette tangente rencontre trois droites fixes : la génératrice OK, celle qui lui est infiniment voisine, et la verticale du point Q. Nous voyons ainsi que *les tangentes de plus grande pente à une surface de vis à filets triangulaires aux divers points d'une génératrice forment un hyperboloïde*. La trace de cet hyperboloïde est le lieu des points I, c'est-à-dire le cercle décrit sur KQ comme diamètre.

993. Il est facile de reconnaître, par la construction, que les plans tangents aux divers points d'une hélice sont également inclinés sur le plan horizontal. Pour déterminer l'hélice, lieu des points où le plan tangent a une inclinaison donnée, on fait passer par une génératrice un plan ayant cette inclinaison (art. **135**), et l'on construit son point de contact qui appartient à l'hélice cherchée.

Si l'on veut déterminer le point de la surface où le plan tangent est parallèle à un plan donné G, on fera passer par une génératrice un plan ayant la même inclinaison que G, on déterminera son point de contact, et on fera tourner la génératrice d'un angle tel que la trace du plan tangent devienne parallèle à la trace de G. On est conduit à ce problème lorsque l'on cherche le point brillant pour des rayons parallèles (art. **425**).

Courbe d'ombre propre dans le cas de rayons parallèles.

994. Les constructions que nous avons expliquées dans le paragraphe précédent permettent de construire par points la courbe d'ombre propre d'une surface de vis à filets triangulaires.

Nous prenons un plan vertical parallèle aux rayons de lumière; la droite (O, O'Z) (*fig.* 401) est l'axe de la surface, (AO, A'C) une génératrice parallèle au plan vertical et (OT, CT') le rayon de lumière qui passe par le point où elle rencontre l'axe. La flèche courbe indique le sens dans lequel le point (A, A') tourne lorsque la génératrice s'élève. Nous rapportons de plus la longueur OF du paramètre *r*, après l'avoir construite.

Pour simplifier les constructions, nous allons supposer que le plan horizontal s'élève en même temps que la génératrice (art. **49**); alors, quand cette droite se projette sur la ligne OK, sa trace est le point K situé sur le cercle décrit du

point O comme centre, avec OA pour rayon, et le point T est toujours la trace du rayon de lumière qui passe au point où la génératrice rencontre l'axe. TK est donc la trace du plan qui contient la génératrice OK et qui est parallèle aux rayons. Pour déterminer le point de contact de ce plan, il faut élever OQ perpendiculairement à OK, jusqu'à la rencontre du cercle décrit du point O comme centre avec un rayon égal à r, mener la perpendiculaire QI à KT, et prolonger cette droite jusqu'à sa rencontre M avec OK.

995. Cette construction peut être rendue plus simple : les triangles POQ et TOK sont semblables, car les angles K et Q ont leurs côtés perpendiculaires, et les angles en O sont égaux comme complémentaires d'un même angle POK. On a, par conséquent,

$$\frac{\text{OP}}{\text{OQ}} = \frac{\text{OT}}{\text{OK}};$$

ou bien

$$\frac{\text{OP}}{r} = \frac{\cot \text{O}'\text{T}'\text{C}}{\cot \alpha}$$

et, eu égard à la valeur de r (art. **989**),

$$\text{OP} = h \cot \text{O}'\text{T}'\text{C}.$$

La longueur du segment OP est donc constante; lorsque l'on a déterminé la position du point fixe P, on peut construire rapidement la courbe à l'aide de ce point et du cercle FF_1 dont le rayon est r. Pour avoir le point M situé sur une droite qui passe par le point P et qui coupe le cercle en Q, il suffit de tracer le rayon OQ et de lui mener par le centre O une perpendiculaire OM. Un second point M_1 correspond à la deuxième intersection Q_1 de la droite PQ avec le cercle FF_1.

Nous prenons deux axes rectangulaires OT et OY; nous mesurons les abscisses positives de O vers T et les ordonnées positives de O vers Y : l'ordonnée OP, que nous appellerons g, est par conséquent positive sur la figure. L'angle du rayon CT′ avec le plan horizontal doit être considéré comme obtus, vu la direction des abscisses positives : cet angle γ est supplémentaire de O′T′C. D'après nos conventions (art. **961**), le pas réduit h, toujours de même signe que le pas H, est positif. En vertu de ces diverses observations, la formule que nous venons de trouver devient

$$g = -h \cot \gamma.$$

Pour déterminer la longueur de l'ordonnée g, on peut relever le point F en F′ et tracer la droite $\text{P}'_1\text{F}'$ parallèle à XY : la longueur $\text{O}''\text{P}'_1$ est égale à OP [1].

---

[1] Cette construction de la projection de la courbe d'ombre par le point fixe P et le cercle FQQ_1 est due à Poncelet. Nous aurions pu laisser le plan horizontal fixe, sans modifier sensiblement la

996. Les points M et M_1 sont à une même distance du point O (*fig.* 401), car il y a égalité évidente entre les triangles OQM et OQ_1M_1; le point *s* milieu de MM_1 est par conséquent le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur PQ, et se trouve sur le cercle décrit sur OP comme diamètre. Ce cercle est *une ligne diamétrale* de la courbe pour les cordes qui divergent de P.

Le point M arrive en P lorsque l'intersection Q est en F ou en F_1; le point fixe P est donc un point double de la projection de la ligne d'ombre : les droites FP et F_1P (*fig.* 402) sont les deux tangentes; car on peut regarder chacune d'elles comme une sécante dont le second point de rencontre s'est confondu avec le premier.

Lorsque la divergente PQ se confond avec l'axe OY, les points M et M_1 sont réunis en O (*fig.* 401). L'origine O est donc un second point double de la courbe, mais les deux branches qui y passent ont une tangente commune OT. On le reconnaît, soit en appliquant le raisonnement précédent aux sécantes OM et OM_1, soit en remarquant qu'aux points de la courbe d'ombre qui se projettent en O, le plan tangent à la surface est vertical, et que, puisqu'il est parallèle aux rayons de lumière, sa trace est OT; il projette donc sur cette droite toutes les lignes qu'il contient, et notamment les tangentes à la courbe d'ombre aux points où elle coupe l'axe de l'hélicoïde (1).

---

démonstration que nous donnons; mais, en le supposant mobile, nous avons obtenu, à l'aide du point fixe T, du cercle AKK_1 et du cercle FQQ_1, une construction qui présente de l'intérêt (art. 994).

Les droites OQ et OQ_1, respectivement perpendiculaires aux rayons OK et OK_1, doivent être tracées, par rapport à ces rayons, du côté où s'étend la branche de la spirale d'Archimède, trace de la nappe inférieure de la surface. On pourrait transporter le point T à droite du point O et à la même distance de ce point; chaque perpendiculaire devrait alors être élevée de l'autre côté du rayon.

Le point T et le rayon OA ne sont pas déterminés, car l'une quelconque des hélices de la surface peu être prise pour directrice. Les longueurs OT et OA sont seulement reliées par la formule

$$\mathrm{OT}\tang\gamma = \pm\,\mathrm{OA}\tang\alpha,$$

ou bien

$$\frac{\mathrm{OT}}{g} = \pm\frac{\mathrm{OA}}{r}.$$

En donnant à OA la grandeur du rayon r, on a une construction par un seul cercle et un point fixe. Le cercle est le même que dans la construction de Poncelet; on voit par l'équation précédente que le point fixe est à une distance du point O égale à OP : c'est P_1 ou P_2.

En combinant la construction qui précède avec celle de Poncelet, nous avons obtenu le tracé suivant, qui est le plus expéditif, et celui qui donne le plus de précision aux résultats. On décrit les cercles qui ont PP_1 et FF_1 pour diamètres (*fig.* 402); on mène ensuite du point P_1 des divergentes : une de ces lignes rencontre le premier cercle au point I, et le second aux points K et k. On trace les droites PI, OK et Ok : les points M et m où les deux dernières lignes rencontrent la première appartiennent à la courbe.

(1) Ce dernier raisonnement suppose implicitement que l'axe n'est pas tangent à la courbe d'ombre; mais l'axe est une asymptote de l'indicatrice en chacun de ses points; s'il était tangent à la courbe, il serait un rayon de lumière, et l'on voit facilement que la projection horizontale de la ligne d'ombre se réduirait à un point.

997. On peut modifier la construction de l'art. **995** de manière à obtenir les points qui sont sur un cercle projection de deux hélices situées, l'une sur la nappe inférieure, l'autre sur la nappe supérieure.

Supposons que nous cherchions le point M situé sur le cercle MM_1 (*fig.* 401) : le rayon OM doit être perpendiculaire au rayon OQ de l'un des points où la divergente PM rencontre le cercle auxiliaire. Si tout ce système tourne autour du point O, jusqu'à ce que le point cherché M soit sur l'axe OY en G, le point Q viendra en F, la droite QM prendra la position FG que nous pouvons tracer, et P sera transporté au point n où cette ligne rencontre le cercle décrit du point O comme centre avec OP ou g pour rayon; enfin OP se confondra avec On et le point G viendra en m. La longueur de l'arc mG est donc égale à celle de l'arc inconnu GM, et il est par conséquent facile de trouver le point M. Le point m appartient d'ailleurs lui-même à la courbe, parce qu'elle est évidemment composée de deux parties symétriques par rapport à OY.

En opérant sur le second point de rencontre N_1 de la droite FG avec le cercle Pn, on trouve les points M_1 et m_1 qui appartiennent, eux aussi, à la courbe; car, si l'on amène q_1 en F, les points m_1, P et G prendront respectivement les positions G, N_1 et M_1.

En résumé, pour faire la construction, on se donne le cercle PN_1n et le point F, puis on décrit le cercle Mm sur lequel on veut déterminer des points appartenant à la courbe. Ce cercle rencontre la droite OY en G : on trace la droite FG et ensuite les lignes On et ON_1 qui font connaître les points m et M_1. Les points M et m_1 sont déterminés comme symétriques; du reste, la construction les donnerait directement si l'on remplaçait soit le point F par le point F_1, soit le point G par le point g.

Le point M correspond au point Q, et par suite la branche de la spirale d'Archimède sur laquelle est la trace de la génératrice OM s'étend du côté indiqué par la direction OQ (art. **991**). D'après cela, et sans avoir besoin de revenir à la première construction, on reconnaît facilement que le point M est sur la nappe supérieure. Des trois autres points du cercle Mm qui appartiennent à la courbe d'ombre, un autre m_1 est également sur la nappe supérieure; les deux derniers M_1 et m sont sur la nappe inférieure. Chacun d'eux considéré sur le plan est la projection d'un nombre infini de points de la courbe d'ombre; car, si l'on suppose la surface divisée en parties qui correspondent aux différentes spires de l'hélice directrice, leurs lignes d'ombre seront évidemment identiques et auront une même projection.

998. En se reportant aux valeurs de g et de r, on voit que, suivant que les rayons de lumière sont plus inclinés, aussi inclinés ou moins inclinés que les génératrices de la surface, le point fixe P se trouve en dehors du cercle auxiliaire dont le rayon est r, sur ce cercle ou dans son intérieur. Quand les rayons sont

horizontaux, le point fixe est à l'infini. De ces quatre dispositions résultent pour la courbe autant de formes différentes que nous allons examiner successivement.

Cas où les rayons de lumière font avec le plan horizontal un angle plus petit que celui des génératrices. — Lorsque les rayons de lumière sont plus inclinés que les génératrices, le point P est en dehors du cercle auxiliaire FF_1 (*fig.* 401); alors, si l'on suppose que la divergente PQ tourne de manière que les points Q et Q_1 se rapprochent, les points M et M_1 qui leur correspondent s'éloigneront de *s*, et, quand les points Q et Q_1 seront confondus en H, les points M et M_1 se trouveront réunis à l'infini, et la droite qui passe par les points P et H sera une asymptote (art. **92**). Il résulte de ces considérations que la courbe a deux branches infinies dont les asymptotes sont les tangentes PE et P*e* (*fig.* 402), menées du point P au cercle dont le rayon est *r*.

Nous avons indiqué sur la *fig.* 402 les parties de la courbe qui sont sur la nappe inférieure et celles qui se trouvent sur la nappe supérieure, en supposant que les génératrices s'élèvent en tournant autour de l'axe, dans le sens indiqué sur la *fig.* 401.

999. *Cas où les rayons de lumière sont moins inclinés que les génératrices.* — Lorsque les rayons sont moins inclinés que les génératrices de la surface, le point P est dans l'intérieur du cercle auxiliaire FF_1 (*fig.* 398). Aucune divergente ne pouvant toucher ce cercle, la courbe n'a pas de branche infinie.

Pour avoir la grandeur OK du plus grand rayon vecteur OH, il suffit de mener du point F une tangente FK au cercle OP. On reconnaît, en effet, par la construction de l'art. **997**, que la courbe n'a pas de points sur les cercles dont le rayon est plus grand que OK.

Les points où le cercle limite OK touche la courbe sont situés sur les rayons $O\lambda$ et $O\lambda_1$ des points de tangence. Ils appartiennent aussi à la droite PS parallèle à OX. Pour le prouver, considérons cette ligne PS comme une divergente, traçons le rayon $O\varphi$ et élevons la perpendiculaire OH_1; les triangles rectangles FOK et φOH_1 sont égaux, car il y a une égalité d'une part entre les côtés OF et $O\varphi$, de l'autre entre les perpendiculaires $O\lambda$ et OP; le rayon vecteur OH_1 est donc égal à OK, et le point H_1 de la courbe est sur le cercle limite.

Nous n'avons pas tracé le cercle diamétral sur la *fig.* 398, parce qu'il y eût produit un peu de confusion.

1000. *Cas où les rayons de lumière ont la même inclinaison que les génératrices.* Lorsque les angles α et γ sont égaux ou supplémentaires, le point P est sur le cercle FF_1 (*fig.* 400); des deux points où une divergente PQ coupe ce cercle, le second seul est variable : le premier P fait trouver un point M_1 de l'axe OX.

Cette droite appartient donc à la projection complète de la ligne d'ombre, ce qu'il était facile de prévoir, car la surface a des génératrices parallèles aux rayons et qui se projettent sur OX.

Le point M donné par le second point d'intersection Q s'éloigne à l'infini, dans la direction de l'axe OX, lorsque la divergente est la droite Px tangente au cercle auxiliaire; la courbe proprement dite a donc une branche infinie. La considération du cercle diamétral (art. **996**) va nous permettre de déterminer l'ordonnée OY de son asymptote EE_1.

Le point s, où la divergente PQ rencontre le cercle décrit sur OP comme diamètre, est le milieu du segment MM_1; sa distance à l'axe OX est donc la moitié de la distance du point M à cet axe. Lorsque le point Q arrive en P, l'ordonnée du point s devient OP, et l'ordonnée OY du point situé à l'infini est double de OP.

1001. Il résulte de la construction même que *les droites qui joignent au point double* P *les deux points* M *et* m, *correspondant à un même azimut, sont à angle droit.*

Les triangles rectangles mOq et QOM sont semblables, car les angles en q et en M ont leurs côtés respectivement perpendiculaires; ils donnent

$$Om \times OM = r^2.$$

Le rectangle des deux rayons vecteurs qui correspondent à un même azimut est constant.

Les triangles PCM et POq sont semblables parce qu'ils ont leurs côtés respectivement perpendiculaires; le premier est donc isoscèle comme le second, et par suite les segments PC et CM sont égaux. On trouve de même que les longueurs PC et Cm sont égales. On peut donc construire la courbe par points en traçant des droites qui divergent de l'origine O, et en prenant sur chacune d'elles, à partir du point C, des longueurs Cm et CM égales à PC (¹).

1002. *Cas où les rayons de lumière sont horizontaux.* — Lorsque les rayons de lumière sont horizontaux, c'est-à-dire perpendiculaires à l'axe, le point fixe P doit être considéré comme s'étant éloigné à l'infini. Cette circonstance simplifie les constructions qui ont été expliquées aux articles **995** et **997**; ainsi, pour avoir le point situé sur la droite PP perpendiculaire à l'axe des abscisses

---

(¹) La ligne que nous avons étudiée dans les articles 1000 et 1001 est appelée quelquefois *strophoïde* : c'est une variété de la 41ᵉ espèce des courbes du troisième ordre dans la classification de Newton (45ᵉ d'après Stirling). Elle appartient à la famille des hyperboles défectives qui ont un diamètre.

En appliquant à cette courbe la construction par le cercle FF_1 et le point F_1 (art. 995, note), on reconnnaît que la droite QM est perpendiculaire à F_1N.

On trouve par les procédés du Calcul intégral que l'aire comprise entre un arc Om et sa corde est égale à celle du triangle NF_1L, formé par les tangentes au cercle auxiliaire aux points N et F_1, et par l'arc NF_1 de ce cercle.

La strophoïde possède plusieurs propriétés assez remarquables qui résultent des théorèmes généraux relatifs aux courbes du troisième ordre.

(*fig.* 397), il suffit de mener la droite OM perpendiculaire au rayon OQ. On aura les points M et m qui appartiennent au cercle OG, en prenant l'intersection de ce cercle avec la droite OC parallèle à F_1G (¹).

Lorsque la droite PP se rapproche du point F ou du point F_1, les deux points M et M_1 s'éloignent de l'axe OX. Ils se réunissent à l'infini, quand PP se confond avec l'une ou l'autre des tangentes EE_1 et ee_1 au cercle auxiliaire. Ces droites sont donc asymptotes de la courbe.

Les triangles rectangles OMQ, FCO sont égaux, et par suite le rayon vecteur OM et la tangente FC sont de même longueur. D'après cela, si l'on prend la droite OX pour axe, et le point O pour origine de coordonnées polaires, l'équation de la courbe sera

$$\rho = r \operatorname{tang} \omega.$$

En appelant A l'aire infiniment petite comprise entre cette ligne, l'asymptote voisine de la partie considérée et deux rayons vecteurs comprenant un angle infiniment petit $d\omega$, on a

$$A = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\omega}{\cos^2\omega} - \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tang}^2 \omega \, d\omega;$$

d'où

$$A = \frac{1}{2} r^2 \, d\omega.$$

L'élément superficiel A est donc égal au secteur qui, dans le cercle, correspond à l'angle $d\omega$, et par suite *l'aire comprise entre un arc de la courbe, l'asymptote voisine et deux rayons vecteurs est égale à celle du secteur du cercle* FF_1, *comprise entre les deux rayons* (²).

1003. A l'article précédent nous avons donné l'équation de la courbe dans un cas particulier; il est facile de l'obtenir dans le cas général. Si l'on abaisse des points M et Q (*fig.* 401) les droites ML et QE perpendiculaires sur l'axe OY, on aura

$$\frac{ML}{QE} = \frac{PL}{PE};$$

(¹) Quand les points P et P_1 s'éloignent à l'infini, le cercle POP_1 (*fig.* 402) se transforme en une droite BB_1 (*fig.* 397) inclinée à 45 degrés sur l'axe OF. Alors, pour appliquer la construction qui est à la fin de la note de l'article 995, il faut d'un point I de BB_1 mener deux droites KK_1 et PP respectivement parallèles à OX et à OY, et ensuite tracer les droites KO et K_1O : elles coupent la droite PP en des points M et M_1 qui appartiennent à la courbe.

(²) M. Nicolaïdès a donné ce théorème, mais d'une manière moins générale. Son énoncé est celui-ci : *L'aire comprise entre la courbe et les deux asymptotes est égale au cercle* (*les Mondes*, t. II, 1863).

En 1851, dans notre Mémoire sur les hélicoïdes, nous avons établi le théorème démontré dans le texte, mais avec un énoncé un peu différent. Nous disions que l'aire comprise entre l'arc OM et sa corde est égale à la surface du triangle mixtiligne CFK.

ou, en appelant ρ le rayon vecteur OM et ω_1 l'azimut F_1OM,

$$\frac{\rho \cos\omega_1}{r \sin\omega_1} = \frac{g + \rho \sin\omega_1}{g - r\cos\omega_1};$$

on déduit de là

$$\rho = \frac{rg \sin\omega_1}{g\cos\omega_1 - r}.$$

Enfin, si nous mesurons les azimuts à partir de l'axe OT, de manière que l'on ait

$$\omega = 180^\circ + \omega_1,$$

l'équation deviendra

$$\rho = \frac{rg \sin\omega}{g\cos\omega + r}.$$

En introduisant les coordonnées ordinaires, on trouve que la courbe est du quatrième degré. Quand les paramètres r et g sont égaux en grandeur absolue, elle se décompose en une droite et une ligne du troisième ordre (*fig.* 400).

Indicatrice. Points limites des parties réelles des courbes d'ombre pour des rayons parallèles.

1004. Nous avons vu que la droite FP (*fig.* 398) était tangente en P à la branche OPR_1 de la projection de la courbe d'ombre (art. **996**). Nous savons d'ailleurs que la droite SP parallèle à OX est la projection d'un rayon de lumière, et que la génératrice OP est une des deux asymptotes de l'indicatrice pour le point P (art. **824**). La seconde asymptote de l'indicatrice de ce point et la droite PO sont donc conjuguées harmoniques des lignes PS et PF. D'après cela, si on prend FD égale à la longueur OF ou r, la droite PD sera la seconde asymptote de l'indicatrice pour le point P considéré comme appartenant à la nappe supérieure [1].

Si l'inclinaison des rayons change, le point P se déplace sur la génératrice OY, mais la projection de la seconde asymptote de l'indicatrice passe toujours par le point D; la verticale de ce point est donc une génératrice de l'hyperboloïde osculateur le long de la génératrice OY (art. **825**). On peut d'ailleurs opérer de la

(1) Toutes les fois que l'on connaît, pour un point d'une surface, deux tangentes conjuguées et une des asymptotes de l'indicatrice, on peut construire l'autre asymptote. Quand la surface est gauche, une de ces droites est la génératrice qui sera généralement connue; par conséquent, lorsque, par quelque artifice, on aura déterminé la tangente à une courbe d'ombre pour une direction donnée de rayons, le problème de l'indicatrice se trouvera résolu.

même manière pour toute génératrice, en supposant la surface éclairée par des rayons qui soient perpendiculaires à cette droite en projection horizontale [1].

Quelle que soit la génératrice que l'on considère, si on lui élève à l'origine O *une perpendiculaire égale à* $2r$, *du côté où s'étend la branche de la spirale d'Archimède sur laquelle est sa trace, l'extrémité de cette droite appartiendra aux projections des secondes asymptotes de l'indicatrice de ses différents points.*

Il nous serait maintenant facile de construire la tangente à la projection horizontale de la courbe d'ombre en un point donné. Nous reviendrons plus loin (art. **1012**) sur cette question, à l'occasion des tangentes à la courbe d'ombre dans le cas général des rayons divergents.

1005. Pour discuter la courbe d'ombre dans l'espace et voir quelles sont celles de ses parties qui sont réelles dans les différentes hypothèses que l'on peut faire, il est nécessaire de pouvoir se rendre compte de la position du plan tangent par rapport à la surface, en un point déterminé. On y parvient en supposant que l'hélicoïde se modifie jusqu'à devenir un cône.

Soient O la trace de l'axe (*fig.* 416), KV la branche de la spirale d'Archimède trace de la nappe inférieure de la surface, et M un point de cette nappe. Nous élevons au point O une droite OQ perpendiculaire à OM, et nous portons sur elle une longueur OD double du paramètre r : les droites MO et MD sont, en projection, les deux asymptotes de l'indicatrice du point M. Si l'on diminue le pas de l'hélicoïde jusqu'à le rendre nul, le paramètre r deviendra nul aussi, le point D parcourra le segment DO et l'angle DMO des asymptotes de l'indicatrice se réduira à zéro. Mais alors l'hélicoïde sera un cône dont nous n'avons à considérer que la nappe inférieure; son plan tangent au point M sera entièrement au-dessus de lui : donc la partie de la surface qui était au-dessus du plan tangent est celle qui était projetée dans l'angle DMO, et dans celui qui lui est opposé au sommet.

1006. Les points limites des parties réelles de la courbe d'ombre sont ceux où la tangente à sa projection est parallèle à la droite OX (*fig.* 398). On trouve d'abord le point O; mais, comme le plan tangent en un point de l'axe est perpendiculaire au plan de projection, on est ici dans le cas d'exception dont il a été question à l'art. **892**. Lorsqu'à l'un des points de la courbe projetés en O le rayon de lumière est une asymptote de l'indicatrice, il se confond avec la génératrice de la surface et cette droite fait partie de la ligne d'ombre (*fig.* 400). Il résulte de là que le point O considéré sur la courbe d'ombre proprement dite n'est jamais un point limite.

Soient R_1 (*fig.* 398) un point limite, OR_1 son rayon vecteur et UR_1 la projec-

---

(1) L'indicatrice étant connue, les théorèmes des articles 886 et 887 donnent immédiatement pour les asymptotes de la courbe d'ombre les positions que nous avons déterminées par d'autres considérations aux articles 998, 1000 et 1002.

tion du rayon de lumière qui y passe : ce rayon étant une asymptote de l'indicatrice, la droite OU perpendiculaire à OR_1 doit avoir une longueur égale à $2r$, et par suite on a

$$\operatorname{tang} OR_1 U = \frac{2r}{OR_1}.$$

L'azimut ω du point R_1 est l'angle DOR_1 supplémentaire à OR_1U; l'équation devient donc, en appelant ρ le rayon OR_1,

$$-\operatorname{tang}\omega = \frac{2r}{\rho}.$$

Éliminant ρ entre cette équation et celle de la courbe qui a été trouvée à l'art. **1003**, on a

$$g\cos^2\omega + 2r\cos\omega + g = 0,$$

d'où

$$\cos\omega = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - g^2}}{g}.$$

Cette expression montre que la courbe n'a de points limites que quand le point P est dans l'intérieur du cercle FF_1 (*fig.* 398). Lorsque le radical est réel, il faut lui donner le signe + pour que la valeur absolue de $\cos\omega$ soit plus petite que l'unité. Nous avons donc simplement

$$\cos\omega = \frac{-r + \sqrt{r^2 - g^2}}{g}.$$

ω a deux valeurs supplémentaires à 360° qui déterminent deux points limites, l'un par un rayon vecteur positif et l'autre par un rayon vecteur négatif. La construction à laquelle l'équation précédente conduit pour l'azimut ω est facile, mais on peut obtenir plus aisément encore la position des points limites.

Si l'on appelle y la distance de ces points à l'axe OX, on a

$$y = OU\sin XOU = OU\cos R_1OF_1,$$

$$y = -2r\cos\omega;$$

d'où

$$y = \frac{2r}{g}(r - \sqrt{r^2 - g^2}).$$

D'un autre côté, les équations des droites F_1P et FK rapportées aux axes OD et OK sont

$$ry = g(r + x),$$

$$y\sqrt{r^2 - g^2} = g(r - x).$$

Éliminant x, on trouve que l'ordonnée du point de rencontre E est la même que celle des points limites. D'après cela, pour déterminer ces points, on mènera une droite par les points E et E_1 ; du point O comme centre et avec un rayon égal à $2r$, on décrira un arc de cercle qui coupera cette ligne au point U; on tracera ensuite OU et sa perpendiculaire OR_1. La seconde rencontre du cercle avec la droite EE_1 ferait trouver un deuxième point limite R (¹).

Lorsque les rayons de lumière ont la même inclinaison que les génératrices de la surface, g est égal à $\pm r$, la valeur de y devient $\pm 2r$, et celle de ω zéro ou 180°. La courbe a alors un point limite à l'infini.

Les détails que nous avons donnés dans ce paragraphe permettront dans chaque cas, et suivant que le corps sera placé d'un côté ou de l'autre de la surface, de déterminer les arcs réels et les arcs virtuels des courbes d'ombre.

Courbe d'ombre propre dans le cas de rayons divergents.

1007. Lorsque l'on doit déterminer la courbe d'ombre propre d'une surface de vis-à filets triangulaires éclairée par des rayons divergents, on simplifie les tracés en prenant pour plan horizontal d'opérations celui qui contient le point lumineux.

Soient (*fig.* 410)

O le pied de l'axe;
OKV la spirale d'Archimède trace de la surface sur le plan horizontal qui contient le point lumineux;
S ce point;
OQ le cercle qui a pour rayon le paramètre r.

Si l'on veut déterminer le point de la ligne d'ombre situé sur la génératrice qui a sa trace en K, on élèvera la perpendiculaire OQ à la projection OK, et du point Q on abaissera la perpendiculaire QI à la droite SK, trace du plan qui contient le point lumineux et la génératrice. L'intersection M des droites OK et QI sera le point cherché (art. **991**).

1008. Si l'angle SKO était droit, les droites QI et OK seraient parallèles, et le point M se trouverait à l'infini. Les traces des génératrices qui ne rencontrent la courbe qu'à l'infini sont donc les intersections de la spirale d'Archimède OV

(¹) Cette construction peut être modifiée de diverses manières. La droite φF_1 passe au milieu e du segment OL; le point e est aussi le pied de la perpendiculaire abaissée du point q sur OP. On obtient ainsi la droite RR_1 à l'aide du point L; le point R_1 se trouve à la rencontre de cette ligne avec la divergente Pq. (MANNHEIM.)

avec le cercle décrit sur SO comme diamètre (*fig.* 412). Ce cercle coupe la spirale en trois points R, R_1 et R_2 et par suite la courbe a trois branches infinies. L'origine O est un quatrième point de rencontre : la génératrice qui y a sa trace se projette sur la droite ON tangente à la spirale. En général, la droite ON n'est pas perpendiculaire à la trace SO du plan qui contient le point S et la génératrice ON, de sorte que la construction ordinaire fait trouver sur cette droite un point N de la courbe d'ombre à distance finie. Quand la spirale est tangente au cercle à l'origine, la génératrice ON est perpendiculaire à OS et ne rencontre la courbe qu'à l'infini.

On peut considérer la spirale comme divisée en spires, c'est-à-dire en arcs tels que les azimuts de leurs extrémités diffèrent de 360°. Les génératrices qui passent à ces extrémités interceptent sur l'axe des segments égaux au pas commun des hélices. Toute spire dont le plus petit rayon vecteur est plus grand que SO ne coupe pas le cercle décrit sur cette droite comme diamètre; toute spire, au contraire, dont le plus grand rayon est plus petit que SO le rencontre deux fois. Enfin, quelque petit que soit ce cercle, la spirale le coupe ailleurs qu'à l'origine, ou bien elle le touche en ce point. Il résulte de là que la courbe d'ombre a, au moins, une branche infinie, qu'elle peut en avoir un grand nombre et qu'elle en possède deux, au plus, sur chaque partie de la surface correspondant à un segment de l'axe égal au pas des hélices.

1009. La construction de l'art. **1007** fait invariablement trouver le point O pour toutes les génératrices qui sont projetées sur SO; il est évident, en effet, que le plan qui contient une de ces droites et le point lumineux S est vertical et a son point de contact sur l'axe. Il résulte de là que pour la partie de la surface qui correspond à un segment de l'axe égal au pas des hélices, la projection horizontale de la courbe d'ombre passe deux fois au point O tangentiellement à la droite OX (art. **996** note).

1010. Nous allons maintenant déterminer directement les points de la projection horizontale de la courbe d'ombre qui sont à une distance donnée du pied de l'axe, ou, en d'autres termes, qui appartiennent à un cercle projection de deux hélices données.

Le point M (*fig.* 410) ayant été déterminé par la construction de l'art. **1007**, on voit facilement que les angles IKM et MQO sont égaux; or, si le rayon OM doit être égal à une longueur donnée R, la tangente de l'angle MQO est $\frac{R}{r}$; l'angle IKM est donc connu, et si l'on décrit sur SO un segment capable de cet angle, le point K sera son intersection avec la spirale.

Nous prenons les longueurs OG et Gg respectivement égales à R et à r, nous traçons la droite gO, et ensuite la perpendiculaire DC à OS au milieu D de OS. Enfin, du point C comme centre, nous décrivons un cercle qui passe par les

points O et S : il coupe la spirale au point K, trace de la génératrice sur laquelle est le point M ([1]).

Le même cercle rencontre la spirale aux points K_1 et K_2 qui font trouver les points M_1 et M_2.

1011. L'axe étant supposé divisé en segments égaux au pas des hélices, les arcs de la courbe d'ombre sur les parties correspondantes de la surface ne sont pas identiques. La projection horizontale d'un arc qui n'a pas de branche infinie présente, avec la ligne de la *fig.* 398, une ressemblance d'autant plus grande que la partie de la surface sur laquelle il se trouve est plus éloignée du point lumineux. Quand cette partie est à une très grande distance du point lumineux S, les projections des arcs sont très resserrées près l'origine O, car les plans passant par le point S et par les différentes génératrices sont presque verticaux, et ont leur point de contact rapproché de l'axe. On peut d'ailleurs vérifier que la construction de l'art. **1007** donne des points très voisins du pied de l'axe, quand on opère sur les génératrices qui ont leurs traces sur les grandes spires de la spirale d'Archimède.

Dans l'espace, la courbe rencontre l'axe à des intervalles égaux à la moitié du pas des hélices (art. **1009**); au delà des parties où sont ses branches infinies, elle se resserre de plus en plus sur l'axe qui doit, par conséquent, être considéré comme étant une de ses asymptotes.

Tangentes et asymptotes des courbes d'ombre. Points limites de ces lignes dans le cas de rayons divergents.

1012. Le procédé facile que nous avons pour la détermination des asymptotes de l'indicatrice, en un point quelconque de la surface de la vis à filets triangulaires (art. **1004**), permet de construire rapidement les tangentes à la courbe d'ombre. Nous examinerons d'abord ce problème sur la projection horizontale.

Soient (*fig.* 416)

S le point lumineux;
OK la projection d'une génératrice;
K la trace de cette droite;
O la trace de l'axe;
OQ le cercle auxiliaire dont le rayon est r : en appliquant à la droite OK la construction de l'art. **1007**, on trouve que la courbe d'ombre passe au point M.

([1]) La construction de l'article 1010 nous a été communiquée par Bour; on peut en déduire les tracés qui ont été exposés à l'article 1008.

Nous prolongeons le rayon OQ d'une longueur égale QD, nous traçons DM : les droites MO et MD sont les deux asymptotes de l'indicatrice du point M, MS est le rayon de lumière; la tangente à la courbe d'ombre étant l'harmonique conjuguée du rayon lumineux par rapport aux asymptotes de l'indicatrice, on en obtient un point R en menant la parallèle EG à MD et en la prolongeant d'une longueur GR égale au segment EG.

Cette construction ne peut pas servir pour les asymptotes. Nous allons la modifier de manière à la rendre d'une application plus générale, tout en lui conservant sa simplicité.

Nous traçons la droite SD qui rencontre la tangente en *d* et nous construisons le triangle *dam*, homothétique au triangle DOM et ayant avec lui le point S pour centre de similitude. La droite MO partage en deux parties égales le côté *md* parce qu'il est parallèle à ER, et ensuite le côté *ad* parce qu'elle est elle-même parallèle à la base *am*. Le point *l* est donc le milieu du côté *ad*, et par conséquent il se trouve sur la droite qui va du point S, centre de similitude, au milieu Q de OD.

D'après cela, pour avoir le point *d* de la tangente M*d*, il suffit de tracer la droite SQ, de mener, par le point *l* où elle rencontre la génératrice OM, la parallèle *al* à OQ, et de prolonger cette ligne d'une longueur égale à elle-même du côté du point *l*. Les tangentes à la courbe aux points situés sur la droite indéfinie OK passent toutes par le point *d*.

Quand les rayons sont parallèles, le point S est à l'infini et la droite Q*l* doit être parallèle à la droite OX (*fig.* 397, 398, 400 et 402) [1].

1013. La *fig.* 412 montre une application de la construction que nous venons d'expliquer à la détermination de l'asymptote *ed* d'une branche infinie. La trace de cette droite est au point *e*, sur la trace R*e* du plan qui touche la surface au point situé à l'infini sur la génératrice OR.

Si la spirale d'Archimède rencontre tangentiellement le cercle OS en un point R (*fig.* 418), la droite RQ est la normale commune (art. **992**), et par conséquent le centre du cercle est au point C où cette droite coupe OS. Le point Q doit d'ailleurs être sur le cercle, car l'angle ROQ est droit. Il résulte de là que les droites RO et SQ qui passent aux extrémités des diamètres SO et RQ sont parallèles; le point *l* (*fig.* 412) est par conséquent à l'infini, le segment *al* est infini et la branche infinie de la courbe d'ombre est parabolique.

1014. Quand on connaît la projection horizontale d'une tangente, on construit

---

[1] Cette construction nous a été communiquée par Bour qui y était parvenu par l'analyse; nous l'avons rattachée au théorème des tangentes conjuguées, eu égard à la nature spéciale de cet Ouvrage.

Poncelet a trouvé par la méthode de Roberval une construction également très simple pour la tangente à la projection horizontale de la courbe d'ombre de la surface de la vis à filets triangulaires, mais seulement dans le cas où les rayons sont parallèles. (*Applications d'Analyse et de Géométrie.*)

facilement sa projection verticale par la considération du plan tangent au point correspondant de la surface. Toutefois ce procédé ne peut pas être employé lorsque le point considéré est sur l'axe, parce que le plan tangent est vertical. Il faut alors recourir au théorème des tangentes conjuguées : les deux asymptotes de l'indicatrice sont l'axe et la génératrice.

1015. Nous terminerons ce qui concerne les courbes d'ombre en disant quelques mots sur la détermination de leurs points limites.

Le point M de la courbe d'ombre (*fig.* 415) est un point limite quand le rayon de lumière SM est la seconde asymptote de l'indicatrice, et par conséquent quand ce rayon passe par le point D, situé sur la perpendiculaire OQ à OM, à une distance de O double du paramètre r.

Si nous décrivons un cercle du point O comme centre et avec un rayon égal à OD, et si nous considérons S comme un point fixe de divergence, le point M sera sur la courbe que l'on obtiendra à l'aide du cercle et du point S par la construction de l'art. **995**. Les points limites sont les intersections de cette courbe auxiliaire et de la courbe d'ombre, pourvu toutefois qu'elles résultent d'azimuts et de rayons vecteurs égaux et non d'azimuts inverses avec des rayons vecteurs contraires.

On reconnaît, comme dans le cas des rayons parallèles (art. **1006**), que les points de la courbe projetés sur le point O ne sont jamais des points limites.

Représentation d'une surface de vis à filets triangulaires et de ses ombres.

1016. Nous avons représenté sur la *fig.* 409 une partie de la nappe inférieure d'une surface de vis à filets triangulaires éclairée par des rayons parallèles. Le cercle BG, projection de l'hélice directrice, a été divisé en quatorze parties égales, et les génératrices qui passent par les points de division ont été tracées sur les deux plans de projection. Leur enveloppe sur le plan vertical est le contour apparent de la surface, ou la projection verticale de sa ligne de contact avec un cylindre circonscrit perpendiculaire à ce plan. La projection horizontale de ce contour apparent est une courbe D_1OD, ..., H_1OH du genre de celle que nous avons étudiée à l'art. **1002**. Les génératrices du cylindre circonscrit étant perpendiculaires au plan vertical, les droites qui divergent du point fixe situé à l'infini sont parallèles à la ligne de terre. Nous traçons le cercle auxiliaire KA qui a pour rayon le paramètre r et nous obtenons ensuite la courbe sans difficulté. Les points situés sur l'hélice directrice doivent être déterminés directement. La discussion des différentes parties du contour apparent se fait comme pour la courbe d'ombre dont nous nous occuperons à l'article suivant; nous

nous bornerons ici à dire que les arcs DO et OH sont seuls utiles, parce que nous ne considérons que la partie de la surface comprise entre l'axe et l'hélice directrice. En relevant sur le plan vertical les points où ces arcs rencontrent les projections horizontales des différentes génératrices, nous avons les positions précises des points où les droites tracées sur le plan vertical touchent leur enveloppe.

Une asymptote du contour apparent dans l'espace est déterminée par sa projection horizontale et par le plan tangent à la surface au point situé à l'infini sur la génératrice parallèle. L'asymptote de la branche ODH_1O est donc l'intersection du plan vertical B_1G_1 et du plan $(B_1B_2, B'L)$ tangent au point situé à l'infini sur la génératrice $(BO, B'L)$, c'est-à-dire la droite $(B_1G_1, B'L)$ pour la première spire. Les projections des génératrices parallèles au plan vertical sont ainsi les asymptotes du contour apparent sur ce plan, ce qu'il était facile de prévoir, car elles doivent être tangentes à cette courbe, comme les projections des autres génératrices.

1017. Nous supposons la surface éclairée par des rayons parallèles à la droite R' située dans le plan vertical; nous déterminons alors le point fixe P et nous construisons la projection horizontale de la ligne d'ombre (art. **995**) : elle est du genre de la courbe qui est représentée sur la *fig.* 402. On relève ensuite ses différents points sur le plan vertical. Il serait facile de tracer ses asymptotes, mais elles présentent peu d'intérêt pour les arcs qui se projettent dans l'intérieur du cercle BG.

On peut facilement discuter les différentes parties de la courbe d'ombre, à l'aide des principes que nous avons posés dans les articles précédents. Le point M est sur la divergente PQ et correspond au rayon OQ; la branche de la spirale d'Archimède sur laquelle se trouve la trace de la génératrice OM s'étend donc du côté où se trouve le point Q. On reconnaît ainsi que le point M appartient à la nappe inférieure (art. **991**). Les deux asymptotes de l'indicatrice sont MO et MQ_1 ; lorsque l'hélicoïde se réduit à un cône, la partie OMQ_1 disparaît : c'est donc celle qui contient les courbes dont les tangentes au point M sont au-dessous de la surface (art. **1005**). Le rayon de lumière SM situé hors de cet espace angulaire est au-dessus de l'hélicoïde, et par suite le point M est utile et vu sur le plan horizontal. Il en est de même de tout point des branches $O\delta$ et $O\alpha$. Sur la projection verticale, les points de la première $\delta'F'$ sont vus et ceux de la seconde $\alpha'L'$ cachés.

La surface étant limitée à l'axe, les génératrices $B'L$ et $B''L'$, qui sont dans un plan passant par l'axe et parallèle aux rayons de lumière, forment la ligne d'ombre portée sur la face inférieure de la nappe, au moins dans la partie vue.

Représentation d'une vis à filets triangulaires et de son écrou.

1018. Une *vis à filets triangulaires* se compose d'un noyau plein qui a la forme d'un cylindre de révolution, et d'un solide hélicoïde dont la génératrice méridienne est un triangle $B'C'_1B'_1$ (*fig.* 407), placé de manière que sa base $B'B'_1$ soit un segment d'une génératrice du cylindre. En général, le triangle est isoscèle et le pas des hélices que décrivent ses différents points est égal à la base $B'B'_1$ [1]. Il résulte de là d'abord que les points B' et B'_1 se meuvent sur une même hélice, et ensuite que les surfaces de vis à filets triangulaires auxquelles appartiennent les zones engendrées par les droites $B'C'_1$ et $C'_1B'_1$ ont un même paramètre r. Il peut arriver que ces zones appartiennent aux deux nappes d'une même surface.

Une vis a le plus souvent à l'une de ses extrémités une *tête* qui est un solide prismatique dont les bases sont perpendiculaires à son axe. Elle glisse en tournant dans un *écrou,* corps limité intérieurement aux surfaces hélicoïdes qui la terminent elle-même extérieurement.

Pour représenter une vis à filets triangulaires, on trace d'abord les projections horizontales et les projections verticales des deux hélices suivant lesquelles se coupent les deux faces du filet. Sur le plan vertical, nous avons limité ces hélices aux droites XY et $S''U''$, qui représentent le plan de la face supérieure de l'écrou et celui de la face inférieure de la tête.

Le contour apparent sur le plan vertical est formé de lignes courbes, mais elles sont rapprochées de leurs asymptotes (art. **1016**), et vu leur peu de longueur on peut les tracer comme des droites. On les obtient d'une manière suffisamment exacte en menant des tangentes communes aux arcs consécutifs des sinusoïdes qui forment la projection verticale des hélices d'intersection.

Ces deux courbes rencontrent le plan $S''U''$ aux points (L, L') et (M, M'). Les deux faces du filet rencontrent le même plan suivant deux arcs de spirale d'Archimède qui vont du point L au point M.

Nous avons représenté l'écrou par une projection horizontale et par une coupe verticale : le plan sécant COE est méridien et parallèle au plan vertical (*fig.* 408). La ligne de contour apparent qui passe près des points B' et C'_1 (*fig.* 407) est au delà du plan CD, elle appartient donc à la partie de la surface qui est conservée sur la *fig.* 408; mais cette courbe étant réelle sur la vis est nécessairement virtuelle sur l'écrou : nous ne l'avons pas tracée. Les demi-spires

---

[1] On fait des vis à double et même à triple filet; le profil générateur est alors composé de deux ou de trois triangles égaux, et le pas est égal à deux ou à trois fois la longueur de leur base; quelquefois le filet est engendré par la révolution hélicoïde d'un trapèze (*fig.* 406).

de l'hélice BD sont vues entièrement, celles de l'hélice CE sont cachées sur de très petites longueurs près des sommets C', C'_1, ... des angles rentrants, car les tangentes à leurs projections en ces points sont verticales.

La sinusoïde projection verticale de l'hélice CE rencontre la droite X_1Y_1 en un point J', que nous ramenons en J sur la projection horizontale. Les deux arcs de spirale d'Archimède qui limitent les faces du filet à leur partie supérieure partent du point J et aboutissent au point A diamétralement opposé sur le cercle BD.

1019. *Ombres propres de la vis.* — Nous supposons maintenant la vis éclairée par des rayons parallèles à une droite (R, R') (*fig.* 407), et nous allons déterminer ses ombres.

Nous construisons d'abord la longueur Oη du paramètre *r*, et nous décrivons un cercle du point O comme centre avec ce paramètre pour rayon. Les tracés expliqués à l'art. **995** nous donnent ensuite le point fixe P : il doit être placé, par rapport à la projection du rayon de lumière qui passe par le point O, d'un côté différent de celui où il se trouve sur la *fig.* 401, car les hélicoïdes sont de même sens (*sinistrorsum*) et les rayons de lumière sont inclinés en sens contraire. Nous déterminons alors la courbe λOν ..., φPOPτ, projection horizontale de la ligne d'ombre, en ayant soin de construire directement les points situés sur les deux hélices qui forment l'arête saillante et l'arête rentrante des filets (art. **997**). Chaque partie comprise entre les cercles CE et BD est la projection horizontale d'un arc de la ligne d'ombre de l'une des faces du filet. Des considérations analogues à celles que nous avons présentées à l'art. **1017** permettent de reconnaître à laquelle des deux faces appartient chacun des arcs, et font voir qu'ils sont tous réels.

Pour obtenir la projection verticale d'un arc réel, d'après sa projection horizontale, on relève les points extrêmes sur les hélices et on détermine un point intermédiaire en traçant d'abord la projection horizontale, puis la projection verticale de la génératrice à laquelle il appartient.

Ombre portée par la vis sur le plan horizontal. — On construit ensuite les ombres portées sur le plan horizontal par les différentes lignes de la vis. L'ombre de l'hélice saillante est la courbe $K\tau''kn''k_1$, ...; nous savons que c'est une cycloïde allongée engendrée par le point K, quand le cercle dont le rayon est OP roule sur la tangente PP_1 parallèle à R (art. **955**).

Les ombres des lignes $\nu'_1\mu'_1$, $\lambda'_1\chi'_1$, $\psi'_1\varphi'_1$, $\tau'\xi'$ sont les arcs $\nu''_1\mu''_1$, $\lambda''_1\chi''_1$, $\psi''_1\varphi''_1$, $\tau''\xi''$, ...; ils appartiennent à deux courbes distinctes qui correspondent l'une à la face supérieure du filet, l'autre à la face inférieure, et qui sont les enveloppes des ombres portées par les lignes tracées sur les deux hélicoïdes (art. **371**). Ces arcs se raccordent par suite tangentiellement avec l'ombre de l'hélice saillante à leurs points de rencontre λ''_1, ν''_1, τ'' et φ''_1.

Les ombres des arêtes (ST, S″T″), (TU, T″U″) de la tête de la vis sont les lignes S_1T_1 et T_1U_1.

Ces différentes lignes font connaître la limite de l'ombre portée sur le plan horizontal, et donnent tous les éléments nécessaires pour la détermination des ombres sur la projection verticale.

Ombre portée par la vis sur elle-même. — Nous allons déterminer les ombres que la vis porte sur elle-même par la méthode des projections obliques (art. **370-373**), et d'après les lignes d'ombre que nous avons obtenues sur le plan horizontal. Les courbes $\nu''_1\mu''_1$ et $\lambda''_1\chi''_1$ sont les traces des cylindres circonscrits parallèles aux rayons de lumière, et dont les lignes de contact sont $\nu'_1\mu'_1$ et $\lambda'_1\chi'_1$; ces traces se coupent en un point ω'', et par suite les cylindres ont une génératrice commune, dont la projection verticale $\omega'_1\omega''_1$ passe par le point ω''_1 projection de ω''. Les arcs $\lambda'_1\omega'_1$ et $\omega'\nu'_1$ projettent leur ombre sur le plan horizontal, l'arc $\mu'_1\omega'$ n'est pas éclairé et l'ombre de l'arc $\omega'_1\chi'_1$ est reçue par la face supérieure du filet inférieur; elle s'étend de χ'_1 à ω'. Pour en avoir un point intermédiaire, nous traçons une génératrice rectiligne $(mn, m'n')$ de l'hélicoïde, et nous déterminons son ombre $n''m''$. Cette ligne coupe la projection $\lambda''_1\chi''_1$ en un point d'', et par suite le rayon de lumière qui aboutit à ce point rencontre successivement la courbe d'ombre propre $\lambda'_1\chi'_1$ et la génératrice $m'n'$; le point d', ramené de d'', est donc un point de la trace, sur la face supérieure du filet, du cylindre circonscrit le long de la ligne $\lambda'_1\chi'_1$.

Les autres déterminations se font d'après les mêmes principes et ne présentent pas plus de difficultés. Le point g'' fait connaître le point g' où le plan d'ombre de l'arête (ST, S″T″) rencontre l'hélice saillante. En traçant des génératrices rectilignes sur les deux faces du filet, de part et d'autre de g', et considérant les intersections de leurs ombres avec les droites S_1T_1 et T_1U_1, on détermine par points l'ombre qui est projetée sur la vis par les arêtes (ST, S″T″) et (TU, T″U″).

Les lignes T_1U_1 et $\lambda''_2\chi''_2$ se rencontrent en un point t'' que nous ramenons d'abord en t''_1, puis en t', en t'_1 et en t'_2. L'ombre du segment $T''t'_2$ est $f't'$. L'ombre de l'arête T″U″, au delà du point t'_2, est reçue sur le filet suivant à partir du point t'_1.

On détermine par les mêmes principes les ombres portées sur le plan vertical.

Nous n'avons tracé les lignes d'ombre cachées que lorsqu'elles sont utiles pour la construction.

1020. *Ombres de l'écrou.* — Les lignes d'ombre propre étant réelles sur la vis sont virtuelles sur l'écrou, et par suite les figures de la *Pl. XXVII* n'ont que des ombres portées. Pour obtenir leurs contours, nous projetons, par des droites parallèles au rayon (R, R′), les différentes arêtes sur un plan horizontal dont nous avons placé la ligne de terre X″Y″ à la hauteur du point D'_1. L'ombre portée sur le plan horizontal par un point est indiquée par la lettre qui désigne le point, avec un double accent : ainsi H″ est l'ombre du point (H, H′).

Les courbes $H''J''$ et $B''_2D''_2$, projections obliques de la spirale d'Archimède $H'J'$ et de la demi-spire $B'_2D'_2$, se coupent en un point β'' : le point correspondant β' de l'hélice est celui où cette courbe reçoit l'ombre de la spirale. On détermine d'une manière analogue les points γ', δ' et ε' où l'ombre de la ligne brisée $H'F'$ coupe les demi-spires $C'_2E'_1$, $B'_1D'_1$ et C'_1E'. On obtient des points intermédiaires de la courbe d'ombre portée en considérant des génératrices rectilignes. La génératrice $(mn, m'n')$ a pour projection oblique la droite $m''n''$ qui rencontre en σ'' et en π'' les projections $C''_2B''_2$ et $H''J''$ de l'arête $(CB, C'_2B'_2)$ et de la spirale $(HJ, H'J')$. Ces points font connaître les intersections σ' et π' de la génératrice avec la ligne d'ombre.

Nous avons reproduit de la *fig.* 407 la ligne d'ombre propre $(\psi\varphi, \psi'\varphi')$; le point (α, α') où elle rencontre la spirale est l'origine de la courbe d'ombre portée par la spirale d'Archimède sur le filet, car le rayon de lumière qui passe par ce point y est tangent à la surface : c'est celle des génératrices du cylindre d'ombre de la spirale, dont les deux points situés sur la face du filet se sont réunis en un seul.

A partir du point où commence l'ombre de la ligne brisée $H'F'$, les mêmes contours se reproduisent sur les filets. Le point δ'_1 se trouve par suite sur la verticale de δ'.

Hélicoïde de la vis à filets triangulaires employé comme surface auxiliaire.

1021. L'hélicoïde que nous venons d'étudier peut être employée comme surface auxiliaire dans divers problèmes relatifs aux surfaces gauches; mais le seul cas où cette méthode présente des avantages réels sur les procédés ordinaires est celui où la surface considérée a une directrice rectiligne et où ses génératrices rencontrent cette droite sous des angles égaux ; car on obtient alors sans difficulté des hélicoïdes de raccordement.

Supposons qu'une droite se meuve en restant normale à un cône de révolution aux différents points d'une section plane, et proposons-nous de construire le plan tangent en un point à la surface qu'elle engendre. Nous prenons des plans de projection tels que l'axe du cône soit une verticale (S, AS') (*fig.* 403), et que le plan sécant (PG, GL) soit perpendiculaire au plan vertical.

La génératrice $(SC, S'C')$ coupe le plan au point (M, M'). Si l'on suppose que cette droite tourne sur le cône, jusqu'à devenir parallèle au plan vertical, le point M' se placera en m', et la normale en ce point sera la droite $m'\omega$ perpendiculaire à $m'S'$. La normale au cône au point (M, M') est donc la droite $(SM, \omega M')$.

Nous allons chercher le plan tangent à la surface gauche en un point (N, N′) de cette génératrice.

La trace horizontale du plan tangent à la surface au point (M, M′) passe aux points V et K, traces de la génératrice et de la tangente à la directrice. L'intersection de ce plan et du plan vertical MT, perpendiculaire à SM, est (MT, M′T′).

La surface donnée se raccorde le long de (SN, ωN′) avec l'hélicoïde qui a pour axe la verticale (S, AS′), dont une hélice passe au point (M, M′) tangente à la droite (MT, M′T′), et dont le cône directeur est celui que décrit la droite $\omega m'$ (art. **614**). Nous pouvons donc opérer sur cette surface auxiliaire.

Le plan tangent au point (N, N′) est déterminé par la génératrice et par la tangente à l'hélice. Pour obtenir la trace horizontale de cette dernière droite, nous remarquons que, les hélices décrites par les points (N, N′) et (M, M′) ayant des pas égaux, les cotangentes de leurs inclinaisons sont proportionnelles aux rayons SN et SM. D'après cela, si le point (N, N′) était en (N, N″) à la hauteur de (M, M′), la tangente à l'hélice en N aurait sa trace au point U sur la droite ST, et sa projection verticale serait N″U′; dans la position où se trouve réellement le point (N, N′), la tangente à l'hélice a pour projection verticale la droite N′R′ parallèle à N″U′; d'où il suit que sa trace horizontale est au point R et que la droite RV est la trace horizontale du plan cherché.

Si l'on avait plusieurs plans tangents à construire en des points d'une même génératrice, on déterminerait le paramètre r de l'hélicoïde de raccordement, et l'on appliquerait les tracés de l'art. **991**.

L'axe, considéré comme directrice de la surface gauche, n'est utile que sur la longueur du segment AB. Les points A et B sont par conséquent des sommets (art. **632**). Quelle que soit la forme de la directrice tracée sur le cône de révolution, aux points où la tangente à cette courbe est horizontale, l'hélicoïde de raccordement se change en un cône; les sommets de ces cônes sont des sommets de la surface gauche.

1022. Quand deux surfaces gauches se raccordent le long d'une génératrice, cette droite a le même point central dans les deux surfaces. Il résulte de là, et des considérations présentées dans l'article précédent, que, *quand une surface gauche a une directrice rectiligne et que les génératrices rencontrent cette droite sous un angle constant, la ligne de striction de la surface est cette directrice.*

1023. *Extension à l'hélicoïde gauche général des constructions relatives à la surface de la vis à filets triangulaires.* — On peut étendre assez facilement à l'hélicoïde gauche général les diverses constructions expliquées pour la surface de la vis à filets triangulaires. Nous nous bornerons à ce qui concerne le plan tangent.

Soient (CD, C′D′) l'hélice de gorge (*fig.* 425 *bis*), (FB, E′B′) une génératrice parallèle au plan vertical, et NK une génératrice quelconque : nous nous proposons de construire le plan tangent au point M de cette droite.

Si la génératrice (FB, E′B′) entraîne dans son mouvement la droite (OA, E′B′) qui lui est parallèle, cette dernière ligne engendrera une surface de vis à filets triangulaires, dont la trace sera une spirale d'Archimède AV que nous savons construire. Lorsque la génératrice FB aura la position NK, la droite parallèle OA, devenue OR, aura sa trace en R, et l'on obtiendra la trace K de la génératrice en prenant, à partir du point N, une longueur égale à OR.

Par le point C′, nous menons deux droites C′S et C′L respectivement parallèles à B′E′ et à la tangente à l'hélice de gorge au point (F, E′) : la longueur LS est égale au paramètre des génératrices (art. **961**).

L'hélicoïde se raccorde le long de la génératrice NK avec une surface de vis à filets triangulaires qui a pour axe la verticale du point N, et dans laquelle le paramètre des génératrices est égal à LS. D'après cela, si nous prenons sur le rayon ON une longueur NQ égale à LS cot YB′E′ ou Lq, il suffira, pour obtenir la trace du plan tangent en M, de mener la droite QM, et de lui abaisser une perpendiculaire du point K.

En conservant les notations de l'art. **960**, et en ayant égard aux résultats obtenus dans cet article, on a

$$OQ = ON + NQ, \quad OQ = b + k_1 \cot\alpha, \quad OQ = h \cot\alpha.$$

La longueur OQ est donc indépendante du rayon b; on la construit comme pour une surface de vis à filets triangulaires, et on la porte du côté du point O où s'étend la branche de la courbe spirale sur laquelle la génératrice considérée a sa trace ([1]).

Observations générales sur les rayons de courbure et les lignes asymptotiques de la surface de la vis à filets triangulaires.

1024. Nous pouvons déterminer les rayons de courbure des sections principales d'une surface de vis à filets triangulaires en un point donné, car le théorème de l'art. **826** nous fait connaître leur produit, et il est facile d'obtenir leur rapport en construisant l'angle des asymptotes de l'indicatrice.

([1]) Le lecteur qui voudra avoir plus de détails sur les constructions relatives à l'hélicoïde gauche général pourra consulter le Mémoire que nous avons publié dans le XXXIVe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

Nous complétons cette Note de l'Auteur en citant un Mémoire de M. Karl Pelz « sur la détermination des contours apparents des hélicoïdes gauches », publié à Vienne, en 1883, dans les *Comptes rendus* des séances de l'Académie impériale des Sciences. La construction de l'art. 1023 y est obtenue en considérant un paraboloïde de raccordement le long de chaque génératrice rectiligne, et appliquée à la détermination du contour apparent vertical de l'hélicoïde oblique général à axe vertical. En outre, M. Karl Pelz démontre, sans appliquer le théorème des tangentes conjuguées, une construction simple des tangentes à la projection horizontale de ce contour. (E. L.)

Nous avons vu à l'art. **1004** que la projection de la seconde asymptote de l'indicatrice d'un point M (*fig.* 416) est la droite MD, qui coupe la perpendiculaire OD à OM en un point D situé à une distance de l'axe égale à $2r$. Il résulte de là que la projection horizontale d'une ligne asymptotique, autre que les génératrices, a ses sous-tangentes égales à une quantité constante $2r$. La courbe qui jouit de cette propriété est appelée *spirale hyperbolique*.

CHAPITRE IV.

SURFACE DE LA VIS A FILETS CARRÉS.

Définitions. — Propriétés générales.

1025. On appelle *surface de la vis à filets carrés* [1] la surface engendrée par le mouvement hélicoïde d'une droite autour d'un axe qu'elle rencontre à angle droit. Cet hélicoïde est tout à la fois une variété de la surface de la vis à filets triangulaires et un conoïde droit (art. **669**).

Deux génératrices ne peuvent pas se rencontrer, car elles sont dans des plans horizontaux différents : la surface n'a donc pas d'hélices doubles dont les points soient à une distance finie de l'axe.

L'angle des génératrices avec le plan horizontal étant nul, le paramètre r, rayon du cylindre sur lequel est tracée l'arête de rebroussement de l'hélicoïde développable asymptote, est infini (art. **989**), et par conséquent cette surface disparaît à l'infini, ce qui doit être, puisque la surface de la vis à filets carrés est un conoïde (art. **641**).

1026. Une surface de vis à filets carrés étant déterminée par l'axe (O, O'Z) et par l'hélice directrice (AB, A'B'A'') (*fig.* 417), cherchons son intersection avec le cylindre vertical dont la trace horizontale est le cercle de diamètre AO.

Le point (m, m'), où une génératrice (OM, O''M') coupe ce cylindre, est à la même hauteur que le point (M, M') de l'hélice directrice, et l'angle ACm est double de l'azimut AOM de ce dernier point; mais l'ordonnée et l'azimut du point (M, M') sont dans un rapport constant, l'ordonnée du point (m, m') et son azimut mesuré, en prenant pour origine le point C centre du cercle AmO, sont donc aussi dans un rapport constant, qui est la moitié du précédent; il résulte

(1) *Voir* la Note de l'art. 958.

de là que le lieu des points (m, m') est une hélice dont le pas est la moitié du pas de l'hélice directrice (AB, A'B').

Nous voyons ainsi que, *quand une génératrice d'un cylindre de révolution se confond avec l'axe d'une surface de vis à filets carrés, l'intersection de ces deux surfaces est une hélice dont le pas est la moitié du pas de l'hélicoïde.*

Une spire de l'hélice *excentrique* AmO coupe en deux points chacune des hélices *génératrices* dont la distance à l'axe est plus petite que OA, et touche en A celle dont la projection est ANB.

Considérons le point (D, D') de l'hélicoïde et traçons deux droites perpendiculaires à OD, passant l'une par le point D, l'autre par le milieu L de OD : tout point de celle-ci, tel que E, est le centre d'un cercle qui passe par les points O et D; ce cercle touche en F celui qui est décrit du point O comme centre avec OF pour rayon. Il résulte de là que l'*on peut tracer sur une surface de vis à filets carrés, par un point quelconque* D, *une infinité d'hélices excentriques, et que ces courbes touchent les hélices génératrices de l'hélicoïde aux points de la section faite par un plan vertical* FH (¹).

Plans tangents. — Sections planes.

1027. Les constructions que nous avons trouvées pour la surface de la vis à filets triangulaires s'appuient presque toutes sur un cercle auxiliaire, qui a pour rayon le paramètre r, et sur une spirale d'Archimède, lieu des traces horizontales des génératrices. Elles sont, pour la plupart, inapplicables à la surface de la vis à filets carrés, parce que le paramètre r devient infini et que les génératrices sont parallèles au plan horizontal; mais, en se reportant à la théorie des conoïdes, on obtient facilement d'autres tracés généralement très simples.

1028. *Construction du plan tangent à l'hélicoïde en un point donné.* — Soient O la trace horizontale de l'axe (*fig.* 411), BN le cercle projection de l'hélice directrice, B la trace de cette courbe, et M un point d'une génératrice OC où l'on veut construire un plan tangent.

La tangente à l'hélice directrice au point N se projette sur la tangente NT au cercle, et a sa trace en un point T que l'on détermine en prenant la longueur NT égale à l'arc NB (art. **949**).

Le paraboloïde qui a pour directrices l'axe et la tangente NT à l'hélice, et pour plan directeur le plan horizontal, se raccorde avec la surface le long de la génératrice ON; sa trace sur le plan horizontal est la droite OT. La parallèle MG

(¹) Nous croyons que les deux théorèmes de l'art. 1026 sont dus à Th. Olivier (*Développements de Géométrie*).

à NT est la trace d'un plan vertical qui, étant parallèle aux deux directrices rectilignes du paraboloïde, coupe cette surface suivant une génératrice du second système. Le plan tangent est déterminé par cette droite dont la trace est G, et par la génératrice horizontale OC : sa trace est donc la droite GH parallèle à OC ([1]).

On voit qu'il est possible de faire la construction en opérant sur le plan horizontal seulement.

Si l'on devait construire plusieurs plans tangents, il serait utile de tracer la développante BTV du cercle BN. Cette courbe est, comme nous le savons, le lieu des pieds des tangentes à l'hélice.

La même construction, faite en ordre inverse, donne le point de contact M d'un plan qui contient une génératrice OC et dont on connaît la trace GH. On détermine la trace OT du paraboloïde de raccordement; cette ligne rencontre la droite GH en un point G que l'on projette sur OG.

1029. *Sections planes.* — Si la surface est divisée en parties correspondant aux différentes spires de l'hélice directrice (*fig.* 417), on pourra déterminer sur chacune d'elles deux génératrices (ON, $\omega N'$) et (ON_1, $\omega_1 N'_1$) parallèles à la trace horizontale PQ d'un plan sécant, quelle que soit sa direction. Toute section plane aura donc deux branches infinies sur chaque partie de la surface. Les asymptotes sont les intersections du plan par les plans horizontaux contenant les génératrices (art. **641**).

Quand le plan sécant contient une génératrice, cette droite forme une branche infinie de l'intersection; la courbe proprement dite passe au point de la génératrice où le plan touche la surface. Enfin, lorsque le plan est horizontal, l'intersection se réduit à une génératrice et à la directrice rectiligne que la surface possède à l'infini (art. **641**).

Ligne d'ombre propre pour des rayons parallèles.

1030. On peut déterminer la projection horizontale de la ligne d'ombre propre par la construction de l'art. **995**, en remarquant que le cercle auxiliaire a un rayon infini. Traçant alors du point fixe P une divergente quelconque PQ (*fig.* 420), on lui mènera une parallèle OQ_1, et on élèvera à ces droites une perpendiculaire OM : la courbe est le lieu des points M, pieds des perpendiculaires abaissées de la trace O de l'axe sur les droites qui divergent du point P, c'est-à-dire le cercle ayant OP pour diamètre. Par suite, et conformément au

([1]) Cette construction est identique avec celle que nous avons exposée à l'article 672 pour le plan tangent au conoïde de la voûte d'arêtes en tour ronde.

théorème de l'art. **1026**, la ligne d'ombre dans l'espace est une hélice excentrique.

1031. Il est facile d'établir que la projection horizontale de la courbe d'ombre propre est un cercle, d'une manière directe, en partant de la construction de l'art. **1028**. Nous supposons le rayon de lumière (R, R′) parallèle au plan vertical (*fig.* 421); nous considérons une génératrice (ON, O'_1N'), et nous déterminons successivement la trace KG du plan passant par cette droite et parallèle aux rayons, la trace TG du paraboloïde de raccordement formé par les tangentes aux hélices, et le point M de la courbe d'ombre.

Nous pouvons supposer que le plan horizontal s'élève ou s'abaisse de manière à se trouver toujours à une même hauteur au-dessous de la génératrice considérée; alors la trace A de l'hélice directrice est en un point variable du cercle ANC, l'arc AN a une grandeur constante ainsi que l'angle TON, et le point K est fixe.

L'angle OGK égal à TON est constant, et ses côtés passant respectivement par deux points fixes O et K, son sommet se meut sur un cercle. Si nous prolongeons la droite GM jusqu'à ce cercle en P, le point P sera fixe, car l'angle OGP complémentaire de TON est constant. Le sommet M de l'angle droit PMO décrit donc un cercle ayant OP pour diamètre.

Dans le quadrilatère inscrit POKG, l'angle en G est droit; l'angle en O est donc aussi droit, et par suite le diamètre OP du cercle POM est perpendiculaire à xy.

Lorsque le point M est en P, G se trouve en G_1, l'angle G_1OP est égal à TON, et l'on a

$$\mathrm{OP} = \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{tang\,TON}}.$$

On trouve d'ailleurs

$$\mathrm{OK} = \mathrm{O'O'_1}\cot\gamma, \quad \mathrm{tang\,TON} = \mathrm{AON},$$

γ étant l'angle $O'K'O'_1$ des rayons de lumière avec le plan horizontal.

En portant ces valeurs dans l'expression de OP, on obtient

$$\mathrm{OP} = \frac{\mathrm{OO'_1}}{\mathrm{AON}}\cot\gamma;$$

et, en introduisant le pas réduit h,

$$\mathrm{OP} = h\cot\gamma.$$

Nous n'avons ainsi que la grandeur absolue du diamètre OP. En faisant sur la direction des ordonnées positives les mêmes conventions qu'à l'art. **995**, on reconnaît, d'après la position du point P sur la figure, que son ordonnée est de signe contraire au produit $h\cot\gamma$.

On peut, sans s'inquiéter du signe, déterminer l'extrémité P du diamètre qui est sur l'axe OY_1, en cherchant par la construction directe le point de la courbe situé sur cette droite.

1032. Les tangentes au cercle PMO aux points O et P sont parallèles à la projection R du rayon de lumière. Nous savons d'ailleurs que les plans tangents à la surface de la vis à filets carrés ne sont verticaux qu'aux points situés sur l'axe. Les points dont la projection est P sont donc des points limites (art. **892**). Ceux qui se projettent sur l'origine O ne sont pas limites, car les tangentes à une hélice aux points situés dans un plan méridien, de part et d'autre de l'axe, sont inclinées en sens contraire. Ainsi la tangente à l'hélice d'ombre (OMP, O′M′P′), au point (O, O′), a une inclinaison en sens contraire de la tangente au point limite (P, P′). Ce résultat est conforme à celui que nous avons obtenu à l'art. **1006**. On voit que les spires de l'hélice d'ombre sont alternativement réelles et virtuelles. Puisque cette hélice a des points limites, ses tangentes ont la même inclinaison que les rayons de lumière; par conséquent, et en vertu du théorème de l'art. **954**, l'ombre de cette courbe sur le plan horizontal, qui est l'ombre portée par la surface, est une cycloïde.

1033. Nous avons représenté sur la *fig.* 419 la partie d'une surface de vis à filets carrés comprise entre deux hélices (AEIMA, A′E′I′M′A″), (AMIEA, A′M″I′E″A″), tracées sur un même cylindre, et deux génératrices (AI, A′), (AI, A″), situées dans un même plan vertical. Nous avons ensuite éclairé cette surface par des rayons parallèles à une droite (R, R′), et nous avons déterminé ses ombres sur elle-même et sur le plan horizontal.

La première partie du travail ne présente aucune difficulté. Nous nous bornerons à dire que nous avons divisé chacune des deux hélices en seize parties égales, et que nous avons tracé les génératrices qui passent aux points de division.

Pour avoir le point P, il faut construire la longueur OP ou g (art. **995**), ou bien faire passer par la génératrice (OI, I′) un plan parallèle aux rayons de lumière, et chercher son point de contact (art. **1028**). Les deux procédés conduisent à des tracés peu différents; nous avons adopté le second.

En prenant sur la tangente Ii_1 au cercle AI une longueur $I\sigma$ égale à la moitié de la circonférence, et menant $O\sigma$, on a la trace du paraboloïde de raccordement sur le plan horizontal $A'\tau'$. La trace du plan parallèle aux rayons de lumière, et contenant la génératrice (AI, I′), est $\tau'\tau$; la perpendiculaire abaissée de τ sur OI donne le point P. L'hélice d'ombre propre se projette horizontalement sur le cercle OP, et verticalement sur la sinusoïde A′O′I′O″A″, qu'il est facile de construire.

Nous considérons la surface comme une feuille, et non comme recouvrant un corps solide; il résulte de là que la courbe d'ombre a toutes ses parties réelles,

mais un arc n'est utile sur une projection que quand les rayons de lumière tangents sont du côté vu de la surface.

Lorsque l'on considère les positions relatives de deux génératrices consécutives, telles que (CK, C′K″) et (DL, D′L″), on reconnaît que la face de l'hélicoïde, qui est supérieure quand on la considère d'un côté de l'axe, devient inférieure lorsqu'on la prolonge au delà de cette droite. Sur la projection verticale, chaque face, dans sa partie vue, est supérieure à droite de l'axe et inférieure à gauche.

La manière dont la surface est disposée étant bien comprise, le tracé des ombres ne peut présenter aucune difficulté. Sur la projection verticale, l'hélice d'ombre n'a pas d'arc utile; elle passe au point I′ d'une face à l'autre, et appartient toujours à la partie cachée. Au point (O, O′) l'hélice reste sur la même face, qui est supérieure d'un côté et inférieure de l'autre; il en résulte que, sur la projection horizontale, le cercle OP est utile d'un côté seulement du point O.

En déterminant les ombres des génératrices sur le plan horizontal, on obtient: 1° la cycloïde pp_1p_2, trace du cylindre circonscrit parallèle aux rayons; 2° les courbes $abc \ldots qsa'$ et $i_1j_1k_1 \ldots h_1i_2$, ombres des deux hélices qui limitent la partie considérée de l'hélicoïde. Ces lignes sont des cycloïdes allongées, engendrées par les points A et I lorsque le cercle PO roule sur la droite pp_1p_2, après avoir été transporté parallèlement à lui-même, de manière que le point P soit en p. Pour avoir les ombres portées par la surface sur elle-même, il suffit de ramener sur la projection horizontale, et de relever sur la projection verticale, les lignes $\alpha\beta\gamma$, $\varepsilon\delta$ et $\lambda\mu\nu$ données par la projection oblique ([1]).

Courbe d'ombre propre dans le cas où les rayons sont divergents.

1034. Quand les rayons sont divergents, on simplifie les opérations en prenant pour plan horizontal de construction celui qui contient le point lumineux S (*fig.* 411); alors, pour avoir la projection du point de la courbe d'ombre situé sur une génératrice OC, on trace par le point S une droite HG parallèle à cette ligne, et on la considère comme la trace d'un plan contenant la droite OC. On détermine ensuite le point de contact M de ce plan, comme il est expliqué à l'article **1028**.

Si l'on suppose que la longueur OQ devienne infinie dans la construction représentée sur la *fig.* 416 (art. **1012**), les points Q et D iront à l'infini sur OD, et par suite les droites SQ et SD seront confondues en une seule droite perpendiculaire à OM. D'après cela, pour avoir un point d de la tangente au point M à la

---

(1) Nous avons cru qu'il était inutile d'indiquer par des hachures l'étendue de l'ombre portée par la surface sur le plan horizontal.

projection horizontale de la courbe d'ombre propre de la surface de la vis à filets carrés (*fig.* 411), il suffit d'abaisser du point S une perpendiculaire Sl à OC, et de prendre ld égale à Sl. Les tangentes à la courbe aux divers points situés sur la droite indéfinie OC passent toutes par le point d.

Tous les plans tangents à l'infini sont horizontaux (art. **641**). La courbe d'ombre a donc une seule branche infinie, correspondant à la génératrice située à la même hauteur que le point lumineux. L'asymptote est parallèle à cette droite.

En appliquant la construction que nous avons trouvée pour les tangentes, on reconnaît que le point lumineux et l'asymptote sont situés de part et d'autre et à égales distances de la génératrice, ce qui devait être puisque la surface a un plan directeur (art. **884**).

En rapprochant les résultats des articles **1015** et **1030**, on trouve que les projections des points limites d'une courbe d'ombre sont sur le cercle qui aurait pour diamètre la droite OS (*fig.* 411).

Représentation d'une vis à filets carrés et de son écrou.

1035. Une vis à filets carrés se compose d'un noyau plein qui a la forme d'un cylindre de révolution, et d'un solide hélicoïde dont la génératrice méridienne est un rectangle $a'b'c'd'$ (*fig.* 413) placé de manière que l'un de ses côtés $a'd'$ soit un segment d'une génératrice du cylindre, et que son plan passe par l'axe de cette surface. En général, on donne au pas $c'c'_1$ des hélices une longueur double de la hauteur $b'c'$ du rectangle, afin que les filets de la vis et ceux de l'écrou aient la même épaisseur.

Pour faire l'élévation d'une vis à filets carrés, il suffit de tracer dans leurs parties vues les quatre hélices décrites par les sommets du rectangle, et les segments de droites qui forment le contour apparent du cylindre du noyau et du cylindre extérieur du filet.

Nous avons représenté l'écrou par une projection horizontale et par une coupe verticale (*fig.* 414).

La *fig.* 405 est l'élévation d'une vis double à filets carrés.

1036. Nous supposons maintenant la vis de la *fig.* 413 éclairée par des rayons parallèles à une droite (R, R′), et nous allons déterminer ses ombres.

Les hélicoïdes auxquels appartiennent la face supérieure et la face inférieure du filet ont un même pas, et leurs lignes d'ombre propre sont des hélices identiques. On trouve que le diamètre du cylindre sur lequel sont ces hélices est plus petit que le rayon Oa du noyau, et que par suite il n'existe pas de lignes d'ombre propre sur les faces hélicoïdes du filet. Le diamètre du cylindre des hélices d'ombre n'étant d'aucune utilité pour les opérations, nous ne l'avons pas

indiqué, et nous n'avons pas conservé les constructions qui nous avaient servi à le déterminer.

Ombres propres et ombres portées sur les surfaces des cylindres. — En traçant un rayon On perpendiculaire à R, on obtient les points m et n, traces horizontales des génératrices qui forment les lignes d'ombre propre sur les deux cylindres du noyau et du filet.

Il est très facile d'avoir les ombres portées sur ces surfaces; ainsi, le rayon $(pq, p'q')$, qui part d'une hélice saillante, rencontre le cylindre ae en un point dont la projection horizontale q fait trouver la projection verticale q'. On détermine de la même manière la ligne $\tau'\sigma'$, ombre de (ST, S'T'), et les arcs $\sigma'\varphi'$ et $\varphi'_1\psi'_1$, ombres de la droite (TU, T'U').

Ombre portée sur la surface supérieure du filet le plus élevé. — Pour avoir les ombres portées sur la surface $c'_1 d'_1 g'_2 h'_2$, il faut construire des projections obliques, comme nous l'avons déjà fait pour la vis à filets triangulaires (art. **1019**). Nous déterminons sur un plan horizontal arbitraire $x_1 y_1$ les lignes $\mu\alpha''$, T''U'' et $\lambda''\beta''$, ombres des lignes $m'_2\psi'_1$, (TU, T'U') et $c'_1\beta'$. L'intersection β'' fait connaître le point β' où l'ombre de l'arête de la tête de la vis arrive sur l'hélice.

Nous considérons ensuite sur l'hélicoïde différentes génératrices rectilignes comprises entre les points m'_2 et β', et nous construisons leurs projections obliques sur le plan $x_1 y_1$; les points où ces droites rencontrent la ligne brisée $\mu\alpha''\beta''$ sont les projections obliques des points des génératrices qui appartiennent à la ligne d'ombre portée $m'_2\beta'$.

Ombre portée sur la surface supérieure du second filet. — La surface $c'd'g'_1 h'_1$ ne reçoit pas l'ombre de la tête de la vis. Pour déterminer la ligne $m'_1\delta'$, nous avons fait une projection sur un second plan horizontal xy, situé au-dessous du premier à une distance égale au pas des hélices. Par suite de cette disposition, la courbe $\lambda''\delta''$ devient l'ombre de l'hélice $c'\delta'$. On construit la courbe $\gamma''\varepsilon''$, ombre de l'arc $b'_1 f'_2$, et, traçant comme précédemment les projections de quelques génératrices de l'hélicoïde, on prend et on relève leurs intersections avec la ligne brisée $\mu\gamma''\delta''$.

1037. *Ombres de l'écrou.* — Sur l'écrou, les ombres propres des cylindres sont virtuelles; il n'y a donc à considérer que des ombres portées. Pour les cylindres, ces ombres sont obtenues sans difficultés, mais pour les hélicoïdes il faut faire des projections obliques.

Après avoir pris une ligne de terre xy, nous déterminons les projections $r\pi$, $\pi\omega$, $\omega\Omega$ et $\pi\eta$ des lignes $d'_1 a'_2$, $a'_2 b'_2$, $b'_2 c'_2$ et du petit arc $a'_2\eta'$ de l'hélice intérieure; ensuite, considérant sur la face supérieure du filet diverses génératrices passant entre les points u_1 et l'_2, on obtient les points où elles rencontrent la courbe d'ombre en relevant les intersections de leurs projections obliques avec

la ligne brisée $r\pi\eta\Omega$. Dans le cas actuel, la ligne $u_1 l'_2$ se présente à peu près comme une droite.

L'angle saillant g' porte sur le cylindre de grand rayon une ombre $j'j'_1 h'$ facile à construire.

Il est nécessaire de représenter sur la projection horizontale l'ombre que la face supérieure du filet reçoit d'une partie de l'arc Ff. Cette ligne étant horizontale, il convient de faire la projection oblique sur son plan X'Y'. Une génératrice $\xi\chi$ a pour projection $\xi_1\chi_1$; son point de rencontre ζ_1 avec Ff fait trouver le point ζ de la ligne d'ombre GL.

Rayons de courbure. Lignes asymptotiques. Lignes de courbure.

1638. Les génératrices, étant perpendiculaires à l'axe, sont les normales principales des hélices (art. **953**). Il résulte de là, d'après les théorèmes de l'article **935** : 1° que les hélices sont avec les génératrices les lignes asymptotiques de la surface; 2° que la surface du second ordre, osculatrice le long d'une génératrice, est un paraboloïde isoscèle; 3° que les rayons de courbure principaux ont, en un point quelconque, des longueurs absolues égales.

On peut déduire ces résultats de ceux que nous avons obtenus pour la surface de la vis à filets triangulaires, car la construction expliquée à l'article **1004**, pour les asymptotes de l'indicatrice en un point de cette surface, montre que, quand le paramètre r est infini, c'est-à-dire quand l'hélicoïde a un plan directeur, les secondes asymptotes des indicatrices aux différents points d'une génératrice sont perpendiculaires à cette droite.

La formule de l'article **826** donne, pour chacun des rayons R_1 et R_2, l'expression très simple

$$R_1 = \frac{x^2 + k^2}{k}.$$

x est l'abscisse mesurée à partir du point central, et k le paramètre dont la valeur est égale en grandeur absolue au pas réduit h, conformément au résultat trouvé à l'article **988**.

Si l'on appelle θ l'angle que la normale au point dont l'abscisse est x fait avec le plan horizontal, on aura, entre le rayon de courbure R_1 et sa projection horizontale y, la relation

$$y = R_1 \cos\theta.$$

En introduisant la valeur que nous avons trouvée pour R_1, et éliminant θ par l'équation

$$\tang\theta = \frac{x}{k},$$

on obtient

$$y^2 - x^2 = k^2,$$
$$y^2 - x^2 = h^2.$$

La projection sur un plan perpendiculaire à l'axe, du lieu des centres de courbure principaux d'une surface de vis à filets carrés, aux différents points d'une génératrice, est une hyperbole équilatère dont l'axe transverse a une longueur double du pas réduit de la surface (¹).

1039. On peut, pour une surface de vis à filets carrés, déterminer directement le paramètre des génératrices, l'indicatrice et les rayons de courbure par la méthode de l'article **790**.

En prenant pour axe des x, des z et des y, une génératrice, l'axe de l'hélicoïde et une commune perpendiculaire, on trouve pour l'équation de cette surface

$$z = h \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

Nous transportons l'origine sur l'axe des abscisses à une distance x_1, et nous faisons tourner les axes des y et des z de manière qu'ils deviennent le premier tangent et le second normal à la surface. En appelant θ l'angle que le plan tangent à l'hélicoïde à la nouvelle origine fait avec le plan central de la génératrice, nous avons pour la transformation des coordonnées

$$x = x_1 + x',$$
$$y = y' \sin\theta - z' \cos\theta,$$
$$z = y' \cos\theta + z' \sin\theta.$$

La substitution de ces valeurs donne

$$(1) \qquad y' \cos\theta + z' \sin\theta = h \operatorname{arc\,tang} \frac{y' \sin\theta - z' \cos\theta}{x_1 + x'}.$$

On a en général

$$\operatorname{arc\,tang} a = a - \tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{1}{5}a^5 - \tfrac{1}{7}a^7 \ldots;$$

par conséquent, la différence entre un arc infiniment petit et sa tangente est seulement du troisième ordre.

Quand x' et y' sont infiniment petits du premier ordre, z' est infiniment petit

(¹) On trouve, par des calculs analogues à ceux des articles 837 et 839, que *la projection du lieu des centres de courbure principaux d'un conoïde général, aux différents points d'une génératrice, sur un plan parallèle au plan directeur, est une hyperbole.*

du second; alors, d'après ce que nous venons de voir, si l'on néglige les termes du troisième ordre, l'équation se réduit à

$$y' \cos\theta + z' \sin\theta = h \frac{y' \sin\theta - z' \cos\theta}{x_1 + x'};$$

d'où l'on tire

$$x_1 y' \cos\theta + x_1 z' \sin\theta + x' y' \cos\theta = h y' \sin\theta - h z' \cos\theta.$$

Cette équation doit représenter l'indicatrice; les termes du premier ordre disparaissent donc, et l'on a

$$x_1 y' \cos\theta = h y' \sin\theta,$$

$$\text{tang}\,\theta = \frac{x_1}{h}.$$

Il résulte de là que le paramètre des génératrices est égal au pas réduit en grandeur absolue.

Les termes du premier ordre étant supprimés, on a pour l'équation de l'indicatrice

$$x_1 z' \sin\theta + x' y' \cos\theta + h z' \cos\theta = 0.$$

En introduisant la valeur que nous venons de trouver pour tang θ, on a

$$x' y' = - z' \frac{x_1^2 + h^2}{h}.$$

Cette équation représente une hyperbole équilatère, et par suite les rayons de courbure principaux sont égaux et de signe contraire.

L'indicatrice, rapportée aux bissectrices des angles de ses asymptotes, a pour équation

$$x''^2 - y''^2 = 2 z' \frac{x_1^2 + h^2}{h}.$$

Enfin, en opérant comme nous l'avons fait pour le tore à l'article **874**, on obtient la valeur déjà trouvée pour la grandeur commune des rayons de courbure [1].

1040. Proposons-nous de déterminer les caractères de la surface gauche gé-

---

[1] La surface de la vis à filets carrés est le lieu des normales à une infinité de cylindres de révolution. On peut par suite appliquer à cette surface, et de diverses manières, les théorèmes établis aux articles 849-858. On trouve ainsi immédiatement, par la formule de l'article 857, que le paramètre des génératrices est égal au pas réduit, en grandeur absolue, car la tangente de l'angle φ est $\frac{h}{R_1}$.

nérale dont les rayons de courbure ont en chaque point des grandeurs absolues égales.

Les indicatrices d'une telle surface sont des hyperboles équilatères, les lignes asymptotiques de la seconde série sont par suite les trajectoires orthogonales des génératrices, et la surface du second ordre osculatrice le long d'une génératrice quelconque G a la droite G pour ligne de striction. Cette surface est donc un paraboloïde isoscèle (art. **643**); sa seconde ligne de striction est une droite perpendiculaire à G et aux autres génératrices du même système.

Nous avons vu à l'article **656** que celle des génératrices d'un même système d'un paraboloïde qui passe au sommet a le plus petit paramètre. Le paramètre de G ne diffère donc de celui de la génératrice qui lui est infiniment voisine, que d'une quantité infiniment petite du second ordre.

Ces observations montrent comment sont disposées trois génératrices consécutives quelconques G, G′, G″ de la surface gauche :

Puisqu'elles appartiennent à un paraboloïde, elles sont parallèles à un même plan, et la surface a un plan directeur;

Puisqu'elles ont une commune perpendiculaire, la surface est un conoïde droit;

Puisqu'elles déterminent deux paramètres consécutifs égaux, la hauteur de G′ au-dessus de G et celle de G″ au-dessus de G′ sont proportionnelles aux angles de ces droites, et la surface est un hélicoïde.

La surface de la vis à filets carrés est donc la seule surface gauche dont les rayons principaux de courbure aient en un point quelconque des grandeurs absolues égales ([1]).

Les lignes de courbure rencontrent toutes les génératrices sous un angle de 45°. On peut facilement construire leurs projections.

1041. Nous allons maintenant rechercher les sections normales surosculées par des cercles. Pour cela, nous développerons l'équation (1) de l'article **1039**, et nous la mettrons sous la forme de l'équation (1) de l'article **937**, en négligeant les termes qui sont infiniment petits d'un ordre supérieur au troisième, quand x' et y' le sont du premier.

Nous avons d'abord

$$y'\cos\theta + z'\sin\theta = h\,\frac{y'\sin\theta - z'\cos\theta}{x_1 + x'} - \frac{h}{3}\,\frac{(y'\sin\theta - z'\cos\theta)^3}{(x_1 + x')^3},$$

([1]) Meusnier a démontré le premier que, dans la surface de la vis à filets carrés, les rayons de courbure sont en chaque point égaux et de signe contraire (Mémoire cité à l'article 815); quant à la proposition réciproque de l'article 1040, M. Catalan et plusieurs autres géomètres s'en sont occupés. On trouve des détails historiques sur cette question dans les *Développements de Géométrie descriptive* de Th. Olivier, p. 440, et dans un Mémoire de M. Ossian Bonnet, inséré au XXXII[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 134.

ou bien

$$y' + z' \tang\theta = h \frac{y' \tang\theta - z'}{x_1 + x'} - \frac{h}{3} \frac{y'^3}{(x_1 + x')^3} \tang\theta \sin^2\theta ;$$

pour que l'axe des z' se confonde avec la normale, il faut, comme nous l'avons reconnu à l'article **1039**, que l'on ait

$$\tang\theta = \frac{x_1}{h}, \quad \text{d'où} \quad \sin^2\theta = \frac{x_1^2}{x_1^2 + h^2};$$

introduisant ces valeurs dans l'équation, développant, et supprimant les termes infiniment petits d'un ordre supérieur au troisième, on obtient

$$\frac{x_1^3}{3(x_1^2 + h^2)} y'^3 + 2x_1 y' x'^2 + x_1^2 x' y' + x_1 \frac{3x_1^2 + 2h^2}{h} x' z' + x_1^2 \frac{x_1^2 + h^2}{h} z' = 0.$$

En comparant cette équation avec l'équation (1) de l'article **937**, on voit que dans le cas actuel les valeurs des coefficients de cette dernière sont

$$M = 0, \quad M' = \frac{x_1^3}{3(x_1^2 + h^2)}, \quad N = 2x_1, \quad N' = 0,$$

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad B = x_1^2, \quad B' = x_1 \frac{3x_1^2 + 2h^2}{h},$$

$$B'' = 0, \quad C = x_1^2 \frac{x_1^2 + h^2}{h}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (3) de l'article **937** on obtient, après quelques réductions faciles,

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Les racines de cette équation sont les tangentes trigonométriques des angles que les tangentes des projections des sections normales surosculées par des cercles font avec l'axe des abscisses, qui est la génératrice. On voit que ces angles sont 0, 60° et 120°. Il résulte de là que, sur la surface du filet de la vis carrée, les courbes tangentes aux sections normales surosculées par des cercles rencontrent les génératrices rectilignes et se coupent elles-mêmes sous des angles de 60° (1).

(1) On peut déduire ce résultat de l'équation (16) de la Note de l'article 939.

CHAPITRE V.

SURFACES HÉLICOIDES NON RÉGLÉES.

Section plane. — Plan tangent. — Courbe d'ombre. — Normale.
Surface de vis à filets triangulaires normale.

1042. Une surface hélicoïde est donnée, en général, par son axe que nous supposerons vertical, par son pas et par une génératrice curviligne. On construit le contour apparent de cette surface par rapport à un plan, en prenant l'enveloppe des projections, sur ce plan, des hélices décrites par un certain nombre de points convenablement espacés sur la génératrice.

On détermine l'intersection de la surface par un plan, en prenant les traces, sur ce plan, d'un nombre suffisant d'hélices. La construction est très facile quand le plan sécant est perpendiculaire au plan vertical, car, à chaque point d'intersection de la trace verticale avec une sinusoïde projection d'une hélice, correspond sur le plan horizontal un point de la projection de la courbe. Quand le plan n'est pas perpendiculaire au plan vertical, on l'amène à cette position en le faisant tourner autour de l'axe d'un mouvement hélicoïde, puis, lorsque l'intersection a été construite, on le ramène à sa véritable position : il suffit pour cela de faire tourner sa projection horizontale d'un angle égal et de sens contraire à celui dont on fait tourner le plan, et de diminuer ou d'augmenter les hauteurs des projections verticales de ses divers points d'une quantité égale à celle dont tous les points du plan ont été élevés ou abaissés dans le mouvement hélicoïde.

1043. *Plan tangent. Surface de vis à filets triangulaires de raccordement.* — On obtient le plan tangent à un hélicoïde en un point donné en déterminant la tangente à la génératrice et celle de l'hélice qui se croisent à ce point. Lorsque l'on veut construire plusieurs plans tangents, il est utile d'employer des hélicoïdes gauches de raccordement.

Quand une courbe et une de ses tangentes se transportent d'un même mouvement, les surfaces qu'elles engendrent se raccordent le long de la ligne décrite par le point commun. Si la courbe est la méridienne d'un hélicoïde, la surface décrite par l'une quelconque de ses tangentes est celle d'une vis à filets triangulaires.

La courbe χ (*fig.* 422) étant la méridienne d'un hélicoïde, si l'on veut construire le plan tangent à cette surface au point dont la projection horizontale est N, on pourra décrire du point O comme centre l'arc NM, relever le point M

en M′, tracer la tangente M′T′ et remplacer l'hélicoïde par la surface de vis à filets triangulaires qui a le même pas, le même axe (O, XZ), et dont la droite (Ox, T′M′) est la génératrice dans sa position initiale. On appliquera à cette surface l'une des deux méthodes expliquées à l'article **991**; la seconde exige que l'on détermine le paramètre r (art. **989**).

En appelant $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les angles que les tangentes à la méridienne aux points M′, $M'_1, M'_2, \ldots$ font avec le plan horizontal, et $r, r_1, r_2, \ldots$ les paramètres des surfaces de vis à filets triangulaires de raccordement le long des hélices décrites par ces points, on aura

$$r = h\cot\alpha, \quad r_1 = h\cot\alpha_1, \quad r_2 = h\cot\alpha_2, \quad \ldots,$$

d'où

$$r\tan\alpha = r_1\tan\alpha_1 = r_2\tan\alpha_2 = \ldots.$$

Cette relation conduit à une construction très simple des paramètres $r_1, r_2, \ldots$, qui serviront à déterminer le plan tangent en divers points des hélices qui passent aux points $M'_1, M'_2, \ldots$.

1044. *Ligne d'ombre.* — Si l'on veut connaître les points d'une courbe d'ombre qui appartiennent à l'hélice décrite par un point déterminé, on remplacera, comme précédemment, l'hélicoïde par la surface de vis à filets triangulaires de raccordement, et l'on appliquera ensuite la construction de l'article **997** ou celle de l'article **1010**, selon que les rayons seront parallèles ou divergents.

Dans le premier cas, quelle que soit l'hélice considérée sur la surface, le cercle auxiliaire PnN (*fig.* 401) reste invariable, car son rayon est égal à $h\cot\gamma$ (art. **997**). La distance du point F à l'origine O est égale au paramètre r que l'on détermine comme nous l'avons dit à l'article précédent, d'après l'inclinaison de la génératrice de la surface de vis à filets triangulaires. Des quatre points M, M_1, m et m_1, situés sur le cercle Gg projection de l'hélice considérée, deux seulement sont utiles : on verra dans chaque cas à quelle nappe de la surface de vis à filets triangulaires appartient l'hélice de raccordement, et l'on rejettera les deux points qui ne sont pas sur cette nappe en se réglant sur les indications des *fig.* 398, 400 et 402 [1].

Si la génératrice donnée n'était pas dans un plan contenant l'axe, pour avoir la tangente à la méridienne, il faudrait construire le plan tangent à la surface et déterminer sa trace sur le plan méridien du point de contact.

1045. Dans le cas que nous examinons, c'est-à-dire quand les rayons sont

---

[1] Bour a été conduit par des considérations de cinématique à une construction dans laquelle on emploie un cercle variable et un point fixe, au lieu d'un cercle fixe et d'un point ayant une position variable (*voir* la séance de la Société Philomathique du 4 juin 1864).

parallèles, on peut opérer directement sans considérer une surface de raccordement.

Soient (R, R′) le rayon de lumière (*fig.* 425), χ la méridienne de l'hélicoïde, (O, O′Z) l'axe, (AA_2, $A'A''_2$) les projections de l'hélice décrite par un point (A, A′) de χ : nous allons chercher quels sont les points de cette hélice qui appartiennent à la ligne d'ombre propre de la surface.

Nous construisons d'abord le plan tangent au point (A, A′); pour cela, nous prenons un plan horizontal d'opération XY situé au-dessous de ce point à une hauteur égale à une fraction simple du pas, le huitième. La tangente à l'hélice au point (A, A′) a sa trace au point g_1, à une distance du point A égale à l'arc Ag, huitième de la circonférence. La tangente à la méridienne perce le plan horizontal au point T : le plan tangent a donc pour trace horizontale Tg_1; il rencontre l'axe au point (O, O′).

Tous les plans tangents à l'hélicoïde aux points de l'hélice (AA_2, $A'A''_2$) font, avec le plan horizontal, le même angle que le plan (Tk, T′O′); ils sont donc parallèles aux plans tangents au cône de révolution dont le sommet est le point (O, O′), et dont la trace est le cercle qui a pour rayon la droite Ok perpendiculaire à Tg_1.

Les génératrices de ce cône, le long desquelles le plan tangent est parallèle aux rayons de lumière, sont Ok_1 et Ok_2 (art. **151**). Si nous prenons les arcs c_1A_1 et c_2A_2 égaux à cA, les points A_1 et A_2 seront les positions du point A lorsque le point c aura été transporté en c_1 et en c_2. Les points (A_1, A'_1) et (A_2, A'_2) sont donc ceux de l'hélice où le plan tangent à la surface est parallèle aux rayons de lumière (*).

Il n'y aurait que très peu de modifications à apporter aux tracés, si la génératrice donnée n'était pas méridienne.

On peut encore déterminer la courbe d'ombre en faisant des sections par des plans parallèles aux rayons de lumière, et en menant à ces courbes des tangentes parallèles aux rayons. Pour que les constructions soient faciles, il faut prendre les plans auxiliaires perpendiculaires au plan vertical (art. **1042**) et opérer sur les projections horizontales des sections. Ce procédé est applicable au cas où les rayons sont divergents; il a l'avantage de donner en même temps des points des deux courbes d'ombre propre et d'ombre portée.

1046. *Normale.* — Nous allons maintenant nous proposer de construire la normale à la surface en un point (M, M′) du méridien principal (*fig.* 422).

Nous plaçons le plan horizontal au-dessous de ce point, à une hauteur égale au quart du pas des hélices; pour avoir un point E de la ligne de terre, il suffit de prendre au-dessous du point M′ une longueur M′E égale à I′J.

(*) Cette méthode a été employée par le chevalier Faà de Bruno (*Mémoire sur les colonnes torses*).

La trace L de la tangente à l'hélice au point M est sur la droite ME à une distance ML égale au quart de cercle MQ. On détermine facilement la trace T de la tangente à la méridienne : le plan tangent est donc (TL, T'M'). On obtient les projections de la normale en abaissant des points M et M' des perpendiculaires MG et M'F' sur les traces TL et T'M' de ce plan.

1047. *Surface de vis à filets triangulaires normale.* — La normale (MF, M'F') ne rencontre pas l'axe, et par suite, dans le mouvement hélicoïde, elle engendre un hélicoïde gauche général. Le plan tangent à cette surface au point (M, M') contient la normale à la surface et la tangente à l'hélice; ses traces sont par conséquent LF et K'M'.

Si la droite K'M' trace verticale du plan tangent à l'hélicoïde des normales est entraînée dans le mouvement hélicoïde, elle décrira une surface de vis à filets triangulaires qui se raccordera avec cet hélicoïde gauche le long de l'hélice décrite par le point (M, M'), et qui, par conséquent, rencontre normalement la surface considérée ([1]).

Quand la génératrice donnée de l'hélicoïde n'est pas méridienne, ses tangentes décrivent des surfaces gauches hélicoïdes générales; mais, par une construction analogue à la précédente, on peut déterminer des surfaces de vis à filets triangulaires de raccordement.

1048. *Intersection d'un hélicoïde et d'un conoïde.* — Dans certains problèmes de Stéréotomie, on a besoin de déterminer l'intersection d'un hélicoïde et d'un conoïde droit de même axe. On prend alors pour surfaces auxiliaires des surfaces de vis à filets carrés ayant le même pas et le même axe que l'hélicoïde : leurs intersections avec cette surface et avec le conoïde sont, sur le plan horizontal, des droites et des cercles. La construction de la projection horizontale ne diffère donc pas de celle que nous avons expliquée pour l'épure de la voûte d'arêtes en tour ronde (art. **671**).

Indicatrices.

1049. On trouve, par l'analyse (art. 1049*a*), que pour déterminer les projections horizontales des asymptotes de l'indicatrice d'une surface hélicoïde en un point donné (M, M') de la méridienne χ (*fig.* 423), il faut : 1° déterminer le paramètre r de la surface de vis à filets triangulaires qui se raccorde avec l'hélicoïde

---

([1]) Les appareilleurs avaient adopté pour génératrices des lits de la vis Saint-Gilles ronde des rayons d'une des demi-circonférences méridiennes de l'intrados; mais les lits ainsi obtenus sont obliques à l'intrados. Aussi Jules de la Gournerie a proposé pour lits les surfaces de vis triangulaires normales engendrées par les droites analogues à K'M'. J'ai déterminé la valeur de l'angle de ces deux espèces de lits (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, janvier 1884). (E. L.)

le long de l'hélice du point (M, M'), et porter ce paramètre en OQ sur une perpendiculaire à OM, du côté où s'étend la branche de la spirale d'Archimède sur laquelle est la trace de la génératrice M'K; 2° construire la projection MG de l'une des asymptotes de l'indicatrice de la surface qui serait engendrée par la révolution de la méridienne autour de l'axe (art. **822**); 3° prendre sur la droite OM une longueur OC égale à OG, puis décrire un cercle passant par le point C et ayant son centre en Q : les points P et P_1, où ce cercle rencontre la droite OQ, appartiennent aux asymptotes cherchées.

1149*a*. Voici la démonstration des constructions indiquées dans l'article précédent.

L'équation des projections horizontales des asymptotes de l'indicatrice en un point (x, y, z) est

$$\mathrm{r}(x-a)^2+2\mathrm{s}(x-a)(y-b)+\mathrm{t}(y-b)^2=0;$$

a et b étant les coordonnées variables, et r, s, t les dérivées partielles du second ordre de l'ordonnée z considérée comme fonction des coordonnées x et y.

Nous allons nous proposer de déterminer r, s et t.

Soit

$$z=f(x)$$

l'équation de la méridienne. Si l'on appelle ρ le rayon vecteur d'un point, ω son azimut et h le pas réduit commun des hélices, l'équation de l'hélicoïde sera

$$z=h\omega+f(\rho);$$

on a d'ailleurs

$$\omega=\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x},\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2},$$

et par suite

$$\frac{d\omega}{dx}=-\frac{\sin\omega}{\rho},\quad \frac{d\omega}{dy}=\frac{\cos\omega}{\rho},\quad \frac{d\rho}{dx}=\cos\omega,\quad \frac{d\rho}{dy}=\sin\omega.$$

D'après ces valeurs, et en différentiant l'équation de la surface, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}&=-\frac{h\sin\omega}{\rho}+f'(\rho)\cos\omega,\\
\mathrm{q}&=\frac{h\cos\omega}{\rho}+f'(\rho)\sin\omega,\\
\mathrm{r}&=\frac{h\sin2\omega}{\rho^2}+f'(\rho)\frac{\sin^2\omega}{\rho}+f''(\rho)\cos^2\omega,\\
\mathrm{s}&=-\frac{h\cos2\omega}{\rho^2}-f'(\rho)\frac{\sin\omega\cos\omega}{\rho}+f''(\rho)\sin\omega\cos\omega,\\
\mathrm{t}&=-\frac{h\sin2\omega}{\rho^2}+f'(\rho)\frac{\cos^2\omega}{\rho}+f''(\rho)\sin^2\omega.
\end{aligned}$$

On peut supposer que l'on a pris pour méridienne principale celle qui passe par le point considéré; alors y et ω sont nuls, ρ est égal à x, et l'on a pour déterminer les projections

des asymptotes de l'indicatrice

$$\mathrm{r}(x-a)^2 - 2\mathrm{s}(x-a)b + \mathrm{t}b^2 = 0,$$
$$\mathrm{r} = f''(x), \quad \mathrm{s} = -\frac{h}{x^2}, \quad \mathrm{t} = \frac{f'(x)}{x}.$$

En appelant R le rayon de courbure de la méridienne au point considéré, et α l'angle que la tangente à cette courbe fait avec l'axe des abscisses, on a

$$f'(x) = \operatorname{tang}\alpha, \quad \mathrm{R} = \frac{(1+\operatorname{tang}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

On tire de la seconde équation

$$f''(x) = \frac{1}{\mathrm{R}\cos^3\alpha}.$$

La substitution des valeurs de $f'(x)$ et de $f''(x)$ dans les secondes dérivées donne

$$\mathrm{r} = \frac{1}{\mathrm{R}\cos^3\alpha}, \quad \mathrm{s} = -\frac{h}{x^2}, \quad \mathrm{t} = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{x}.$$

Les projections des asymptotes de l'indicatrice du point considéré seront connues quand on aura les ordonnées des points P et P_1 où elles rencontrent l'axe Oy (*fig.* 423). Faisant l'abscisse a nulle dans l'équation de ces droites, on obtient, pour déterminer l'ordonnée OP que nous appelons b_1, la formule

$$\mathrm{t}b_1^2 - 2\mathrm{s}xb_1 + \mathrm{r}x^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$b_1 = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{t}}x \pm \sqrt{\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{t}^2}x^2 - \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}x^2}.$$

En portant dans cette équation les valeurs de r, s et t, on trouve

$$b_1 = -h\cot\alpha \pm \sqrt{h^2\cot^2\alpha - \frac{x^3}{\mathrm{R}\cos^2\alpha\sin\alpha}}.$$

Si l'on suppose h nul, la surface sera de révolution, et, en appelant b_1' la valeur que prend alors b_1, on a

$$b_1'^2 = -\frac{x^3}{\mathrm{R}\cos^2\alpha\sin\alpha}.$$

Désignons maintenant, comme précédemment, par la lettre r, le paramètre de la surface de vis à filets triangulaires de raccordement. Nous avons

$$r = h\cot\alpha;$$

en introduisant ces valeurs dans l'expression de b_1, on obtient

$$b_1 = -r \pm \sqrt{r^2 + b_1'^2}.$$

On déduit immédiatement de cette formule la construction que nous avons donnée à l'art. **1050**.

Quand R est infini, b'_1 est nulle, et les deux valeurs de b_1 sont o et $-2r$. En rapprochant ce résultat de celui que nous avons obtenu à l'article **1004**, on reconnaît que l'ordonnée b_1 doit être considérée comme négative, quand elle est dirigée du côté où s'étend la branche de la spirale d'Archimède sur laquelle se trouve la trace de la génératrice de l'hélicoïde gauche de raccordement.

La construction de l'article **1050** repose sur cette observation que b'^2_1 change de signe en conservant la même grandeur absolue quand R change de signe.

Quand α est nul, les valeurs des dérivées partielles sont

$$\mathrm{r} = \frac{1}{\mathrm{R}}, \quad \mathrm{s} = -\frac{h}{x^2}, \quad \mathrm{t} = 0.$$

Une des valeurs de b_1 devient infinie; on a pour l'autre

$$b_1 = -\frac{x^3}{2\mathrm{R}h}.$$

Reprenons maintenant l'équation trouvée plus haut pour la projection des asymptotes de l'indicatrice

$$\mathrm{r}(x-a)^2 - 2\mathrm{s}(x-a)b + \mathrm{t}b^2 = 0.$$

Si nous supposons que le plan horizontal passe par le point considéré, et si nous appelons c l'ordonnée verticale variable, l'équation du plan tangent sera

$$c + \mathrm{p}(x-a) - \mathrm{q}b = 0.$$

Ces deux équations représentent les asymptotes de l'indicatrice.

Nous avons trouvé au commencement de cet article les valeurs de r, s et t. On obtient, en raisonnant de la même manière,

$$\mathrm{p} = \operatorname{tang}\alpha, \quad \mathrm{q} = \frac{h}{x}.$$

La substitution des valeurs des dérivées partielles donne

$$\frac{1}{\mathrm{R}\cos^3\alpha}(x-a)^2 + \frac{2h}{x^2}(x-a)b + \frac{\operatorname{tang}\alpha}{x}b^2 = 0,$$

$$c + (x-a)\operatorname{tang}\alpha - \frac{h}{x}b = 0.$$

En éliminant h entre ces équations, nous aurons l'équation du cône que forment les asymptotes de l'indicatrice du point considéré χ (*fig.* 423), pour toutes les surfaces hélicoïdes que cette courbe peut engendrer en tournant autour de l'axe OZ. On trouve

$$\left(\frac{1}{\mathrm{R}\cos^3\alpha} + \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{x}\right)(x-a)^2 + \frac{\operatorname{tang}\alpha}{x}b^2 + 2\frac{x-a}{x}c = 0.$$

Nous rappelons que les coordonnées variables sont a, b, c, et que x représente l'abscisse du point considéré de la méridienne χ.

Nous voyons que le cône formé par les asymptotes des indicatrices est du second ordre. On reconnaît facilement que ce cône est toujours réel, et qu'un de ses plans tangents est parallèle au plan méridien perpendiculaire à celui qui contient la courbe χ.

1050. Quand le point M′ est sur la partie de la méridienne qui tourne sa concavité vers l'axe (*fig.* 424), les asymptotes de l'indicatrice de la surface de révolution sont imaginaires; il faut alors prendre sur le prolongement de la normale une longueur A'_1M' égale à AM′, et opérer comme si le centre de courbure était en A'_1. On détermine et on porte sur O*y*, comme il a été dit précédemment, la longueur OQ du paramètre *r*; on trace la droite MG, celle des asymptotes de l'indicatrice de la surface de révolution qui rencontre O*y* du côté du point O où se trouve le point Q; on décrit ensuite un cercle de diamètre OQ, un second cercle du point O comme centre, avec OG pour rayon, et un troisième cercle ayant son centre en Q, et passant par le point S où les deux premiers se coupent. Les points P et P_1, où ce dernier cercle rencontre la droite OQ, appartiennent aux asymptotes cherchées.

Quand la longueur OQ est plus petite que OG, le point M′ est sur la partie convexe de l'hélicoïde; lorsque les points G et Q coïncident, les deux asymptotes de l'indicatrice sont réunies en une seule droite, et l'hélice qui passe par le point M′ sépare une partie convexe de la surface d'une partie à courbures opposées.

Prenons sur la méridienne du point M′ une longueur M′*m* égale à QG, en ayant soin de la porter du côté de la concavité ou du côté de la convexité, suivant que le point G sera en deçà ou au delà de Q; considérons ensuite sur la méridienne d'autres positions du point M′, et, faisant la même construction pour chacun d'eux, déterminons la courbe φ lieu des points *m* : cette ligne coupera la méridienne en un point N situé sur une hélice qui sépare une partie convexe d'une partie à courbures opposées. La courbe φ, considérée dans toute son étendue, pourra rencontrer la méridienne en plusieurs points.

1051. Lorsque l'on sait construire les asymptotes de l'indicatrice, on peut déterminer les tangentes à l'intersection d'un hélicoïde par un plan tangent et à sa ligne d'ombre. Pour obtenir les points limites des parties utiles de cette dernière ligne, il faut employer une courbe d'erreur analogue à celle dont nous nous sommes servi pour les surfaces de révolution (art. **894** et **898**).

Si les rayons sont divergents, on cherchera l'intersection des asymptotes de l'indicatrice, aux divers points de la méridienne, et du cylindre de révolution dont l'axe se confond avec celui de la surface et qui contient le point lumineux; puis, supposant ce point entraîné dans le mouvement hélicoïde, on déterminera les rencontres de l'hélice qu'il décrit avec la courbe d'intersection précédemment obtenue et les asymptotes qui passent par ces points. On achèvera ensuite la solution comme pour les surfaces de révolution [1].

---

[1] Ce procédé a été indiqué par M. Viala dans son Mémoire sur la vis Saint-Gilles (*Journal de l'École Polytechnique,* XXXVII[e] cahier).

On aura, en général, les points limites d'une ligne d'ombre d'une manière plus rapide et suffisamment précise, en menant sur l'une des projections des tangentes du point lumineux à cette courbe (art. **892**).

Pour résoudre entièrement la question des indicatrices, il faudrait déterminer les axes de ces courbes lorsqu'elles sont des ellipses; mais ce problème est plus compliqué et moins utile; en voici cependant la solution.

1051 *a*. Nous conservons les notations adoptées dans l'art. **1049** *a*, et nous appelons de plus λ, μ les angles que les asymptotes de la projection de l'indicatrice font avec l'axe des abscisses, et f l'ordonnée du point où un des axes de cette courbe coupe l'axe des ordonnées. On a

$$f = x \operatorname{tang} \frac{\lambda+\mu}{2}.$$

Eu égard aux valeurs de b_1, les tangentes des angles λ et μ sont données par les équations

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{-r+\sqrt{r^2+b_1'^2}}{x}, \quad \operatorname{tang}\mu = \frac{-r-\sqrt{r^2+b_1'^2}}{x}.$$

On déduit successivement de ces équations

$$\operatorname{tang}(\lambda+\mu) = -\frac{2rx}{x^2+b_1'^2},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\lambda+\mu}{2} = \frac{x^2+b_1'^2}{2rx} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2+b_1'^2}{2rx}\right)^2+1},$$

$$f = \frac{x^2+b_1'^2}{2r} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2+b_1'^2}{2r}\right)^2+x^2}.$$

Quels que soient le signe et la grandeur de $b_1'^2$, les valeurs de f sont réelles et d'une construction facile. Lorsqu'elles sont déterminées, on connaît la direction des axes.

En désignant par p et q les moitiés des longueurs des axes de la projection de l'indicatrice, on a

$$q = p \operatorname{tang}\frac{\lambda-\mu}{2}\sqrt{-1}.$$

Eu égard aux valeurs de $\operatorname{tang}\lambda$ et de $\operatorname{tang}\mu$, on obtient

$$\frac{q}{p} = \sqrt{-1}\left[\frac{x^2-b_1'^2}{2x\sqrt{r^2+b_1'^2}} \pm \sqrt{\frac{(x^2-b_1'^2)^2}{4x^2(r^2+b_1'^2)}+1}\right].$$

Nous trouvons deux valeurs pour $\frac{q}{p}$, mais leur produit est égal à l'unité. L'ambiguïté provient de ce que rien n'indique auxquels des axes appartiennent respectivement les longueurs p et q. Nous prenons simplement le signe $+$ et nous avons

$$\frac{q}{p} = \frac{x^2-b_1'^2}{2x\sqrt{-(r^2+b_1'^2)}} + \sqrt{\frac{(x^2+b_1'^2)^2+4r^2x^2}{-4x^2(r^2+b_1'^2)}}.$$

Dans le cas qui nous occupe le binôme $(r^2 + b_1'^2)$ est négatif, la formule donne pour $\frac{q}{p}$ une longueur réelle, ce qui doit être, puisque l'indicatrice est une ellipse. Nous pouvons nous donner arbitrairement le demi-axe p, le supposer égal à l'abscisse x, par exemple, et nous obtiendrons le demi-axe q par la construction à laquelle l'équation conduit. Cette construction n'est pas très compliquée.

Il reste à distinguer les axes. Si nous supposons que la surface devienne de révolution, le paramètre r sera nul comme le pas; remplaçant alors b'^2 par sa valeur (page 185), on obtient

$$\frac{q}{p} = \sqrt{\frac{\mathrm{R}}{x}\cos^2\alpha \sin\alpha}.$$

On peut obtenir directement cette formule d'après les grandeurs des rayons de courbure (art. **821**). On trouve alors que l'axe $2q$ est celui qui se confond avec un segment de la trace du plan méridien. On verra facilement, dans chaque cas, quel est l'axe qui se rapproche de la trace du plan méridien quand le pas diminue.

1052. Les relations graphiques que nous venons de faire connaître peuvent servir pour l'hélicoïde gauche général. Quand on opère sur cette surface, on ne connaît pas la méridienne, mais on a la génératrice rectiligne qui est une des deux asymptotes de l'indicatrice. Lorsque l'on a déterminé la surface de vis à filets triangulaires de raccordement le long de l'hélice qui passe à un point donné (art. **1047**), et le paramètre de cet hélicoïde, on obtient sans difficulté la seconde asymptote de l'indicatrice.

Représentation d'un serpentin.

1053. On appelle *serpentin* l'enveloppe des positions d'une sphère dont le centre se meut sur une hélice, ou la surface décrite par un cercle dont le centre parcourt une hélice, et dont le plan est toujours normal à cette courbe.

Nous avons vu (art. **435**) que le cylindre d'ombre d'une surface enveloppe est l'enveloppe des cylindres d'ombre de ses enveloppées. Il résulte de là que le contour apparent du serpentin sur un plan quelconque est l'enveloppe des cercles qui forment les contours apparents des sphères.

Nous divisons en seize parties égales une spire $(aeima, a'e'i'm'a'')$ de l'hélice directrice (*fig.* 426), et nous traçons les contours apparents des sphères enveloppées qui ont leur centre aux points de division. L'enveloppe de ces cercles sur le plan horizontal se compose de deux cercles projections de deux hélices.

Sur le plan vertical, le contour apparent présente quatre rebroussements, et par suite quatre points limites (art. **891**). Nous avons craint qu'un grand nombre de cercles ne rendît la figure confuse, mais il faut les multiplier un peu si l'on

veut étudier avec soin les singularités du contour apparent. On voit alors les rebroussements se produire d'une manière très nette : à chacun d'eux, un cercle rencontre les deux cercles voisins d'un même côté de son point de contact avec l'enveloppe dont la direction est déterminée par les tracés qui ont été précédemment faits. Lorsque, avant le rebroussement, la courbe était extérieure aux cercles, après lui, elle les touche intérieurement, et par conséquent elle est virtuelle si l'on considère la surface du serpentin comme recouvrant un corps opaque.

Les quatre cercles sur lesquels se trouvent les rebroussements sont voisins de ceux qui ont leurs centres aux points (d, d'), (f, f'), (l, l') et (n, n').

Les projections horizontales des contours apparents des sphères par rapport au plan vertical sont des droites parallèles à la ligne de terre et passant par les différents centres. En ramenant sur ces lignes les points de contact avec les cercles du contour apparent sur le plan vertical, on a des points de la projection horizontale de cette courbe. Les positions des points de contact ne sont pas données avec précision, et par suite les projections $CiJaC$ et $DilaD$ ne sont pas tracées avec une grande exactitude. Toutefois cette méthode rapide devra être adoptée en général.

Si l'on voulait opérer avec précision, on considérerait la génératrice non méridienne $N'a'M'$, on déterminerait pour différentes hélices des surfaces de vis à filets triangulaires de raccordement (art. **1047**), et enfin on chercherait pour chacune d'elles les points de la courbe situés sur l'hélice de contact (art. **1014**). Ces tracés ne sont pas difficiles.

La surface a trois formes différentes, suivant que le rayon de la sphère est inférieur, égal ou supérieur au rayon $AaOA$ du cylindre sur lequel est tracée l'hélice directrice.

LIVRE DIXIÈME.
SURFACES TOPOGRAPHIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

Représentation d'une surface par des courbes horizontales. Problèmes élémentaires.

1054. Dans la Topographie, on représente généralement la surface du terrain par des *lignes de niveau :* ce sont les lignes d'intersection de la surface avec des plans horizontaux. Chacune de ces courbes est déterminée par sa projection horizontale et par une cote qui indique la hauteur à laquelle elle se trouve. On suppose ordinairement les plans des sections équidistants, et on prend, pour la différence de hauteur de deux plans consécutifs, ou *équidistance,* un multiple de l'unité de longueur, de manière que les cotes des courbes soient des nombres entiers.

En général, et sauf de rares exceptions, une verticale ne rencontre la surface du terrain qu'en un point; il en résulte que les projections des lignes de niveau se développent sans se couper et que leur ensemble ne présente aucune confusion.

La surface du terrain n'est ainsi définie que d'une manière approximative, mais l'on peut multiplier les sections, eu égard à sa forme et à la nature du problème, de manière à obtenir le degré d'exactitude jugé nécessaire. La détermination des courbes sur le terrain est une question de nivellement; nous ne nous en occuperons pas.

Les lignes horizontales peuvent être employées pour la définition de toutes les surfaces; elles conviennent surtout pour celles dont la loi de génération n'est pas connue et qu'une verticale ne rencontre qu'en un point. Ces surfaces se nomment *surfaces topographiques*.

Le mode de représentation que nous venons d'indiquer appartient à la méthode des projections cotées, et par suite les constructions exposées dans le

Livre III vont être d'un usage continuel. Toute figure doit être accompagnée d'une échelle.

Nous supposerons que le plan horizontal de comparaison est inférieur, et par suite que les ordonnées positives sont mesurées de bas en haut.

1055. *Courbes intercalaires.* — On appelle *courbes intercalaires* des sections horizontales déterminées graphiquement d'après celles qui ont été relevées sur le terrain.

Nous allons nous proposer de tracer sur la *fig.* 427 la courbe de niveau qui correspond à la cote 17, 40, et pour cela de déterminer les projections de quelques points situés sur cette ligne.

Nous traçons une droite *ms* à peu près normale aux courbes cotées 17 et 18, puis nous rabattons, sur le plan horizontal qui est à la cote 15, le plan vertical dont *ms* est la trace, et nous construisons la section rabattue du terrain : cette opération est analogue à celle qui a été expliquée à l'article **264**. Nous traçons ensuite une droite parallèle à *mn* et à la distance ($17^m,40 - 15^m$) ou $2^m,40$, et nous projetons en *a* le point A où elle coupe la ligne M*s* : le point *a* appartient à la courbe cherchée (¹).

Le plus souvent on néglige la courbure de la section verticale entre les points P et Q, et l'on se borne à partager le segment *pq* en deux parties qui soient dans le rapport des différences de niveau ($17^m,40 - 17^m$) et ($18^m - 17^m,40$). La courbe intercalaire qui est à la cote 19, 25 a été construite par cette méthode.

Quand il n'est pas possible de tracer une droite à peu près normale aux deux lignes de niveau entre lesquelles on veut intercaler une courbe, on établit, le plus souvent à vue d'œil, une droite *eg* qui satisfasse à peu près à cette condition, et on la divise en deux arcs *ef* et *fg* qui soient dans le rapport donné.

On voit qu'il y a diverses manières d'opérer selon le degré d'exactitude qu'exigent les problèmes.

1056. Pour *déterminer la cote d'un point* A *situé sur une surface et donné par sa projection a* (*fig.* 427), on construira la section M*s* et l'on ajoutera la longueur de l'ordonnée *a*A à la cote 15; ou bien, si l'on veut opérer rapidement, on tracera la droite *paq* sensiblement normale aux deux courbes voisines, et on ajoutera à la cote 17 le rapport de *qa* à *qp* multiplié par l'équidistance qui est ici l'unité. Quelquefois on fait cette opération sans tracer aucune ligne, et en appréciant à vue le rapport de *qa* à *qp* : c'est ce que l'on appelle faire une *interpolation à vue*.

1057. *Sens des courbures d'un terrain.* — Sur la *fig.* 427, le point M situé à la

(¹) Les problèmes que nous présentons sont envisagés sous le point de vue général des constructions géométriques. Nous avons choisi, pour les figures, les dispositions qui permettent de développer les tracés avec clarté, et de faire bien comprendre la méthode, sans nous préoccuper des règles admises dans les services publics sur l'équidistance et l'échelle du dessin. L'exposition et la discussion de ces règles appartiennent à la Topographie et non à la Géométrie descriptive.

cote 20 est plus élevé que la droite *ms* qui est à la cote 15, et par suite le terrain se trouve du côté de la courbe M*s* où nous avons mis des hachures; il est par conséquent convexe dans le sens vertical.

En général, un terrain est convexe dans le sens vertical quand les intervalles *sr*, *rq*, *qp*, ..., mesurés sur une droite à peu près normale aux courbes horizontales, augmentent de longueur du côté où les courbes vont en s'élevant.

Un terrain est concave dans le sens horizontal quand une courbe de niveau a sa convexité tournée du côté de la projection de la courbe voisine qui est plus élevée qu'elle.

Une surface peut être à courbures opposées en un point, bien qu'elle soit convexe dans le sens vertical et dans le sens horizontal, ou concave dans les deux sens. Cela arrive quand la tangente à la ligne de niveau et sa perpendiculaire sont dans le même angle des asymptotes de l'indicatrice. La considération du plan tangent fait seule reconnaître le sens des courbures d'une manière certaine.

1058. *Section plane d'une surface topographique*. — Nous avons vu, à l'article précédent, comment on détermine la section d'une surface par un plan vertical; lorsque le plan sécant P est incliné (*fig*. 429), on trace celles de ses horizontales qui ont les mêmes cotes que les courbes données; ces droites sont respectivement dans les plans horizontaux des courbes, et leurs rencontres appartiennent à la ligne d'intersection.

Quand une courbe perce le plan en deux points *m* et *n* et que celle qui la suit ne le coupe pas, l'intersection a une tangente horizontale. La construction qui présente le plus d'exactitude pour déterminer un point de la courbe entre *m* et *n* consiste à couper le plan et la surface par un plan vertical auxiliaire GQ.

On reconnaît facilement de quel côté de la ligne A*mn*C est le terrain coupé.

1059. *Intersection de deux surfaces topographiques*. — On obtient l'intersection de deux surfaces topographiques en faisant passer une ligne par les points de rencontre des courbes horizontales qui ont les mêmes cotes (*fig*. 428). Dans les parties où le tracé laisse quelque incertitude, on intercale des lignes de niveau, ou bien on fait des sections par un plan vertical auxiliaire.

Si l'on veut dresser, suivant la surface A, un terrain qui aurait la surface B, il faudra enlever des terres du côté de la ligne d'intersection où sont les petites hachures.

1060. *Intersection d'une droite et d'une surface topographique*. — On fait passer par la droite AB un plan quelconque et l'on détermine son intersection CD avec la surface (*fig*. 430). Le point cherché M est celui où la ligne CD coupe la droite AB.

Intersection d'une courbe et d'une surface topographique. — On trace des droites parallèles, dans une direction quelconque, par les points de la courbe AB qui

ont les mêmes cotes que les courbes de niveau de la surface (*fig.* 431). On prend les rencontres respectives de ces lignes; leur lieu CD est l'intersection de la surface et d'un cylindre qui contient la courbe donnée AB et auquel appartiennent, comme génératrices, les droites que nous venons de tracer. Les points cherchés sont ceux où les lignes AB et CD se coupent.

Lorsque les points de division de la courbe qui ont les mêmes cotes que les lignes de niveau de la surface ne sont pas immédiatement donnés, on les détermine en rectifiant la projection horizontale de chaque division et en opérant ensuite comme il est expliqué à l'article **263**.

Lignes d'égale pente.

1061. La pente d'une ligne en un point est la pente de sa tangente en ce point, ou la tangente trigonométrique de l'angle que cette droite fait avec le plan horizontal (art. **266**).

Une ligne est dite d'*égale pente* quand toutes ses tangentes sont également inclinées sur l'horizon. Une ligne d'égale pente devient droite quand on rectifie son cylindre projetant, et par suite ceux des points d'une telle courbe dont les cotes sont entières partagent sa projection en arcs dont les longueurs sont égales. Nous appellerons *intervalle* la longueur horizontale curviligne qui sépare deux points dont les hauteurs diffèrent de 1^m. La pente et l'intervalle sont réciproques (art. **266**).

Tracer sur une surface topographique, à partir d'un point déterminé A (*fig.* 433), *une courbe dont la tangente fasse un angle constant et donné avec le plan horizontal.*

Si la courbe doit être inclinée à $0^m,22$ de hauteur pour 1^m de base, sa pente sera $\frac{22}{100}$, et l'intervalle constant aura une longueur de $\frac{100^m}{22}$ ou $4^m,54$. Du point A comme centre, avec un rayon égal à $4^m,54$, on trace un arc de cercle qui coupe la courbe voisine au point B; puis, transportant le centre en ce point, on décrit un autre arc qui coupe la courbe suivante en D, et, continuant ainsi, on obtient la ligne AE qui satisfait aux conditions du problème. Les arcs AB, BC, CD, etc., sont un peu plus grands que leurs cordes, et par suite les intervalles sont tous plus grands que $4^m,54$; ils ne sont pas d'ailleurs parfaitement égaux. On peut, pour avoir égard à cette circonstance, diminuer un peu les rayons, surtout dans les parties où la projection de la ligne présente une courbure assez grande.

Le problème que nous venons de résoudre est utile pour tracer sur un terrain escarpé un sentier d'une pente déterminée.

Si le cercle décrit de l'un des centres ne rencontrait pas la courbe suivante, la

zone comprise entre les deux lignes horizontales serait trop inclinée pour qu'on pût y tracer une ligne ayant la pente donnée.

En général, un cercle, tel que celui qui a son centre en C, coupe la courbe voisine en deux points F et D; il passe donc, par un point, deux courbes ayant la pente donnée. Si, dans le tracé d'un sentier, on se trouve conduit à s'éloigner du point auquel on désire arriver, on peut, à un point C, abandonner la ligne suivie pour prendre l'autre ligne ayant la même pente. On dit qu'un sentier a des *lacets* quand il est ainsi établi suivant une ligne brisée.

1062. *Tracer sur une surface topographique une ligne d'égale pente entre deux points donnés* A *et* B (*fig.* 434). — Ce problème ne peut être résolu que par tâtonnement.

La distance verticale des points A et B est 5^m; on trouve que leur distance horizontale est à peu près 19^m; la pente doit donc être peu éloignée de $\frac{5}{19}$ et l'intervalle de $\frac{19^m}{5}$. Nous essayons d'abord une longueur de 4^m, et nous obtenons la courbe AD, puis, prenant des intervalles égaux à $4^m,5$, à $3^m,5$, à 3^m, nous traçons les courbes AG, AE et AF. Nous portons ensuite sur un axe ox des longueurs of, oe, od et og égales à 3^m, à $3^m,5$, à 4^m et à $4^m,5$, et nous élevons des ordonnées ff', ee', dd' et gg' égales aux longueurs $+$BF, $+$BE, $-$BD et $-$BG. La courbe qui passe par les points f', e', d' et g' coupe l'axe en un point b dont l'abscisse est l'intervalle de la ligne d'égale pente cherchée. Si le tracé de la courbe qui a cet intervalle ne conduit pas exactement au point B, on déplacera un peu les points obtenus sur les dernières lignes de niveau, de manière à satisfaire à cette condition.

On pourrait disposer la courbe d'erreur de manière qu'elle se trouvât sur la figure même, mais cela n'aurait aucun avantage.

Plans tangents.

1063. *Construire un plan tangent à une surface topographique en un point donné.*

Quand le point donné a est sur une courbe de niveau (*fig.* 432), on obtient immédiatement une horizontale du plan, en traçant la tangente aT à cette ligne. Pour trouver une autre droite qui soit contenue dans le plan, nous construisons le rabattement bAG de la section faite dans la surface par le plan vertical Lag perpendiculaire à la droite aT. La tangente AL à cette courbe est, dans l'espace, une ligne de plus grande pente du plan tangent. On détermine sans difficulté l'échelle de pente de ce plan.

Si les segments af et ae étaient égaux, leur longueur commune serait l'intervalle de l'échelle P.

1064. Pour étendre la construction au cas où le point donné *a* n'est pas sur une ligne de niveau, il suffit de construire la courbe intercalaire passant par ce point (*fig.* 439).

Quand on peut tracer par le point *a* une droite *mn* sensiblement normale aux courbes *mb* et *nc*, la tangente à la courbe intercalaire est perpendiculaire à *mn*; on l'obtient donc sans avoir besoin de déterminer cette ligne.

On se dispense généralement de construire la section par un plan vertical; on considère la ligne *mn* de la surface comme droite : le plan tangent contient alors les droites qui passent par les points *m* et *n* et qui sont parallèles à la tangente de la courbe intercalaire. Ces lignes *ml* et *nt* sont tangentes aux courbes *mb* et *nc* dans le cas où la droite *mn* les rencontre normalement.

1065. Lorsque l'on a déterminé l'intersection d'une surface par son plan tangent en un point, on peut construire les asymptotes de l'indicatrice de ce point comme tangentes à la courbe au point double.

Sur la *fig.* 432, la section verticale *b*G tourne sa concavité vers le sol, la tangente AL est extérieure, et les parties du terrain qui sont coupées par le plan tangent sont indiquées par de petites hachures.

Si la surface était convexe, les horizontales du plan ne rencontreraient pas les courbes de niveau qui ont respectivement les mêmes cotes.

D'après les suppositions qui ont été faites à l'article précédent pour la détermination du plan P (*fig.* 439), ce plan est tangent tout le long de la ligne *mn*, et par suite il n'y a pas de raison pour que le point double de l'intersection soit en *a* plutôt qu'en un autre point de *mn*. Pour se conformer aux hypothèses, il faudrait réunir les branches de l'intersection en *m* et les séparer en *n*.

1066. *Mener un plan tangent à une surface par une droite donnée* D (*fig.* 435).

Des points de division de la droite nous menons des tangentes aux courbes de niveau qui ont les mêmes cotes. Ces lignes sont des génératrices d'un conoïde oblique qui a pour plan directeur le plan horizontal, dont la droite D est la directrice rectiligne, et qui est circonscrit à la surface. Si la tangente FN à la courbe de contact AK, en un point F, rencontre la directrice D, le plan tangent au point F contiendra cette droite et sera le plan cherché. Au contraire, lorsque la tangente à la courbe AK, en un point J, ne rencontre pas la droite D, cette ligne ne peut avoir, dans le plan tangent au point considéré J, que le point *j* où elle coupe la génératrice J*j*.

Quand la directrice D et une tangente à la courbe AK sont dans un même plan, deux génératrices consécutives du conoïde sont parallèles; or, il est facile de voir quelle est à peu près la position de ces lignes : les génératrices qui passent par les points A et B se rencontrent en projection vers la gauche, celles qui passent par les points K et J convergent vers la droite; il y a donc entre ces deux

couples une droite FF_1 qui rencontre de côtés différents celle qui la précède CC_1 et celle qui la suit EE_1; cette droite est voisine des deux génératrices consécutives parallèles du conoïde, et par suite le point F est approximativement celui où le plan cherché touche la surface. La droite FF_1 est une ligne de niveau de ce plan dont l'échelle de pente est P.

Si l'on veut déterminer la position du point de contact avec plus d'exactitude, on pourra intercaler des courbes de niveau, ou mieux tracer la tangente FN à la courbe de contact au point F, construire la section du terrain par le plan vertical FN et lui mener une tangente du point N de la droite D. Nous n'avons pas fait cette construction, qui, en général, n'est pas nécessaire, eu égard à la nature des problèmes que l'on a à résoudre sur les surfaces topographiques.

La génératrice FF_1, parallèle à la génératrice infiniment voisine, est une arête du conoïde (art. **658**). Elle fait un angle maximum ou minimum avec la projection de la droite D (et avec toute autre droite du plan). On peut la déterminer en faisant glisser une équerre et comparant les positions des différentes génératrices réunies en couples consécutifs; on peut aussi tracer une parallèle LT à D, et chercher le point de division F_1 qui sépare deux segments E_1F_1 et FG_1, l'un plus grand, l'autre plus petit, que les intervalles de la droite D [1].

On examinera la position du plan tangent par rapport à la surface, comme il a été dit plus haut (art. **1065**) : nous ne reviendrons pas sur cette question.

1067. Quand la droite D est peu inclinée, les points où elle rencontre les plans des différentes courbes horizontales sont presque tous hors de la feuille de dessin. Il serait d'ailleurs difficile de faire une réduction d'échelle, vu le grand nombre des courbes. Dans ce cas, on préfère prendre pour plan directeur du conoïde un plan oblique à l'horizon : on fait dans la surface une série de sections par des plans parallèles à celui qui a été pris pour plan directeur, et l'on mène à chacune d'elles une tangente du point où son plan est percé par la directrice rectiligne. Nous allons donner un exemple de cette construction.

On trace une série de droites AB, CE, FH, ... (*fig.* 436) parallèles et équidistantes, et on les considère comme les projections des horizontales d'un plan. Pour plus de commodité, on fait passer l'une d'elles par un point A de la droite donnée D, ayant pour cote un nombre entier 16; les autres sont cotées, à partir de celle-là, comme les courbes horizontales. On construit l'intersection *mn* de ce plan et de la surface, et on lui mène du point A une tangente $A\alpha$ qui est une génératrice du conoïde. On transporte ensuite le plan sécant parallèlement à lui-même; pour cela, on augmente les cotes de toutes les horizontales AB, CE, ...

---

[1] D'après des traditions conservées dans le corps du Génie militaire, la construction que nous venons d'exposer est due à Meusnier. Ce géomètre, dont nous avons déjà parlé plusieurs fois, était général du Génie.

d'une quantité égale à l'équidistance des plans des courbes horizontales, c'est-à-dire à l'unité, et on cherche le point de rencontre a du nouveau plan avec la droite D (art. **275**); on détermine ensuite la section kl de la surface et on lui mène une tangente $a\beta$ du point a.

En portant sur D des longueurs aa_1, a_1a_2, ... égales à Aa, on a les points où la droite D de l'espace coupe le plan sécant lorsque l'on augmente successivement les cotes de ses horizontales d'une unité. Quand on a obtenu les génératrices du conoïde qui correspondent aux différentes sections, on cherche celle de ces droites qui rencontre de côtés différents les deux entre lesquelles elle est comprise : son point de contact β est celui où le plan cherché touche la surface. On détermine la cote du point β (art. **1056**), et l'on fait passer un plan par ce point et par la droite D. Pour cette dernière opération, on calcule les cotes des points a et β, on cherche sur la droite $a\beta$ la position du point ξ dont la cote est 17, et, le joignant au point I, qui a la même cote sur la droite D, on a une horizontale du plan.

Il est bon de tracer les droites AB, CE, FH, ... perpendiculaires à D (ou à peu près); alors, pour une inclinaison donnée des plans sécants, leur angle avec la droite D a sa valeur maximum, l'intervalle aa_1 est minimum, et on a de nombreux points de division dans le cadre du dessin.

1068. La construction expliquée dans l'article précédent est applicable lorsque la droite donnée D est horizontale, mais on peut alors opérer d'une manière plus simple (*fig.* 437).

Nous menons aux différentes courbes de niveau des tangentes parallèles à la droite D ; ces lignes appartiennent à un cylindre circonscrit à la surface, et on aura résolu le problème si l'on mène à ce cylindre un plan tangent par la droite D, parallèle aux génératrices. Nous prenons un plan vertical auxiliaire EY : la tangente menée du point E de la droite G à la trace du cylindre sur ce plan est dans le plan cherché. On aurait donc facilement le résultat en construisant la section du cylindre par le plan EY; mais une construction, qui appartient comme la précédente à la méthode de Meusnier, va nous permettre de déterminer sans cela une position approchée de la génératrice de contact.

Nous graduons la partie EX de la projection D, de manière qu'elle représente une ligne inclinée quelconque passant par le point E de la droite donnée D dont nous connaissons la cote $58^{\text{m}},50$; puis nous joignons par des droites les points où les tangentes rencontrent EY, avec ceux qui ont les mêmes cotes sur EX. Si AB est une arête du conoïde oblique formé dans l'espace par ces droites, la tangente à la directrice curviligne en B rencontrera la directrice rectiligne EX au point E de la droite D. Les considérations indiquées à l'article **1066** font voir que la droite AB, qui rencontre de côtés différents les génératrices voisines FG et HJ, est peu éloignée de l'arête. La tangente BC est la génératrice de contact sur

le cylindre : le plan cherché contient cette horizontale et sa parallèle D; il est par conséquent facile de tracer et de graduer son échelle de pente P.

Pour déterminer la droite AB, on peut tracer une parallèle E_1X_1 à EX, et chercher le point de division A_1 qui sépare deux segments A_1F_1 et A_1H_1, l'un plus grand et l'autre plus petit que les intervalles de la droite EX.

Cônes et cylindres circonscrits.

1069. *Déterminer la courbe de contact et la trace horizontale d'un cône circonscrit à une surface donnée, connaissant le sommet* S *de ce cône* (*fig.* 438).

Nous traçons par le point S une droite SD, et nous la considérons comme la projection d'une génératrice. Pour avoir le point où cette génératrice touche la surface, nous menons dans une direction arbitraire une seconde droite SB, nous la graduons de manière qu'elle représente une droite passant par le point S de l'espace; nous joignons par des droites respectivement ses points de division à ceux où la droite SD rencontre les horizontales ayant les mêmes cotes, et nous cherchons parmi ces lignes la droite MC qui fait un angle maximum ou minimum avec SD : la droite MC est une arête du conoïde horizontal dont les directrices sont la droite SB et la section de la surface par le plan vertical SD. Le plan tangent à cette surface gauche le long de l'arête MC contient les droites MC et BS. La droite qui passe par les points S et M s'y trouve tout entière ; elle touche donc la surface au point M, et par suite ce point appartient à la courbe de contact cherchée.

Pour avoir la trace du cône sur un plan horizontal déterminé, celui qui est à la cote 30, il suffit de mener par le point A, qui a cette cote sur la droite SB, une droite AN parallèle à CM : cette droite est l'horizontale passant par A du plan tangent en M; elle fait trouver le point cherché N.

La droite auxiliaire SB étant tracée et graduée, on déterminera ainsi le point de contact et la trace horizontale de chaque génératrice dont on se donnera la projection. On pourra obtenir ces points en faisant glisser l'équerre et sans tracer aucune ligne.

La trace du cône a des branches infinies lorsque la courbe de contact a des points à la même hauteur que le sommet S. On détermine facilement ces points. A chacun d'eux le plan tangent à la surface topographique touche le cône le long d'une génératrice horizontale, et son intersection avec le plan de la trace est l'asymptote d'une branche infinie de cette courbe.

Cylindre circonscrit. — La construction que nous venons d'expliquer est applicable au cas du cylindre circonscrit. La droite de parallélisme remplace la

droite SB; on trace diverses droites parallèles à sa projection et l'on opère sur chacune d'elles comme nous l'avons fait sur la droite SD.

1070. Quelquefois on n'a pas besoin de connaître la totalité de la ligne de contact du cône circonscrit, mais seulement l'endroit où elle coupe une zone donnée, par exemple celle qui est comprise entre les courbes horizontales dont les cotes sont 31 et 32 (*fig.* 438). Dans ce cas, après avoir établi comme précédemment les droites SB et SD, on tracera les génératrices du conoïde situées dans les plans qui limitent la zone, c'est-à-dire les droites GE et HF. On donnera ensuite diverses positions à la projection horizontale SD, en la faisant tourner autour du point S, et l'on opérera de la même manière sur chacune d'elles. Si le sens de la convergence des génératrices qui passent aux points G et H vient à changer, on sera assuré qu'elles sont parallèles pour une position intermédiaire de la ligne SD, et alors la droite EF, sensiblement tangente à la zone, passera par le point S de l'espace et sera une génératrice du cône circonscrit.

En général la méthode de Meusnier ne peut être avantageusement employée que quand les formes des courbes horizontales ne se modifient pas d'une manière brusque. Dans le cas contraire, pour déterminer les génératrices d'un cône circonscrit, il faut faire des sections par des plans verticaux contenant le sommet donné, et leur mener des tangentes de ce point.

1071. *Exercice pour la détermination d'un cône circonscrit.* — Nous présentons sur la *Pl. XLI* la courbe de contact et la courbe de section d'un cône circonscrit à une surface topographique. Le sommet S est à la cote $133^{m},50$ à $1^{m},50$ au-dessus du point culminant du sol.

En général, les courbes horizontales se succèdent avec une grande concordance de formes, et par suite on peut employer la méthode de l'article **1069**, qui est très expéditive. Dans la partie voisine du point G_4, les formes des courbes sont assez différentes ; il faut alors recourir à la méthode des sections par des plans verticaux : les résultats qu'elle donne n'ont pas d'ailleurs une grande précision, en cet endroit, car les formes du terrain sont peu accusées.

Les considérations que nous avons présentées dans le IIIe Chapitre du Livre VIII, pour les arcs réels et les arcs virtuels des courbes de contact et de section, font comprendre comment les diverses parties de ces lignes se rencontrent et se succèdent.

La ligne $AnGmm_1G_1n_1H$ est une courbe de contact : en lui menant des tangentes du point S, on détermine les points limites G et G_1 (art. **892**) : l'arc Gmm_1G_1 est seul utile. La courbe de section qpp_1q_1B passe aux points limites ; elle y touche la courbe de contact et elle y est divisée comme celle-ci en arcs réels et en arcs virtuels. Nous retrouvons la même disposition aux points G_2, G_3 et G_4 situés sur d'autres branches de la courbe de contact.

La ligne G_3C est un arc réel de la courbe d'intersection de la surface par le

cône circonscrit. Une partie réelle *ed* de la courbe de contact rencontre cet arc en C, et devient utile à ce point qui est analogue au point C de la *fig.* 358. Ainsi, la tangente *hf* est la projection d'une génératrice double du cône. Les mêmes circonstances se présentent au point C_1.

Un spectateur placé au point S ne verrait pas les parties de terrain situées au delà des lignes qGG_1B et $q_2G_2G_3CdG_4$.

Lignes de plus grande pente.

1072. De toutes les courbes tracées sur une surface et qui se croisent à un point, la moins inclinée en ce point est celle dont la tangente est la ligne de plus grande pente du plan tangent, et qui par suite rencontre à angle droit la courbe de niveau. On a donc une *ligne de plus grande pente d'une surface,* en traçant une courbe qui, en chaque point, rencontre normalement la ligne de niveau, c'est-à-dire une *trajectoire orthogonale des courbes horizontales.*

Il ne passe par un point déterminé d'une surface qu'une seule ligne de plus grande pente, car on ne peut mener en un point qu'une normale à une courbe. Cette règle comporte plusieurs exceptions, comme nous allons le voir.

1073. *Surfaces de révolution.* — Quand la surface considérée est de révolution autour d'un axe vertical, les méridiens sont les lignes de plus grande pente. Ces courbes se coupent, en général, sur l'axe. Un point de rencontre doit être regardé comme un cercle horizontal évanouissant, et par suite tout plan contenant l'axe est normal à la ligne de niveau que représente ce point.

Suivant que l'axe coupe la méridienne normalement ou obliquement, la surface a un plan tangent unique, ou en possède une infinité; mais la disposition des lignes de plus grande pente est toujours la même.

1074. *Surfaces dont les courbes horizontales sont des ellipses homothétiques ayant leurs centres sur une même verticale.* — Supposons que l'ellipse AD (*fig.* 447) soit la projection de la courbe de niveau sur laquelle se trouve le point de départ M; sur le plan horizontal la normale MT est tangente à la ligne de plus grande pente, et le point M_1 où elle coupe l'ellipse voisine A_1D_1 appartient à cette ligne. Le point par lequel on peut considérer que la projection de la ligne de plus grande pente est décrite rencontre ainsi successivement toutes les ellipses de la série ; il arrive donc à leur centre commun O, que l'on doit regarder comme étant leur limite.

La droite MT rencontre le grand axe en un point T de l'abscisse OP; le point M_1 est donc à une moindre distance du grand axe AD que le point N homologue de M. Nous voyons ainsi que le rayon vecteur OM fait des angles de plus en plus petits avec la droite OD lorsque le point mobile se rapproche du centre O,

A ce point la trajectoire est normale à l'ellipse infiniment petite, et par suite tangente à l'un de ses axes. Il résulte de là qu'une ligne de plus grande pente, de quelque point qu'elle parte, passe au centre commun des ellipses, tangentiellement à la droite des grands axes. Il faut excepter le cas où le point donné appartient à la droite des petits axes, car cette ligne est évidemment une trajectoire orthogonale des ellipses.

1074 *a*. Une ellipse quelconque de la série peut être représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = n,$$

dans laquelle a et b sont des longueurs déterminées, et n un coefficient arbitraire.

On obtient, en différentiant,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

L'équation différentielle de la trajectoire orthogonale est donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Intégrant, et appelant x_1 et y_1 les coordonnées du point de départ, on a

$$a^2 \log \frac{x}{x_1} - b^2 \log \frac{y}{y_1} = 0.$$

Telle est l'équation de la projection de la ligne de plus grande pente; x et y doivent toujours avoir respectivement les mêmes signes que x_1 et y_1; chaque ligne s'arrête d'une part au point O, de l'autre à l'infini. Les courbes qui traduisent en Géométrie les fonctions logarithmiques présentent, en général, des singularités de ce genre. Nous avons déjà signalé cette circonstance dans une Note de l'article 85.

1074 *b*. La *fig*. 441 représente les projections de plusieurs lignes de plus grande pente. Nous les avons obtenues en traçant un assez grand nombre des ellipses de la série, et construisant la normale à chacune d'elles au point où elle est rencontrée par la normale précédente. Nous avons d'ailleurs numériquement vérifié les coordonnées de quelques points à l'aide de la formule donnée à l'article **1074** *a*.

1075. Si dans l'espace la directrice des ellipses est l'ellipse $A'_1 O' B'_1 O''$, dont un des axes est sur la verticale du point O (*fig*. 442), la surface est un ellipsoïde scalène, et les trajectoires sont parasites dans les parties situées au delà de l'ellipse $A_1 B_1$ qui forme le contour apparent (*fig*. 441). Quand la directrice est une hyperbole $A' A'' B' B''$ (*fig*. 443), ayant pour axe non transverse la verticale du point O, la surface est un hyperboloïde gauche et les trajectoires sont parasites dans les parties situées à l'intérieur de l'ellipse de gorge $A_2 B_2$ (*fig*. 441).

On détermine facilement les projections verticales des lignes de plus grande pente, en relevant de la projection horizontale les points où ces courbes rencontrent quelques ellipses.

1076. *Surfaces dont les courbes horizontales sont des hyperboles homothétiques ayant leurs centres sur une verticale.* — Sur le plan horizontal, les droites OL et OP, asymptotes communes des hyperboles (*fig.* 444) forment un système géométrique qui appartient à la série de ces courbes. Si nous prenons sur l'asymptote OL le point de départ M, l'élément de la trajectoire sera dirigé sur la perpendiculaire GF, et l'on voit, d'après le sens de la courbure des hyperboles, que, d'un côté comme de l'autre, la trajectoire s'éloignera du point O. Les axes sont les seules projections des lignes de plus grande pente qui passent à ce point.

A partir du point M situé sur l'asymptote OL, la trajectoire se rapproche constamment d'un côté de l'axe AB, de l'autre de l'axe OY; on reconnaît facilement, à l'aide de son équation, qu'elle a ces droites pour asymptotes.

1076*a*. Dans le cas qui nous occupe, a^2 est négatif. Si nous mettons son signe en évidence, l'équation que nous avons trouvée à l'article 1074*a* deviendra

$$a^2 \log \frac{x}{x_1} + b^2 \log \frac{y}{y_1} = 0.$$

x et y sont de mêmes signes que x_1 et y_1 : nous pouvons les supposer positifs.

Quand x est supérieur à x_1, y est inférieur à y_1, et réciproquement. Si l'une des coordonnées croît indéfiniment, l'autre décroît indéfiniment : les deux axes sont donc asymptotes de la courbe. Chaque trajectoire se termine à l'infini sur chaque axe.

1077. Nous avons représenté sur les *fig.* 445 et 446 les projections verticales d'un hyperboloïde et d'un cône dont les sections horizontales sont les hyperboles dessinées sur la *fig.* 444. Il est facile de construire les projections verticales des lignes de plus grande pente d'après leurs projections horizontales. Ces courbes dans l'espace sont asymptotes de l'hyperbole principale A′B′A″B″ pour l'hyperboloïde, et des génératrices A″B′, B″A′ pour le cône.

A chacun des sommets O′ et O″ de l'hyperboloïde il passe deux lignes de plus grande pente, qui sont l'hyperbole principale A′B′A″B″ et l'ellipse de gorge. Ces deux courbes divisent les autres lignes de plus grande pente en quatre groupes. Les lignes d'un même groupe sont asymptotes les unes des autres des deux côtés, et de celles d'un groupe voisin d'un côté seulement. La hauteur du sommet O′ est un maximum pour l'ellipse de gorge, et un minimum pour l'hyperbole A′B′.

Sur le cône les lignes de plus grande pente forment également quatre groupes qui sont séparés par les deux génératrices A″B′ et B″A′.

1078. *Indication des diverses dispositions que peuvent présenter les lignes de plus grande pente aux points où le plan tangent est horizontal.* — En remplaçant la sur-

face considérée par une surface du second ordre osculatrice en un de ses sommets, on reconnaît, pour chaque forme de l'indicatrice, comment les lignes de plus grande pente sont disposées aux points où le plan tangent est horizontal.

Si l'indicatrice est un cercle, la surface osculatrice est un ellipsoïde de révolution, et dans chaque azimut une ligne de plus grande pente arrive au point (art. **1073**).

Si l'indicatrice est une ellipse, la surface osculatrice est un ellipsoïde scalène, et une infinité de lignes de plus grande pente arrivent au point; une d'elles est tangente à la section principale qui a le plus petit rayon de courbure, et toutes les autres à celle qui a le plus grand rayon (art. **1075**).

Si l'indicatrice est une hyperbole, deux lignes de plus grande pente se croisent au point; elles sont respectivement tangentes aux sections principales. La hauteur du point est un maximum sur l'une d'elles et un minimum sur l'autre (**1077**). On appelle *cols* les points où le plan tangent est horizontal, et pour lesquels l'indicatrice est une hyperbole.

Quand l'indicatrice est composée de deux droites, la surface osculatrice est un cylindre, et l'on reconnaît facilement qu'une seule ligne de plus grande pente passe au point.

1079. *Surfaces dont les courbes horizontales sont des ellipses identiques coupées suivant un de leurs axes par un plan vertical.*

Les projections horizontales des lignes de plus grande pente sont les trajectoires orthogonales d'une série d'ellipses identiques qui ont un de leurs axes sur une même droite VX (*fig.* 449). Si l'on prend pour point de départ un point M de l'une des ellipses DD_1, la tangente à la trajectoire sera dirigée sur la normale MT; en appelant γ l'angle PTM qu'elle fait avec l'axe VX, a et b les longueurs des demi-axes des ellipses, et y l'ordonnée MP, on a

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{ay}{b\sqrt{b^2 - y^2}}.$$

Il est facile de voir que le point mobile par lequel on peut supposer la trajectoire décrite se rapproche constamment de l'axe lorsque, quittant sa position initiale, il s'avance vers la gauche; son ordonnée diminue donc indéfiniment, et, en vertu de la formule que nous venons d'écrire, l'angle γ diminue aussi, y et γ sont nuls en même temps; mais alors le point mobile a une abscisse infinie, car la seule trajectoire qui passe par un point de l'axe à distance finie est l'axe lui-même; la droite VX est donc asymptote de la courbe.

Si maintenant nous supposons que le point M se meuve vers la droite, son ordonnée y augmentera progressivement, et l'on voit par la formule que, quand il sera en un point O de la droite LO dont l'ordonnée est b, γ aura atteint la

valeur 90°; le centre de l'ellipse se trouvera alors en A. Au delà du point O la trajectoire a un rebroussement; car, en considérant l'ellipse quand son centre occupe sur l'axe les deux positions voisines de A, en deçà et au delà de ce point, on reconnaît que les deux éléments qui aboutissent au point O ont des positions symétriques par rapport à la normale OA de l'ellipse. Enfin la courbe a une seconde branche OS asymptote de VX, comme la première.

En prenant successivement pour points de départ les différents points de la droite OL, on obtient les diverses trajectoires qui sont évidemment identiques. De l'autre côté de l'axe on trouve de nouvelles trajectoires superposables aux premières et placées symétriquement à elles.

1079*a*. On peut représenter l'une quelconque des ellipses par l'équation

$$\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

c étant un coefficient arbitraire.

On obtient, par la différentiation,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2(x-c)}{a^2 y},$$

et, en éliminant c,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b\sqrt{b^2-y^2}}{ay}.$$

L'équation différentielle de la trajectoire orthogonale est par conséquent

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay}{b\sqrt{b^2-y^2}}.$$

On trouve, en intégrant,

$$\frac{a}{b}x=\sqrt{b^2-y^2}+b\log\frac{y}{b+\sqrt{b^2-y^2}}.$$

Nous n'ajoutons pas de constante, parce que, toutes les trajectoires étant identiques, on peut considérer uniquement celle qui a son point de rebroussement sur l'axe des ordonnées, et pour laquelle par suite la valeur o de x correspond à la valeur b de y.

Pour avoir la courbe dans toute son étendue, il faut donner le double signe au radical; mais l'on voit facilement que son signe détermine celui du second membre de l'équation, sans avoir aucune influence sur sa grandeur absolue. On peut donc prendre le radical positivement, et attribuer le double signe au premier membre [1].

1080. Quand le lieu des centres des ellipses dans l'espace est une droite $A'A'_1$ (*fig.* 448), la surface est un cylindre, et l'on obtient la ligne de plus grande pente en prenant son intersection avec le cylindre vertical PMONQ. La construc-

---

[1] M. Lefort, ingénieur des Ponts et Chaussées, a étudié une courbe analogue à celle qui vient de nous occuper, dans un Mémoire sur les arches biaises (*Annales des Ponts et Chaussées;* 1839).

tion donne les deux courbes P′O′Q′ et U′GO′ES′; mais il ne peut passer qu'une ligne de plus grande pente par le point (O, O′). La forme de la courbe U′O′S′ montre qu'elle n'est pas la projection d'une ligne de plus grande pente du cylindre, car sa tangente est parallèle à la ligne de terre en deux points E et G, et aucun des plans tangents à la surface n'est horizontal.

Pour ne laisser subsister aucun doute sur cette question, nous avons fait le développement du cylindre; la courbe P″O″Q″, transformée de la ligne (POQ, P′O′Q′), coupe à angle droit les sinusoïdes dans lesquelles se changent les sections horizontales; mais la courbe U″O″S″, transformée de l'autre partie de l'intersection, rencontre les sinusoïdes sous toutes les inclinaisons. Les deux courbes se rejoignent d'ailleurs à l'infini avec les mêmes asymptotes.

Eu égard au sens de l'inclinaison de la tangente commune TR, la droite O′O″ ne coupe la ligne P″Q″ qu'au point O″, tandis qu'elle rencontre la ligne U″S″ en deux autres points. Ces courbes ont donc des formes essentiellement différentes, et par suite la seconde ne peut pas être une trajectoire orthogonale d'une certaine série de sections parallèles du cylindre.

1080*a*. Nous conservons les notations adoptées à l'article **1079*a***, et nous appelons α l'angle $C'_2O'A'_4$ que les génératrices du cylindre font avec le plan horizontal. L'équation de cette surface est alors

$$(1)\qquad \frac{(z - x \operatorname{tang}\alpha)^2}{a^2 \operatorname{tang}^2\alpha} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nous avons trouvé que l'équation de la trajectoire POQ est

$$(2)\qquad \pm\frac{a}{b}x = \sqrt{b^2 - y^2} + b\log\frac{y}{b + \sqrt{b^2 - y^2}}.$$

En éliminant y, on obtient l'équation suivante de la projection verticale de l'intersection des deux cylindres :

$$\pm\frac{a^2}{b^2}x\sin\alpha = z\cos\alpha - x\sin\alpha + a\sin\alpha\log\sqrt{\frac{a\sin\alpha - (z\cos\alpha - x\sin\alpha)}{a\sin\alpha + (z\cos\alpha - x\sin\alpha)}}.$$

Nous prenons pour axes des abscisses et des ordonnées les droites O′A′ et O′O″ : en appelant x' et z' les nouvelles coordonnées, nous aurons

$$x = x'\cos\alpha - z'\sin\alpha,\quad x' = z\sin\alpha + x\cos\alpha,$$
$$z = x'\sin\alpha + z'\cos\alpha,\quad z' = z\cos\alpha - x\sin\alpha;$$

et l'équation de la projection verticale de l'intersection deviendra

$$\pm\frac{a^2}{b^2}(x'\sin\alpha\cos\alpha - z'\sin^2\alpha) = z' + a\sin\alpha\log\sqrt{\frac{a\sin\alpha - z'}{a\sin\alpha + z'}}.$$

Elle se décompose en deux :

$$(3)\qquad \frac{a^2 \sin\alpha \cos\alpha}{b^2} x' = \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\alpha\right) z' + a \sin\alpha \log\sqrt{\frac{a\sin\alpha - z'}{a\sin\alpha + z'}},$$

$$(4)\qquad -\frac{a^2 \sin\alpha \cos\alpha}{b^2} x' = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\sin^2\alpha\right) z' + a \sin\alpha \log\sqrt{\frac{a\sin\alpha - z'}{a\sin\alpha + z'}}.$$

Il est facile de trouver l'équation de la transformée par développement, dans le cas où le cylindre est de révolution. On a alors

$$b = a \sin\alpha,$$

et les équations (3) et (4) deviennent

$$(5)\qquad x' \cot\alpha = 2z' - b \log\sqrt{\frac{b + z'}{b - z'}},$$

$$(6)\qquad x' \cot\alpha = b \log\sqrt{\frac{b + z'}{b - z'}}.$$

Si nous rapportons les transformées aux droites O″D″ et O″O′, on aura

$$x' = x'', \quad z' = b \sin\frac{z''}{b}.$$

En portant ces valeurs de x' et de z' dans les équations (5) et (6), on trouve pour équations des transformées

$$(7)\qquad x'' \cot\alpha = 2b \sin\frac{z''}{b} - b \log\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{z''}{2b}\right),$$

$$(8)\qquad x'' \cot a = b \log\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{z''}{2b}\right).$$

L'équation d'une sinusoïde transformée d'une section horizontale, telle que C′B″, est, en supposant toujours que le cylindre soit de révolution,

$$x'' \operatorname{tang}\alpha + b \sin\frac{z''}{b} + C = 0.$$

La différentiation donne

$$\frac{dz''}{dx''} = -\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\cos\frac{z''}{b}};$$

et l'on a pour la trajectoire orthogonale

$$\frac{dz''}{dx''} = \cot\alpha \cos\frac{z''}{b}.$$

En intégrant cette équation différentielle on trouve l'équation (8). Il résulte de là que les équations (4), (6) et (8) se rapportent à la ligne de plus grande pente, et les équations (3), (5) et (7) à la courbe compagne.

1081. *Conoïdes dont le plan directeur est horizontal.* — Quand les génératrices

d'une surface sont des droites horizontales, les projections des lignes de plus grande pente sont les trajectoires orthogonales d'une série de droites, et par suite des développantes de leur enveloppe.

Si le conoïde est droit, les trajectoires orthogonales sont des cercles. On conclut de là que les lignes de plus grande pente d'une surface de vis à filets carrés dont l'axe est vertical sont des hélices génératrices.

Hélicoïdes. — Pour une surface de vis à filets triangulaires, la projection d'une ligne de plus grande pente est la trajectoire orthogonale d'une série de spirales d'Archimède identiques et ayant leurs sommets en un même point. Cette courbe a donc une sous-tangente constante, et par suite elle est une spirale hyperbolique (art. **1024**). Dans l'espace, les lignes de plus grande pente forment deux groupes qui appartiennent respectivement à la nappe supérieure et à la nappe inférieure. L'axe les sépare et leur est asymptote aux unes d'un côté, et aux autres de l'autre.

1082. Dans la plupart des surfaces que nous venons d'étudier, et qui sont des plus simples de la Géométrie, les lignes de plus grande pente diffèrent d'une manière essentielle des courbes que nous avions eu l'occasion d'examiner, car elles ont des points d'arrêt à distance finie ou à l'infini. Elles sont, en général, réparties en groupes séparés par des lignes de plus grande pente qui sont soumises aux lois ordinaires de la continuité.

CHAPITRE II.

TABLEAUX GRAPHIQUES.

Emploi des surfaces topographiques pour remplacer les tables à double entrée.

1083. Les tables numériques sont à simple entrée ou à double entrée, suivant que les nombres qu'elles font connaître dépendent d'une seule variable ou de deux variables distinctes. Les premières, telles que les Tables de sinus, se composent de deux colonnes parallèles contenant des nombres qui se correspondent un à un; les autres, telles que celle qu'on attribue vulgairement à Pythagore, se divisent en colonnes longitudinales et en colonnes transversales, qui répondent respectivement aux différentes grandeurs des deux variables ou des deux *arguments,* car c'est ainsi qu'on les appelle. Le nombre qui correspond à des valeurs déterminées des arguments se trouve dans la case commune à leurs colonnes.

1084. On remplace souvent les Tables à simple entrée par des courbes planes, en considérant les nombres des deux colonnes comme des abscisses et des ordonnées. Cette substitution permet de résoudre graphiquement divers problèmes; elle a d'ailleurs l'avantage de faire apprécier d'un coup d'œil les relations de grandeur exprimées par la Table (¹).

Nous avons tracé, sur la *fig.* 451, une courbe propre à remplacer une Table de logarithmes vulgaires pour les nombres compris entre 1 et 10; les abscisses sont les logarithmes des nombres représentés par les ordonnées, ces longueurs étant respectivement mesurées aux échelles de 5^{cm} et de 5^{mm} pour un. Quand un nombre est dans les limites des ordonnées, l'arc AB fait trouver son logarithme; s'il est plus grand que 10 ou plus petit que 1, on obtient encore son logarithme à l'aide de la courbe, en le multipliant ou en le divisant par une puissance de 10, et donnant à la caractéristique une grandeur convenable.

Au lieu de construire la *logarithmique* AB, on peut la déterminer par sa projection cotée X'Y'. Une simple droite ainsi graduée fait connaître le logarithme d'un nombre donné, ou le nombre qui correspond à un logarithme connu.

Toute Table à simple entrée peut être remplacée, de cette manière, par une droite convenablement cotée ou graduée.

1085. *Tableau propre à remplacer la Table de Pythagore.* — On peut remplacer d'une manière analogue une Table à double entrée par une surface : il suffit de considérer les deux arguments et le nombre qu'ils déterminent comme trois coordonnées. Ainsi, en appelant x et y deux nombres, et z leur produit, la Table de Pythagore aura pour expression analytique l'équation

$$z = xy,$$

et pour expression géométrique le paraboloïde qu'elle représente. En donnant

(¹) On réunit quelquefois sur un Tableau plusieurs courbes de même nature, de manière à rendre sensible la comparaison des phénomènes, des fonctions ou des mouvements qu'elles représentent. L'atlas de Berghaus contient plusieurs Tableaux de ce genre.

Dans le service de l'exploitation des chemins de fer, on emploie, pour représenter la marche des trains, des Tableaux sur lesquels les temps forment les abscisses, et les distances itinéraires les ordonnées. La vitesse d'un train étant supposée uniforme, sa marche est indiquée, entre deux stations, par une ligne droite. On voit immédiatement sur ces Tableaux les heures et les lieux où chaque train en croise ou en dépasse d'autres.

Nous croyons aussi devoir mentionner des Tableaux graphiques d'une nature différente; nous voulons parler de ces Cartes géographiques qui sont destinées à rendre sensibles les résultats de certaines recherches statistiques. Sur les unes, les routes sont indiquées avec des largeurs variables et proportionnelles au nombre des voyageurs qui les ont parcourues dans une année; sur d'autres, chaque port de mer est représenté par un cercle dont la surface est dans un rapport déterminé avec le tonnage des navires qui l'ont fréquenté, etc. M. Minard, inspecteur général des Ponts et Chaussées, a publié le premier des Cartes de ce genre; il en a fait paraître un grand nombre, toutes fort intéressantes. (*Voir* la Notice de M. Minard : *Des Tableaux graphiques et des Cartes figuratives;* 1861.)

successivement à z différentes valeurs, on aura des courbes horizontales de cette surface : ce seront des hyperboles équilatères et homothétiques que l'on pourra facilement dessiner (*fig.* 450).

Le produit de deux nombres tels que 5 et 8 est la cote du point dont ils sont les coordonnées. Quand le point se trouve sur une courbe tracée, on a immédiatement sa cote; dans le cas contraire, on recourt aux procédés de l'article **1055**, ou plutôt on fait une interpolation à vue, car, en général, on n'emploie les Tableaux graphiques que quand ce dernier procédé peut être adopté sans inconvénient.

Le même Tableau peut servir pour faire des divisions. Ainsi, le quotient de 40 par 8 est l'ordonnée de celui des points de l'hyperbole 40 dont l'abscisse est 8. Si le nombre à diviser avait été compris entre les cotes de deux hyperboles tracées, il aurait été nécessaire de construire des courbes intercalaires. En général, un Tableau qui contient une série de lignes de niveau de la surface représentée par une équation à trois variables peut servir à déterminer l'une quelconque de ces quantités quand on connaît les deux autres.

1086. *Tableau des températures moyennes à Halle*. — Lorsqu'une Table à double entrée n'est pas l'expression d'une loi mathématique connue, la construction du Tableau graphique propre à la remplacer exige quelques précautions particulières que nous allons expliquer sur un exemple.

Kaemtz, après avoir fait de nombreuses observations thermométriques à Halle, a dressé une Table qui fait connaître la température moyenne de cette ville, suivant l'heure du jour et le mois de l'année. La *fig.* 453 reproduit sous une forme graphique les résultats de ce Tableau. On y voit des courbes d'égale température rapportées à deux axes dont les divisions correspondent, pour l'un, aux mois de l'année, pour l'autre, aux heures du jour. La verticale du mois de mai rencontre l'horizontale de 5^h du matin un peu au delà de la courbe cotée 9; la température moyenne indiquée pour ce mois et cette heure est donc un peu supérieure à 9°; le Tableau de Kaemtz donne 9°,05.

Pour construire ce Tableau, après avoir pris des grandeurs arbitraires pour représenter les heures, les mois et les degrés de température, on a considéré successivement les différentes colonnes horizontales de la Table numérique, et l'on a tracé la courbe que chacune d'elles représente, en la rapportant à deux axes rectangulaires Ax et Az. On a ainsi la ligne qui indique la température moyenne des différents mois pour une même heure, ou la section de la surface par un plan perpendiculaire à l'axe des heures. Pour éviter la confusion, on n'a conservé que huit des vingt-quatre courbes ainsi obtenues. On a tracé ensuite la droite horizontale qui correspond à un degré déterminé du thermomètre, et, rapportant sur le Tableau ses intersections avec les courbes, on a obtenu les points où une ligne d'égale température rencontre les différentes droites horaires.

Les points ainsi déterminés suffisent, en général, pour le tracé des lignes de niveau; cependant, dans les parties de ces courbes où la tangente est parallèle à l'axe des mois, il existe une petite incertitude que l'on a fait disparaître en construisant une section par un plan vertical correspondant au mois de juillet.

1087. Les ondulations des courbes horizontales font connaître toutes les circonstances de la variation de la température aux différentes heures du jour et aux différentes époques de l'année. Le point culminant de la surface est aux environs du mois de juillet et de 3^h après midi; c'est un maximum absolu. Le point le plus bas, minimum absolu, est en janvier entre 6^h et 7^h du matin. Entre 1^h et 2^h de l'après-midi, en janvier, se trouve un col qui indique un minimum pour les mois et un maximum pour les heures. Un autre col est entre juillet et août vers 3^h du matin.

Si l'on unit par un trait continu la suite des points de contact des courbes de niveau avec leurs tangentes parallèles à l'axe des heures, on aura les lignes des points les plus hauts et des points les plus bas des sections longitudinales; elles font connaître, suivant la saison, les heures du jour auxquelles ont lieu le maximum et le minimum diurnes; on les a indiquées sur la figure par des traits en points ronds. On obtient d'une manière analogue, en traçant des tangentes parallèles à l'axe des mois, des lignes qui marquent les époques de l'année auxquelles se produisent le maximum et le minimum pour chaque heure.

1088. *Tableau pour la résolution de l'équation numérique du troisième degré* (*fig.* 455). — Lorsque l'équation du troisième degré est ramenée à la forme

$$z^3 + xz + y = 0,$$

elle représente un conoïde horizontal, si l'on y considère l'inconnue z et les coefficients x et y comme des coordonnées variables. En attribuant successivement à z différentes valeurs, on peut tracer quelques-unes des droites qui forment les lignes de niveau de cette surface, et construire son contour apparent.

Suivant que le point déterminé par les valeurs données de x et de y se trouvera en dehors de l'enveloppe, sur cette courbe ou dans son intérieur, il sera la projection d'un seul point du conoïde, de trois points dont deux sont réunis en un seul, ou de trois points distincts, et l'équation possédera une racine réelle, trois racines réelles dont deux égales ou trois inégales.

On trouve par les procédés ordinaires que l'équation de l'enveloppe est

$$4x^3 + 27y^2 = 0.$$

Cette courbe est la développée de la parabole qui a pour équation

$$y^2 + 4x - 8 = 0.$$

Les positions du point à l'extérieur et à l'intérieur de l'enveloppe correspondent respectivement aux valeurs positives et aux valeurs négatives du binôme $(4x^3 + 27y^2)$. Nous voyons que la considération du Tableau graphique conduit facilement à des résultats que l'on déduit ordinairement de la discussion directe de l'équation du troisième degré.

On peut employer avantageusement un Tableau de ce genre lorsque l'on doit résoudre un grand nombre de fois l'équation trinôme du troisième degré, pour des valeurs de x et de y comprises dans des limites déterminées [1]. Ce mode de solution s'étend d'ailleurs sans difficulté à toute équation de la forme

$$z^m + xz^n + y = 0.$$

Tableau graphique représentant deux fonctions différentes de deux mêmes arguments.

1089. Si deux quantités z et z_1 sont fonctions de deux variables x et y, de sorte que l'on ait

$$z = f(x, y), \quad z_1 = f_1(x, y),$$

on pourra établir sur un même Tableau deux séries de lignes de niveau qui feront connaître les grandeurs de z et de z_1 correspondant à chaque système de valeurs de x et de y. Tous les problèmes dans lesquels on devra déterminer deux des quatre quantités x, y, z et z_1, quand on connaît les deux autres, seront facilement résolus à l'aide de ce Tableau. Par exemple, si z et z_1 sont donnés, on tracera les courbes intercalaires des deux séries qui correspondent à ces cotes; les valeurs de x et de y seront les coordonnées de leur point de rencontre. Le problème admettra autant de solutions que les courbes auront de points communs.

Anamorphose des Tableaux graphiques.

1090. Les Tableaux graphiques ont souvent l'inconvénient d'exiger des courbes compliquées. Nous allons faire connaître un artifice par lequel on parvient quelquefois à transformer ces lignes en d'autres plus simples.

---

(1) Gergonne a proposé pour résoudre l'équation du troisième degré une méthode graphique qui, bien que très différente en réalité de celle qui est due à M. Lalanne et que nous expliquons dans le texte, repose cependant sur la même base, la construction des normales à la parabole ordinaire (*Annales de Mathématiques*, t. IX).

Revenons au paraboloïde qui remplace la Table de Pythagore (art. **1085**); son équation est

$$z = xy.$$

Nous posons

$$x' = \log x, \quad y' = \log y,$$

et par suite nous avons

$$\log z = x' + y'.$$

Si nous considérons x', y' et z comme trois coordonnées variables, cette nouvelle équation représentera un cylindre horizontal, surface dont les lignes de niveau sont des droites parallèles, et que, par conséquent, nous pouvons représenter facilement (*fig.* 452). Pour trouver le produit de deux nombres à l'aide du Tableau que l'on obtient ainsi, il faut prendre pour coordonnées horizontales les logarithmes des valeurs données de x et de y. Cette opération exige l'emploi d'une Table numérique; mais, pour qu'il n'en résulte aucune gêne, on transporte cette Table sur la figure, en donnant aux axes une graduation logarithmique, comme nous l'avons expliqué à l'article **1084**. Les cotes sont les nombres dont les abscisses sont les logarithmes. Il résulte de là que les coordonnées de l'origine sont cotées 1 et non pas 0.

1091. Cet exemple montre en quoi consiste l'*anamorphose* des Tableaux graphiques; on cherche à simplifier l'équation des courbes de niveau en prenant de nouvelles coordonnées qui soient fonctions des premières, et l'on place, sur les axes, des cotes qui font connaître les valeurs de celles-ci. La complication du problème est alors reportée sur la graduation des axes.

Nous allons indiquer un autre exemple emprunté à l'art des constructions.

Dans le calcul des terrassements pour les routes, on doit résoudre un grand nombre de fois l'équation

$$z = \frac{(B + y)^2}{2(A - x)} - C.$$

En y considérant x, y et z comme des coordonnées, elle représente un hyperboloïde dont les lignes de niveau sont des paraboles. Si l'on pose

$$x' = \log(A - x), \quad y' = \log(B + y),$$

on aura

$$y' = \tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}[\log 2 + \log(z + C)].$$

Cette équation est celle d'un cylindre horizontal; on peut facilement construire le Tableau graphique qui le représente, pour des valeurs déterminées des constantes A, B et C. Les cotes de l'origine correspondent aux valeurs nulles de x et de y, et sont, par conséquent, les logarithmes de A et de B.

1092. Suivant la nature des relations qui existent entre les anciennes coordonnées et les nouvelles, il peut arriver que les valeurs de x', ou les abscisses,

augmentent quand les grandeurs de x, qui sont leurs cotes, diminuent. Lorsque l'abscisse x', considérée comme fonction de x, a un maximum ou un minimum, la série naturelle des cotes se développe d'abord dans un certain sens, puis dans le sens opposé.

Considérons, par exemple, l'hyperboloïde représenté par l'équation

$$yz + x^2 - 20x + 104 = 0;$$

les courbes horizontales sont des paraboles, mais, si nous posons

$$x' = x^2 - 20x + 104,$$

nous aurons

$$yz + x' = 0,$$

et les lignes de niveau seront des droites.

A la valeur 4 de x' correspond pour x une grandeur minimum égale à 10. La cote 10 sera, par conséquent, au point dont l'abscisse est 4, et les cotes 11, 12, 13, ..., 9, 8, 7, ... seront sur la partie de l'axe qui s'étend au delà de ce point. Les valeurs de x sont imaginaires pour les abscisses inférieures à 4, et par suite les droites transformées des paraboles sont parasites au delà de la parallèle à l'axe des ordonnées dont l'abscisse est 4.

1093. On est quelquefois conduit à employer deux Tableaux distincts pour résoudre une même formule. Considérons l'équation

$$z = \frac{ax^2}{x+y};$$

on ne peut pas la simplifier en prenant des variables qui soient des fonctions distinctes des anciennes, car ces dernières sont réunies dans le dénominateur; si cependant on veut avoir des droites pour lignes de niveau, on posera

$$x' = ax^2, \quad y' = x + y,$$

et l'on construira deux Tableaux sur les formules

$$y' = x + y, \quad z = \frac{x'}{y'}.$$

Le premier fera connaître l'ordonnée auxiliaire y'; le second, dont l'axe des abscisses aura été convenablement gradué, donnera ensuite l'inconnue z'.

Application de l'anamorphose à la représentation graphique de certaines lois naturelles.

1094. Lorsque l'on connaît une loi mathématique entre trois variables x', y' et z, on peut représenter par des courbes de niveau la surface qui en est l'expres-

sion. Alors, si chacune des grandeurs x' et y' n'est pas donnée immédiatement, mais doit être prise dans une Table à simple entrée en fonction d'une autre quantité x ou y, on peut éviter cette recherche, en inscrivant sur les bords du Tableau des cotes qui donnent les grandeurs des variables primitives, d'après les différentes valeurs des coordonnées.

Afin de donner un exemple de ce genre d'anamorphose, supposons que l'on possède une Table numérique qui fasse connaître, pour un pays, le chiffre de la population dont l'âge est inférieur aux différents nombres d'années, et qu'on veuille construire un Tableau graphique qui permette de déterminer le nombre d'individus compris entre deux âges x et y. On aura, en appelant z ce nombre et en désignant par x' et y' les nombres des personnes dont les âges sont respectivement inférieurs à x et y,

$$z = x' - y'.$$

On construira dans la partie utile les lignes de niveau du plan que représente cette équation, et, à l'aide de la Table, on inscrira sur les axes les valeurs de x et de y qui correspondent aux grandeurs réelles des coordonnées x' et y'.

La *fig.* 454 représente ce Tableau, construit d'après une Table numérique donnée par Demontférand pour la répartition de la population mâle en France dans l'année 1833 (*Journal de l'École Polytechnique,* XXVIe Cahier, p. 294). Les cotes mises sur l'axe des abscisses indiquent les âges x qui correspondent à la population mâle x', cette dernière étant représentée par une longueur de 4^{mm} pour un million d'habitants. On doit concevoir l'axe des coordonnées gradué de la même manière, mais les cotes sont reportées sur la parallèle qui passe à l'âge de quatre-vingts ans ; c'est à cette droite que le Tableau est limité.

Pour obtenir le nombre d'individus compris entre deux âges déterminés, il faut suivre la parallèle à ox correspondant au plus petit âge, jusqu'à la rencontre de la parallèle à oy correspondant au plus grand. La cote de la ligne inclinée sur laquelle on arrive indique, en millions, le chiffre de la population mâle.

En opérant de cette manière pour savoir combien il y avait en France, en 1833, d'hommes de dix-huit à soixante ans, on trouve que le point de rencontre des parallèles à ox et à oy passant par 18 et 60 tombe entre les obliques 8 et 9, plus près de celle-ci que de la première, à un cinquième environ de l'intervalle qui les sépare. On en conclut que le nombre d'hommes cherché est d'environ 8 800 000; le calcul exact fait à l'aide de la Table numérique donne 8 792 569.

FIN DE LA TROISIÈME PARTIE.

TABLE ANALYTIQUE DES TROIS PARTIES[1].

La première Partie contient les articles de	1 à	319*c*
La deuxième, de	320 à	776
La troisième, de	777 à	1094

A

[1] J'ai complété et modifié, d'après la seconde édition de chacune des trois Parties, la Table analytique faite par l'Auteur. (E. L.)

B

C

I

Q

FIN DE LA TABLE ANALYTIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

OUVRAGES DE L'AUTEUR.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. In-4°, publié en *trois Parties* avec Atlas; 1873-1880-1885 .... 30 fr.

Chaque Partie se vend séparément .... 10 fr.

La Ire Partie (2e édition) contient tout ce qui est exigé pour l'*admission à l'École Polytechnique*. Elle est suivie d'un *Supplément contenant la solution de deux problèmes et des figures cavalières pour l'explication des constructions les plus difficiles*.

La IIe Partie (2e édition) et la IIIe Partie (2e édition) sont le développement du *Cours de Géométrie descriptive* professé à *l'École Polytechnique*.

TRAITÉ DE PERSPECTIVE LINÉAIRE, contenant les Tracés pour les Bas-Reliefs et les Décorations théâtrales, avec une Théorie des effets de perspective; 2e édition, entièrement revue. In-4°, avec Atlas in-folio de 40 planches, dont 8 doubles; 1884 .... 25 fr.

RECHERCHES sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques. In-8°; 1867 .... 6 fr.

MÉMOIRE sur l'appareil de l'arche biaise, suivi d'une analyse des principaux Ouvrages publiés sur cette question, et d'une réponse à des critiques sur l'enseignement de la Stéréotomie à l'École Polytechnique. (Extrait des *Annales du Conservatoire des Arts et Métiers*.) .... 2 fr.

ÉTUDES ÉCONOMIQUES sur l'exploitation des chemins de fer. Grand in-8°; 1880 .... 4 fr. 50

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

PAR JULES DE LA GOURNERIE,

MEMBRE DE L'INSTITUT, OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR,
INSPECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES EN RETRAITE, PROFESSEUR HONORAIRE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ANCIEN EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ET PROFESSEUR DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Les Mathématiques ont des inventions très subtiles et qui peuvent beaucoup servir tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et diminuer le travail des hommes.

DESCARTES (*Discours de la Méthode*).

SECONDE ÉDITION.

TROISIÈME PARTIE. — ATLAS DE 46 PLANCHES.

PARIS,

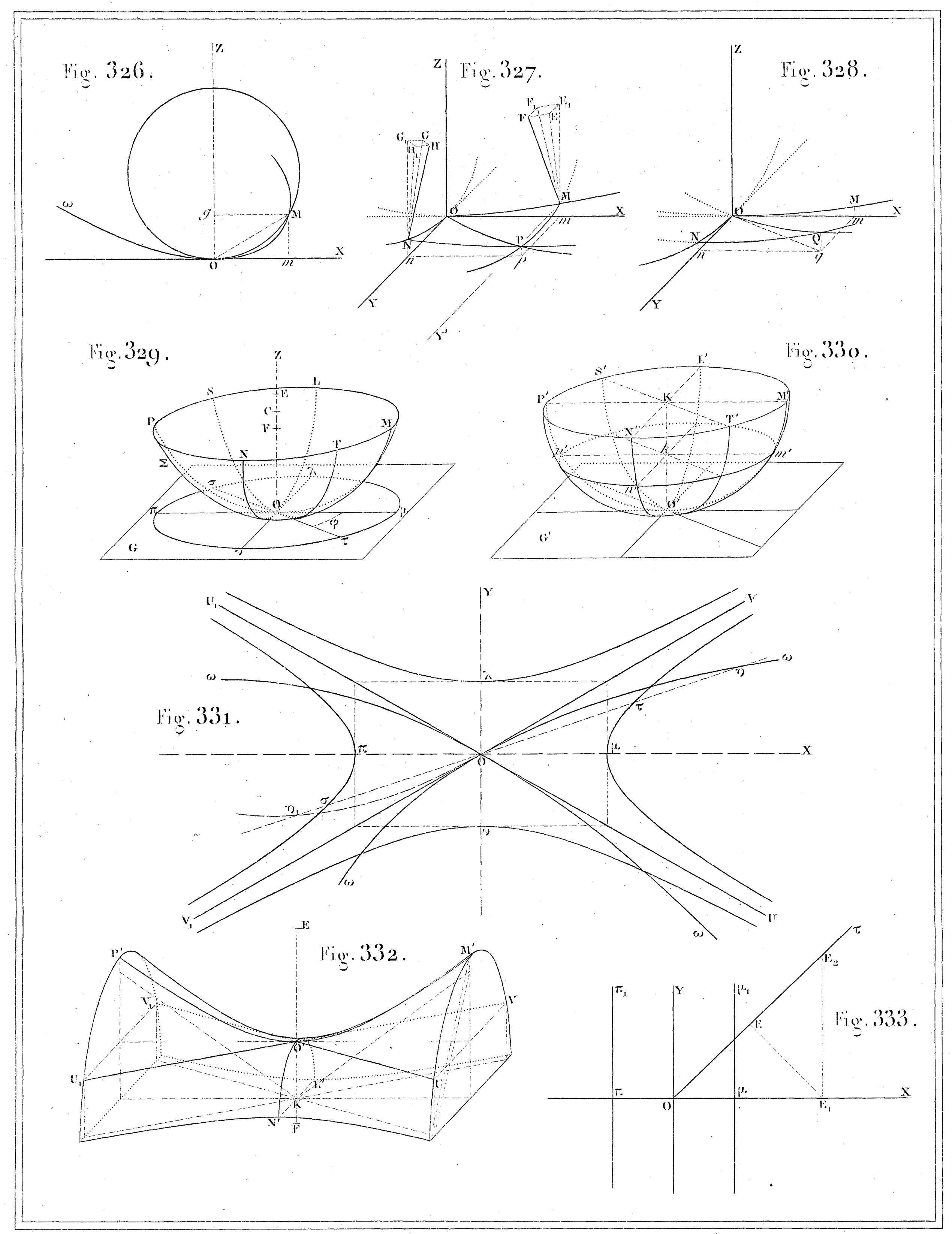
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES,

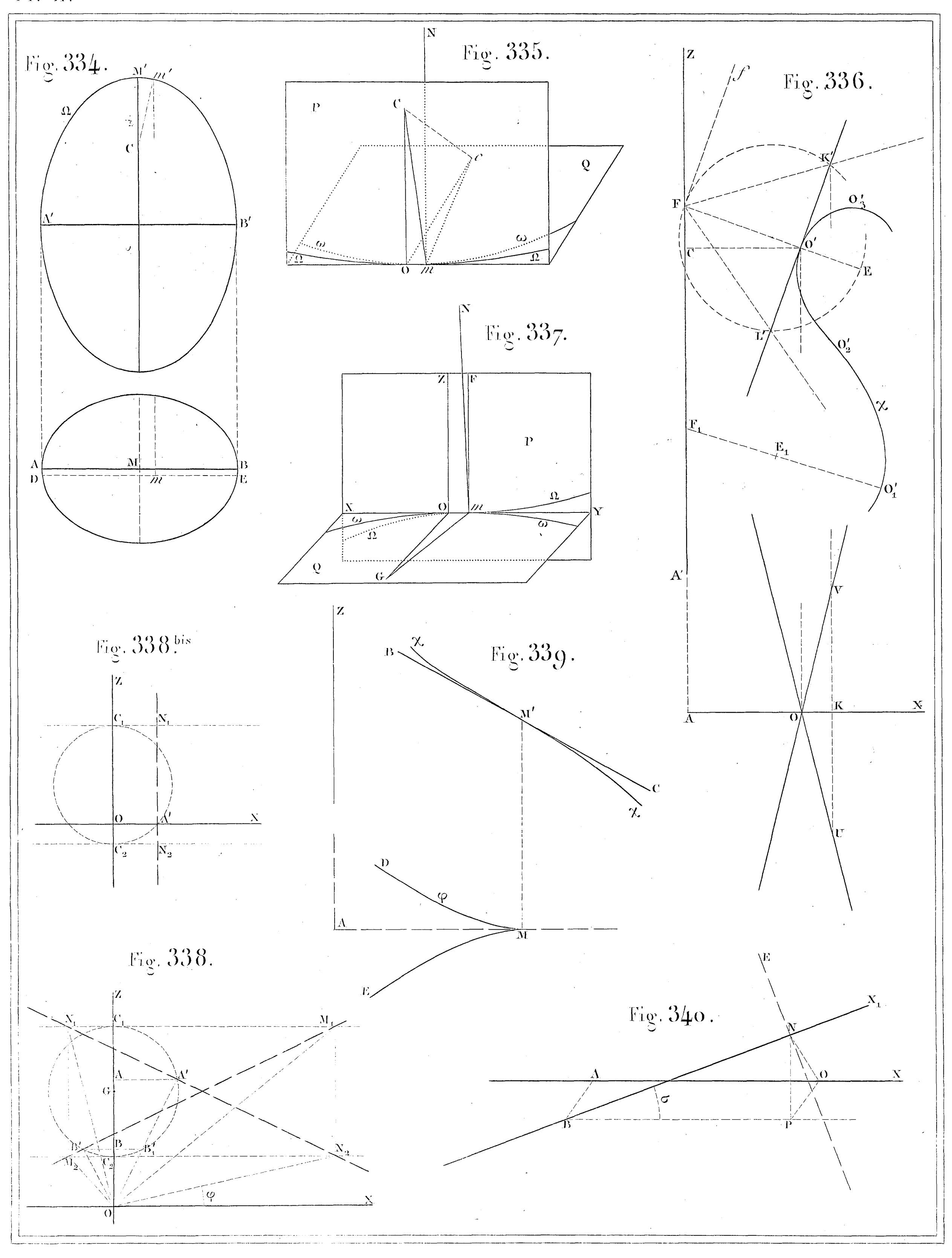
Quai des Augustins, 55.

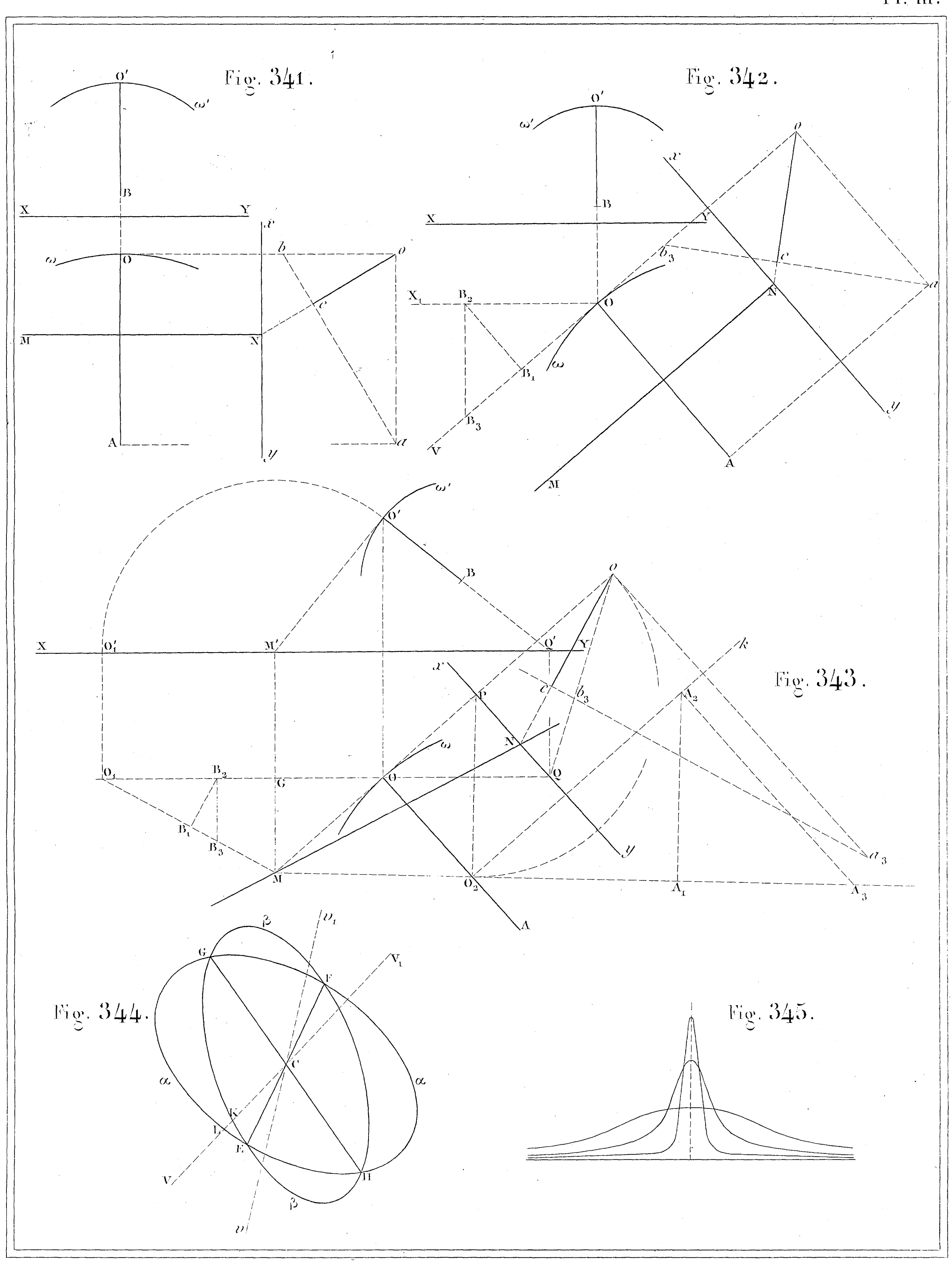
1885

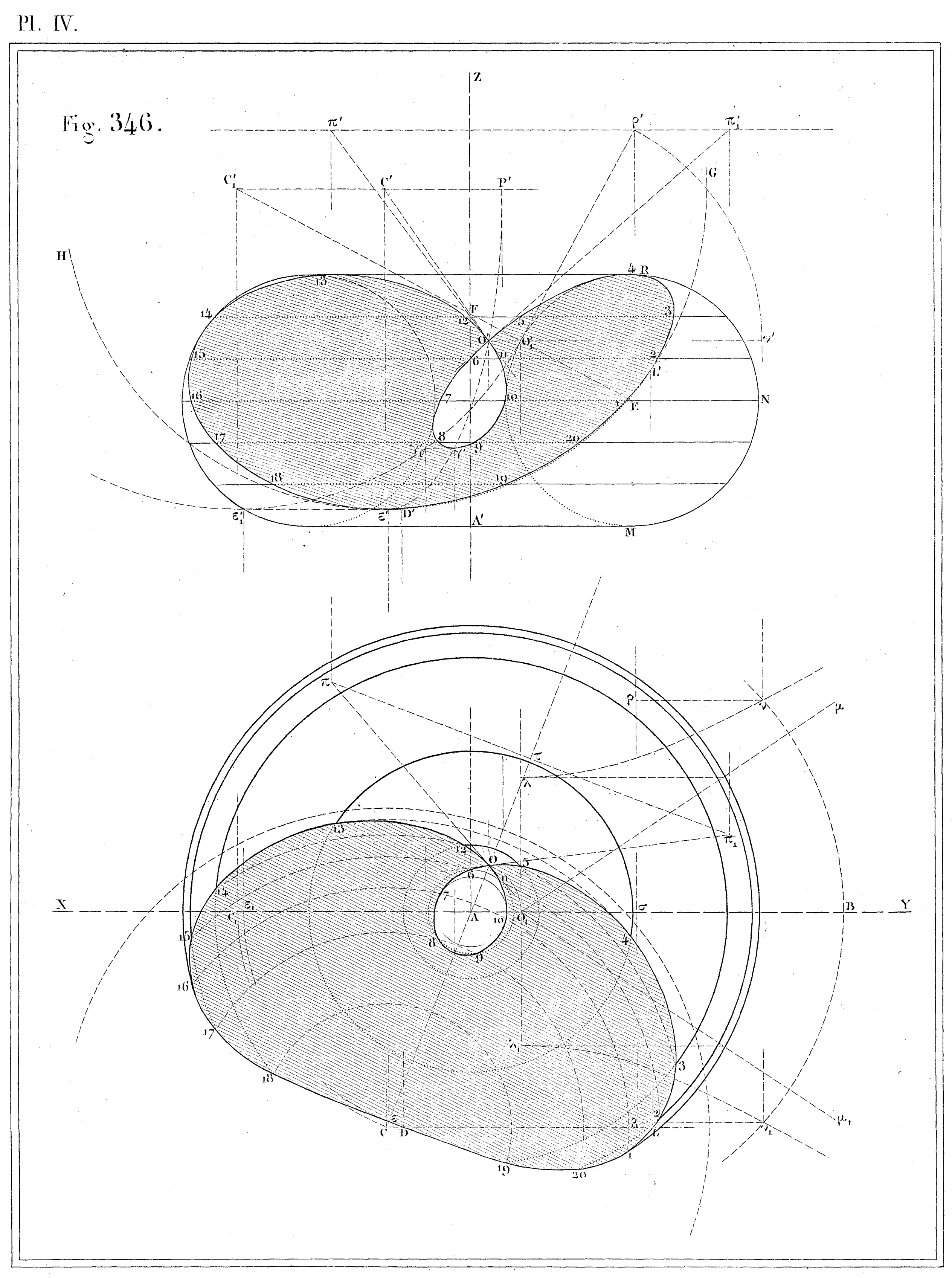
TABLE DES FIGURES.



J. de la Gournerie del. Gauthier-Villars, Libraire, Successeur de Mallet-Bachelier. Dulos sc.


Fig. 334.
Fig. 335.
Fig. 336.
Fig. 337.
Fig. 338.bis
Fig. 339.
Fig. 338.
Fig. 340.


Fig. 341.
Fig. 342.
Fig. 343.
Fig. 344.
Fig. 345.


Fig. 346.

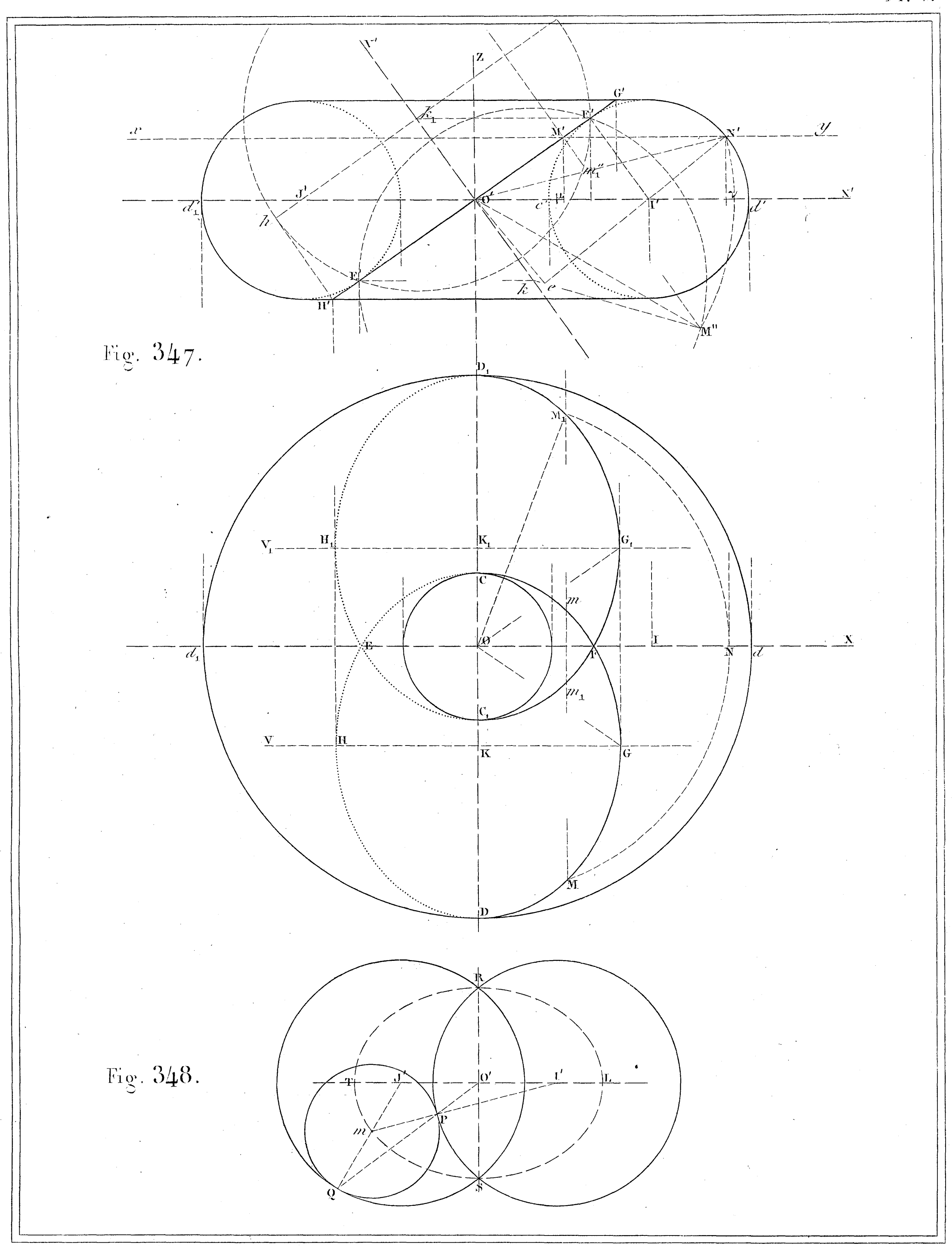
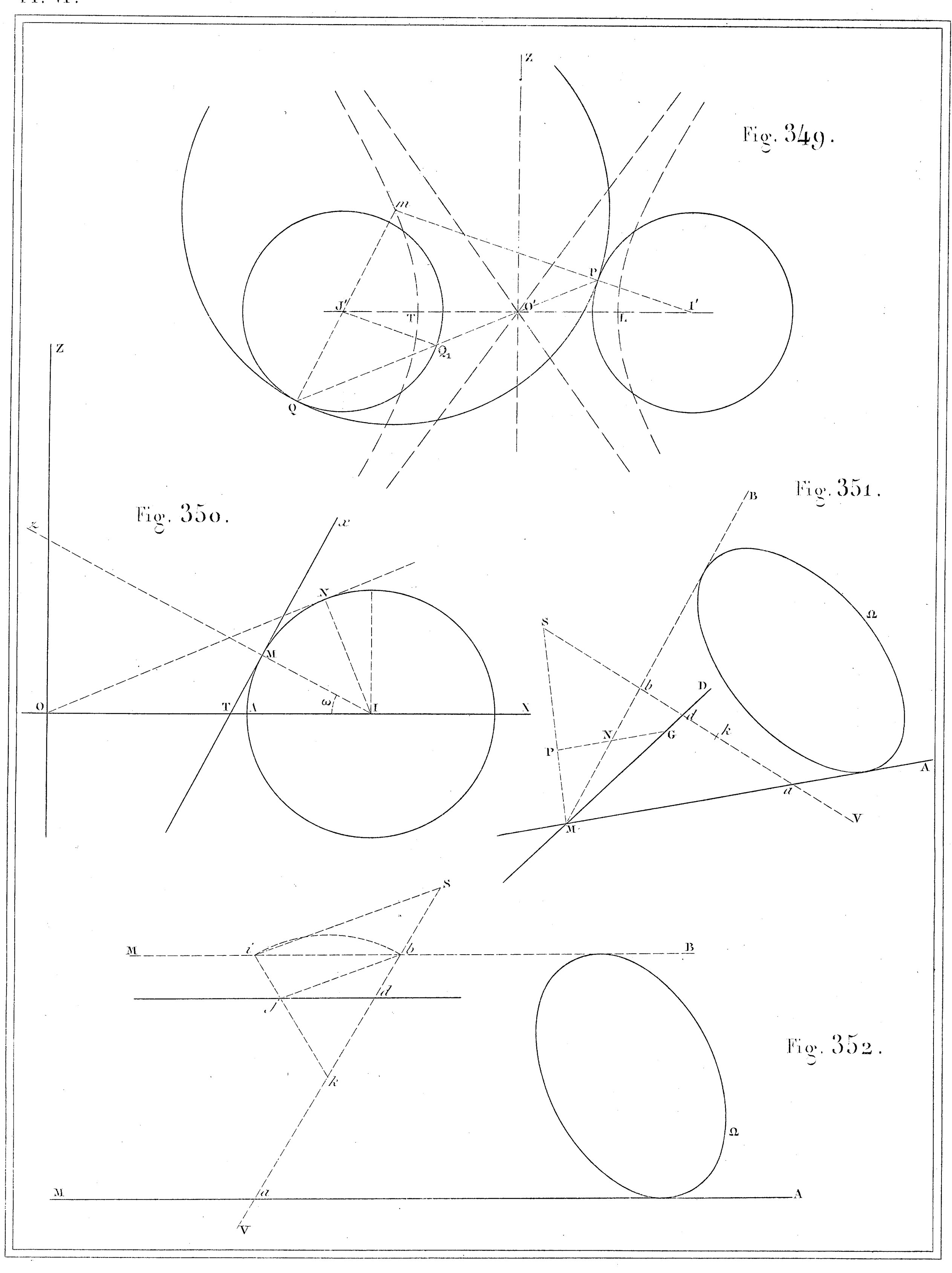
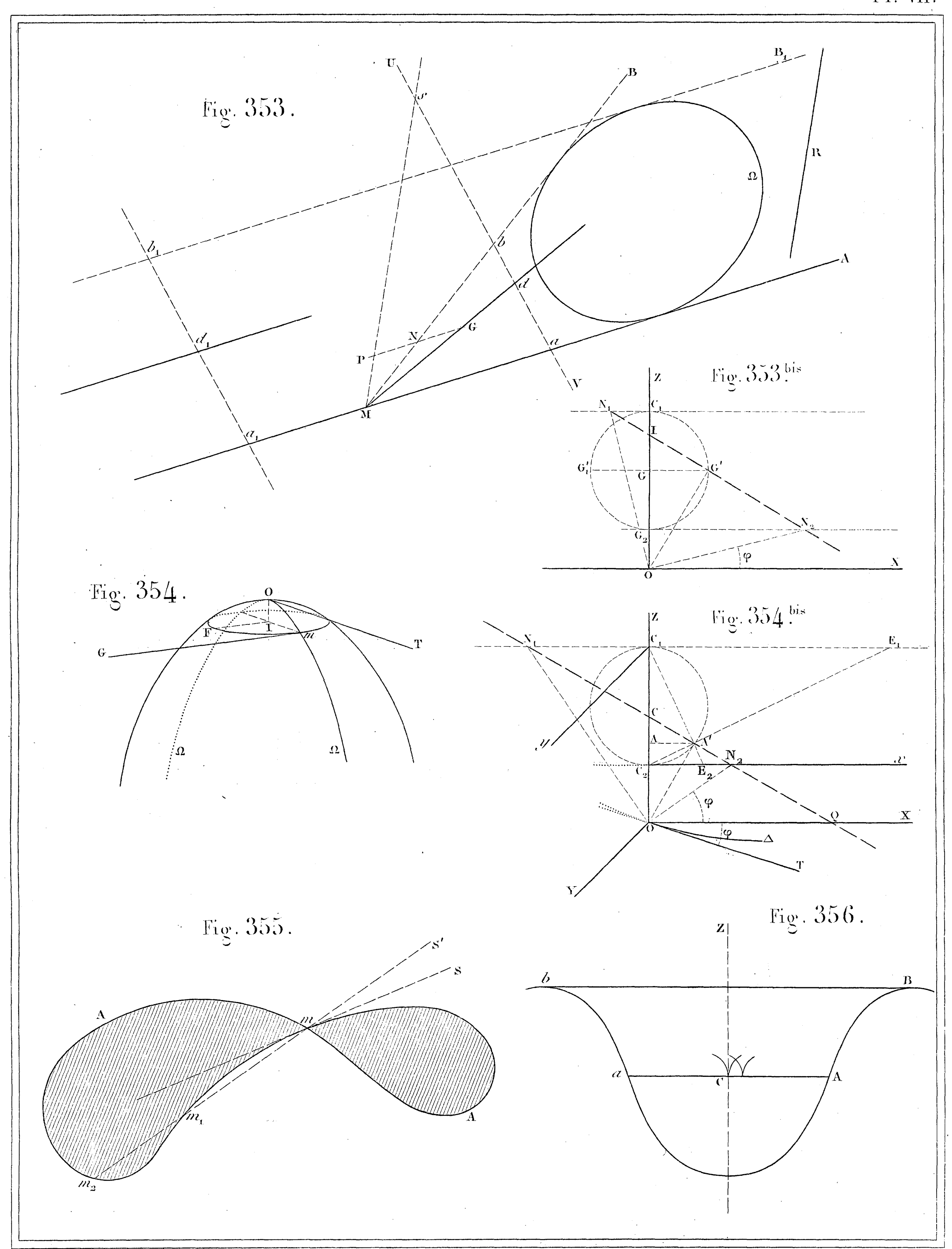
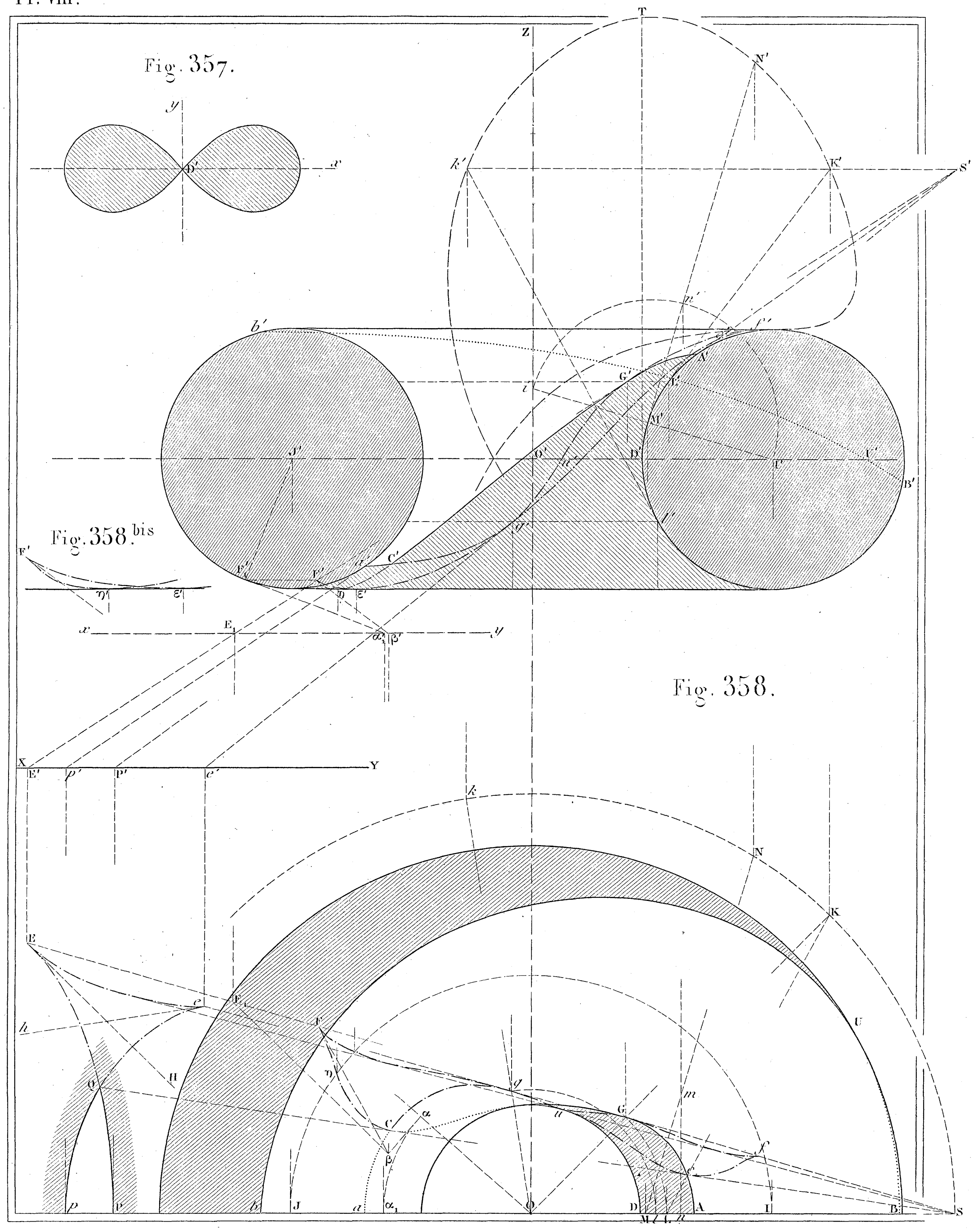


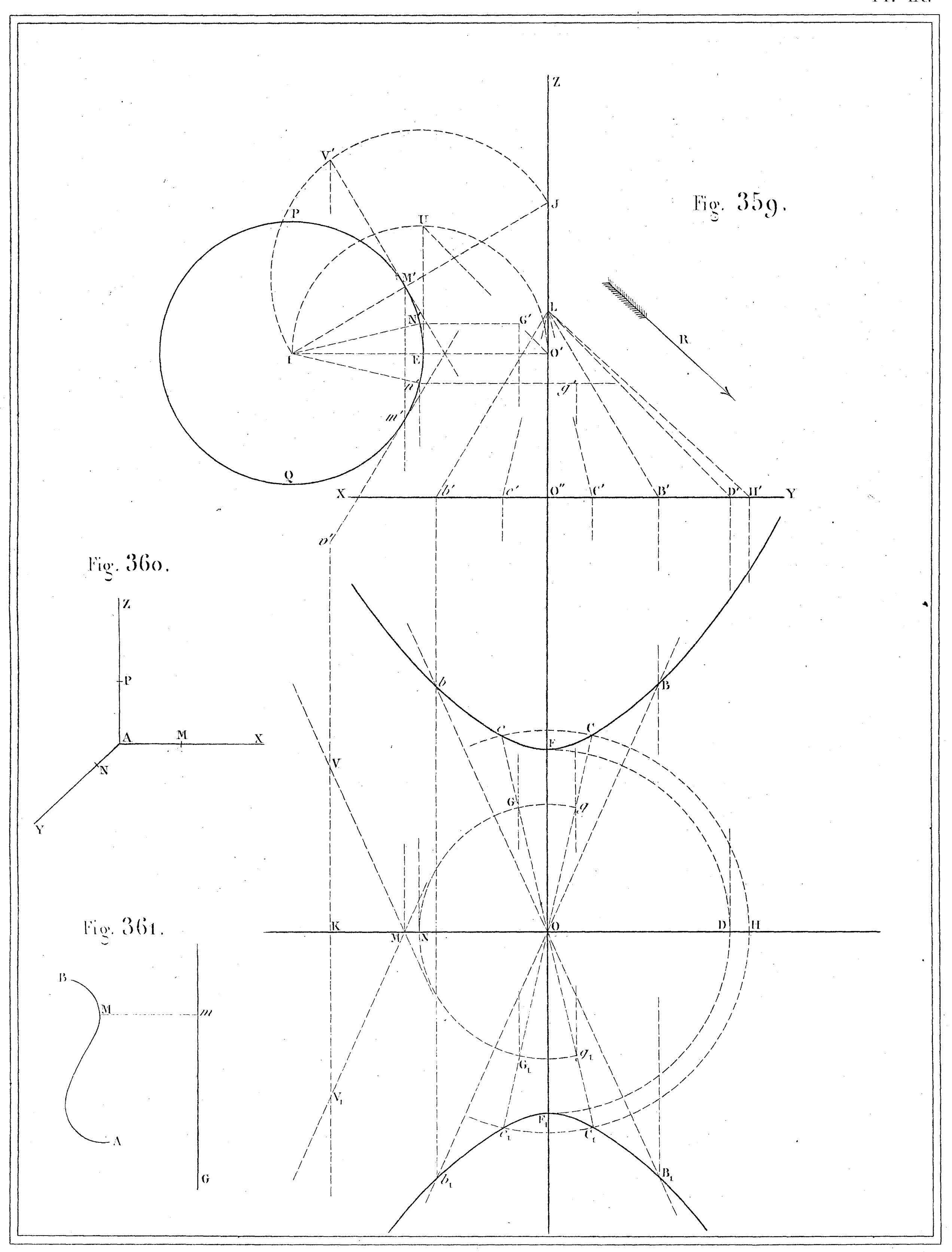
Fig. 347.

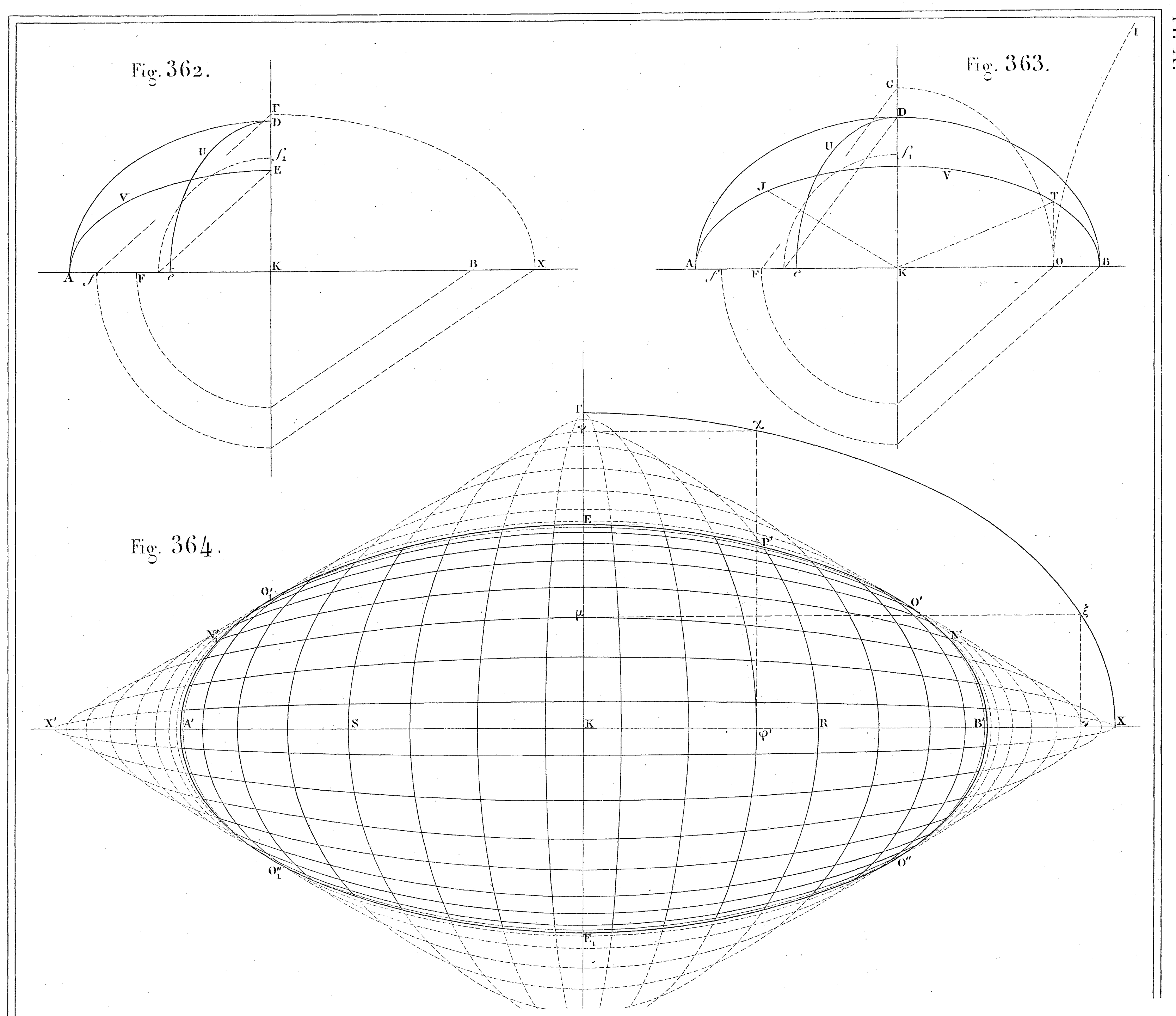
Fig. 348.


Fig. 349.
Z
m
P
J'
T
O'
L
I'
Q1
Q
Fig. 350.
Z
z
x
N
M
O
T
A
ω
I
X
Fig. 351.
B
Ω
S
b
D
d
k
N
G
P
A
a
V
M
Fig. 352.
S
M
i
b
B
j
d
k
Ω
M
a
A
V


Fig. 353.
U
B
B₁
s
R
Ω
b₁
b
A
d
d₁
G
N
P
a
V
M
a₁
Fig. 353. bis
Z
N₁
C₁
I
G₁
G
G'
N₂
G₂
φ
O
X
Fig. 354.
O
F
I
m
G
T
Ω
Ω
Fig. 354. bis
Z
N₁
C₁
E₁
C
y
A
C'
N₂
C₂
E₂
x'
φ
Q
X
O
φ
Δ
T
Y
Fig. 355.
S'
S
A
m
m₁
A
m₂
Fig. 356.
Z
b
B
a
C
A


Fig. 357.
Fig. 358. bis
Fig. 358.


Fig. 359.
Fig. 360.
Fig. 361.


Fig. 362.
Fig. 363.
Fig. 364.

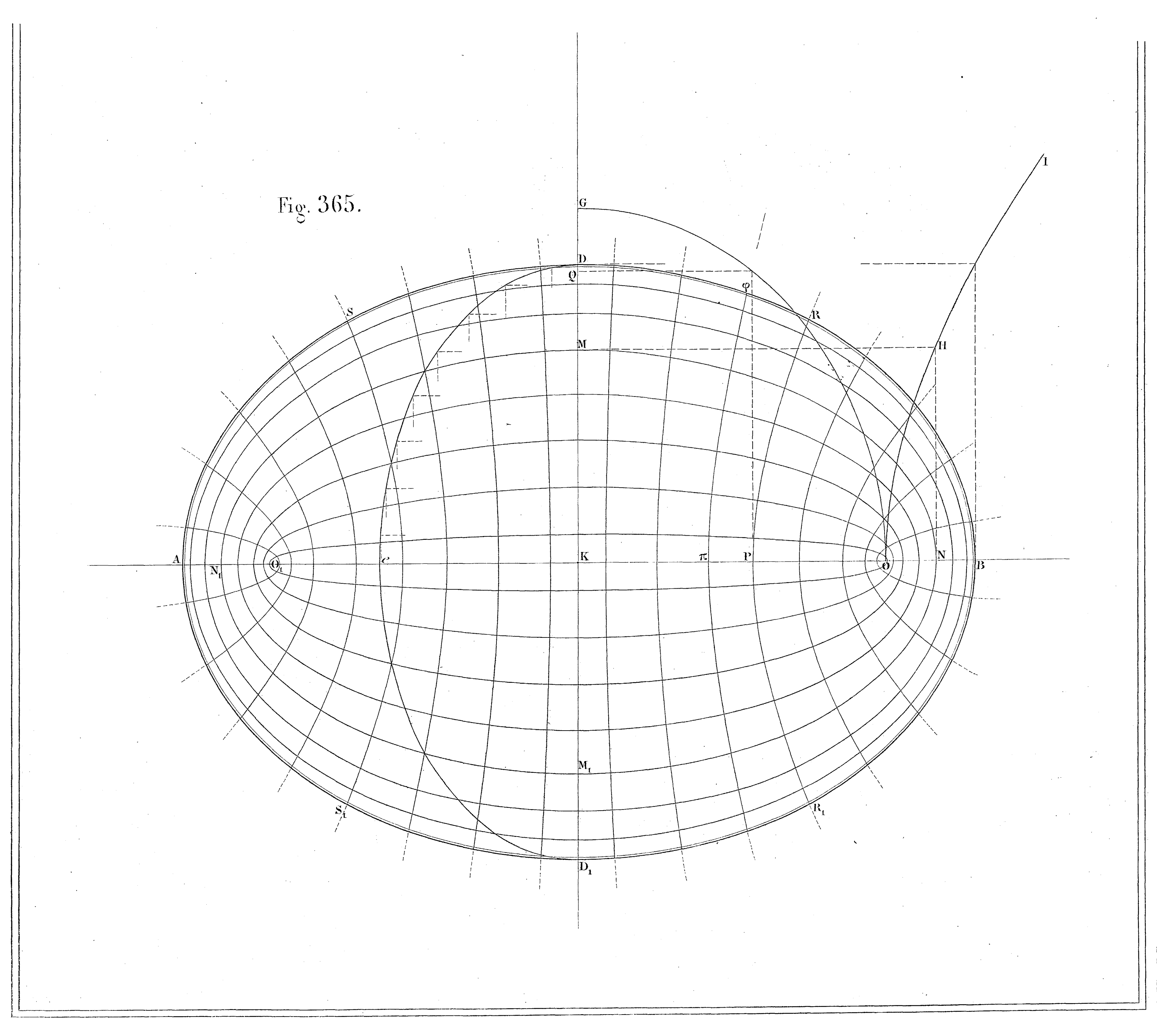
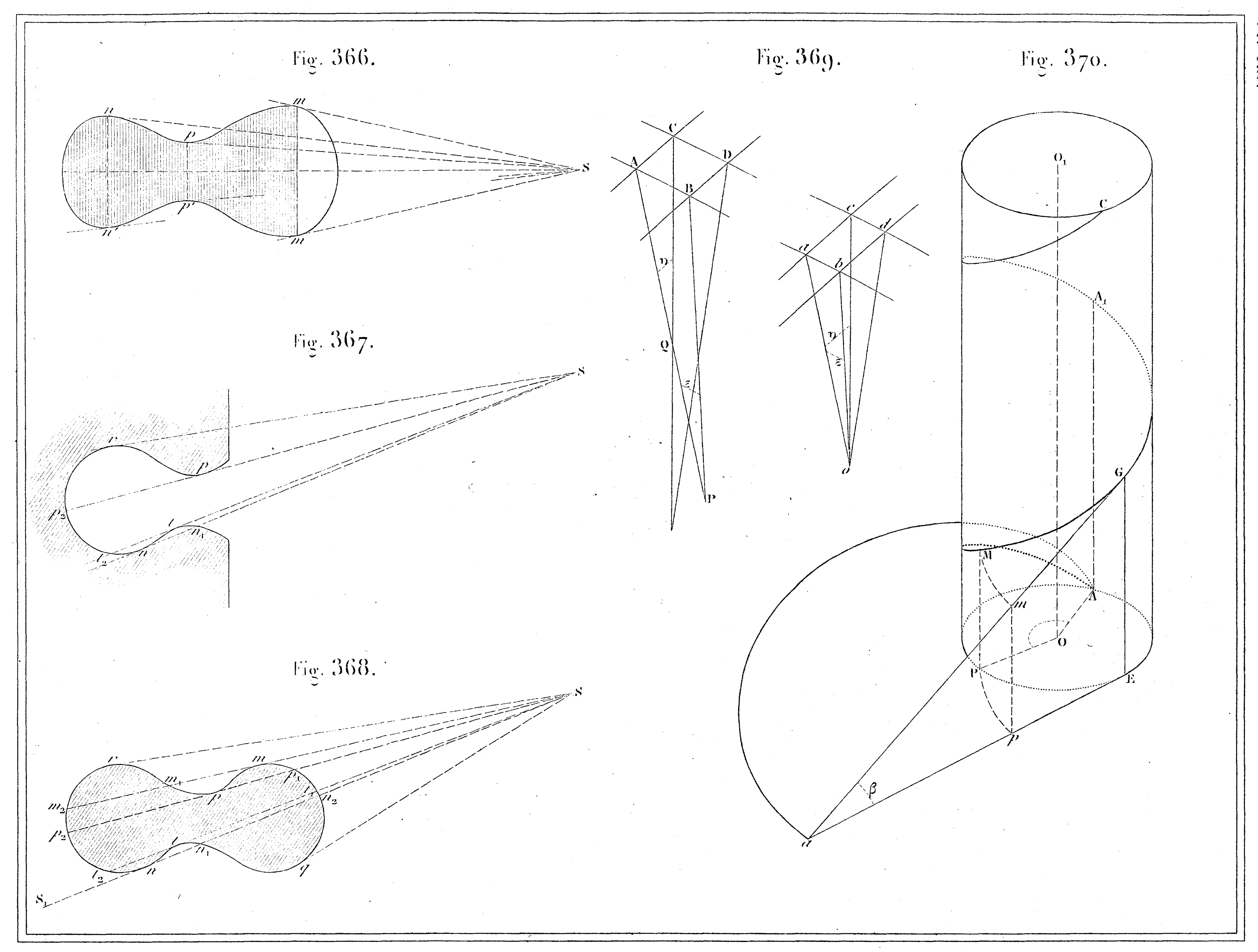


Fig. 365.


Fig. 366.
Fig. 367.
Fig. 368.
Fig. 369.
Fig. 370.

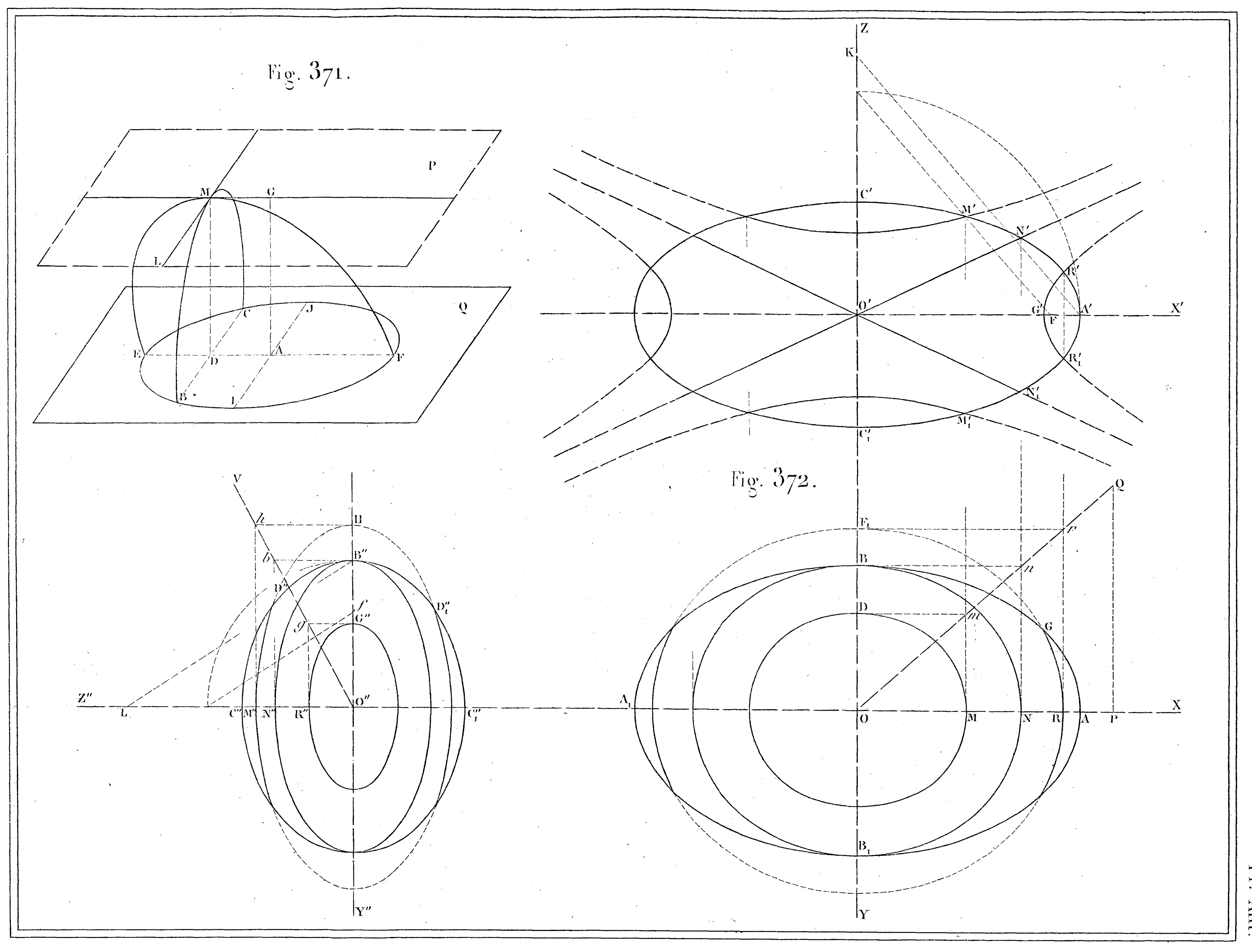
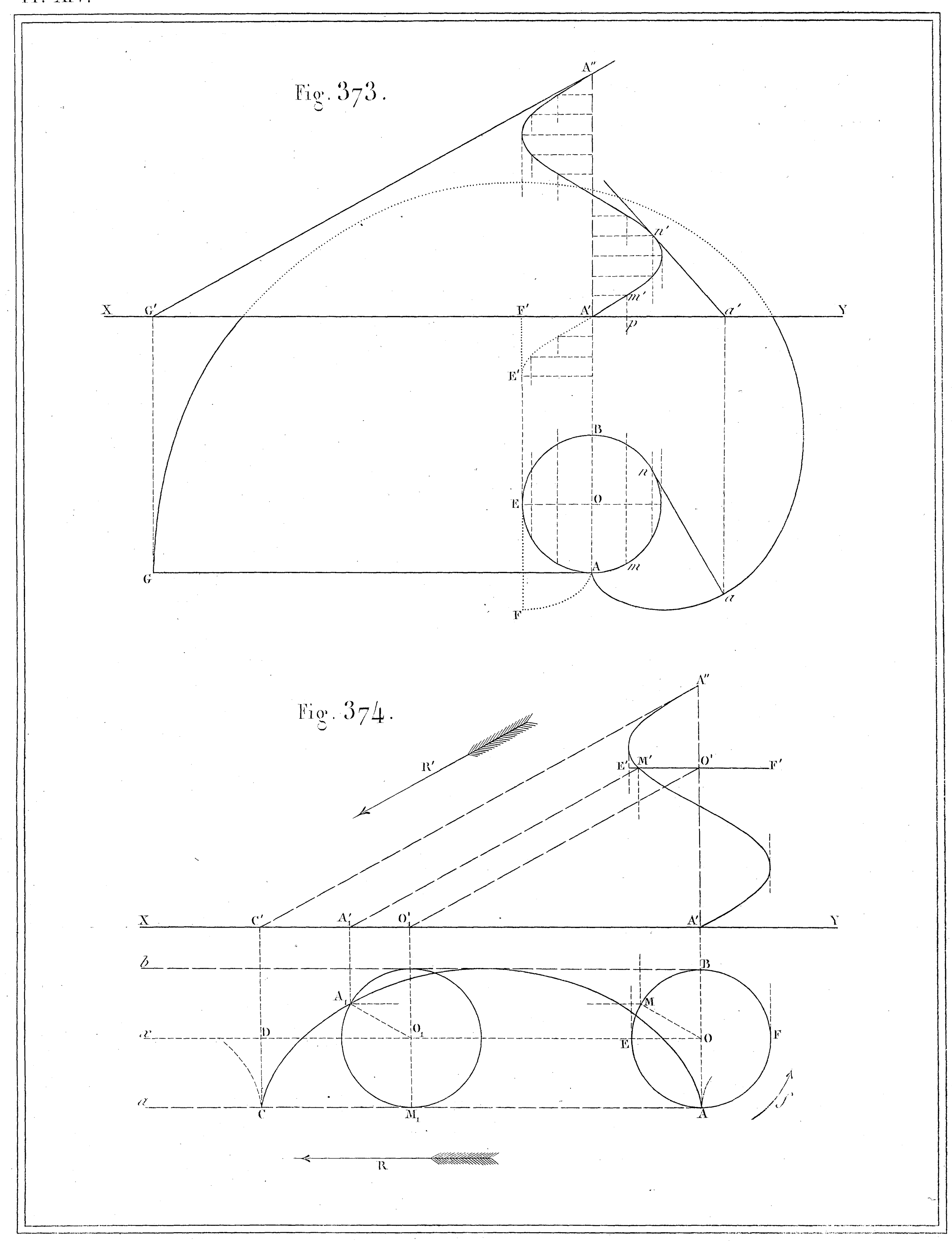
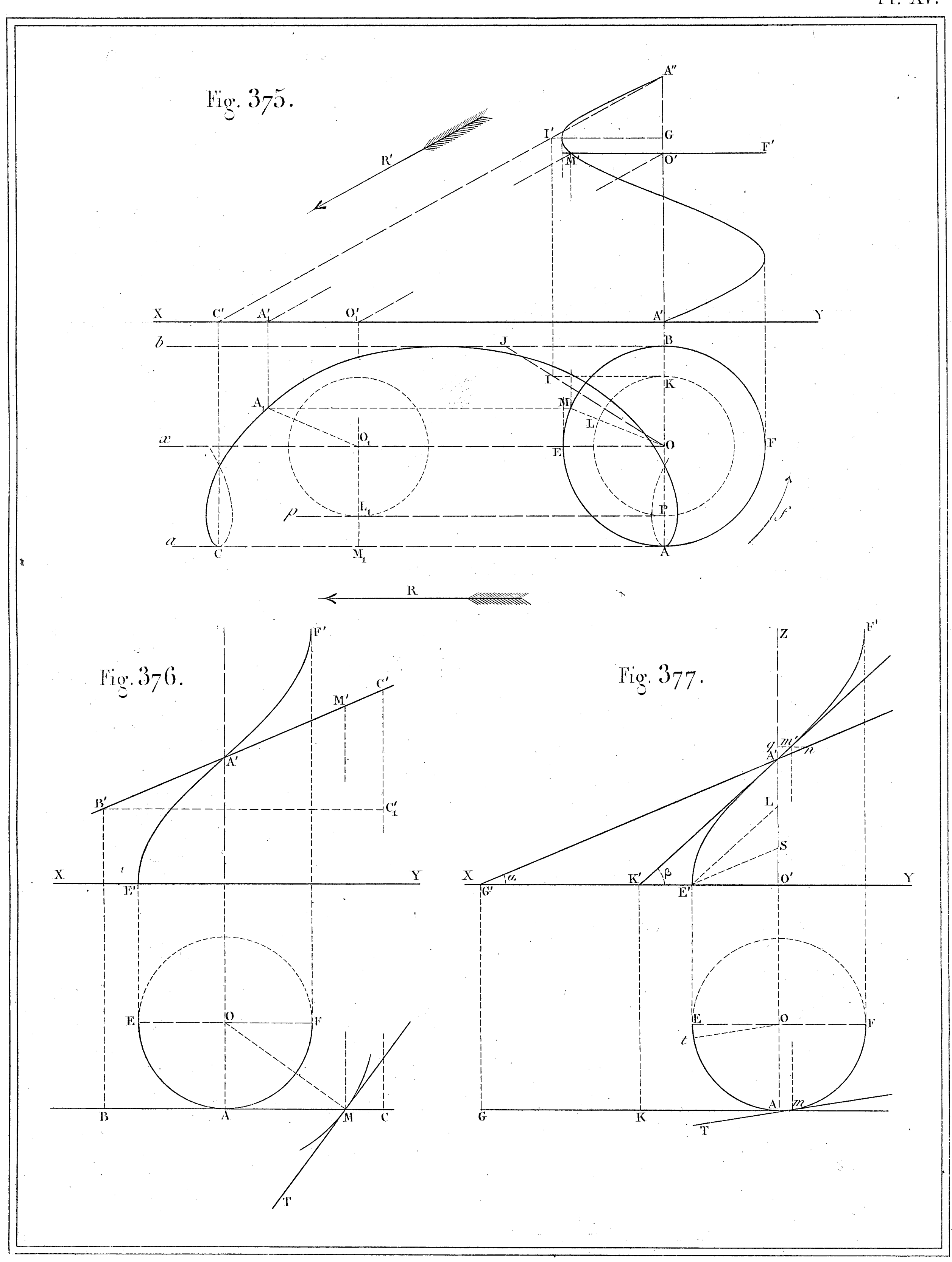


Fig. 371.

Fig. 372.


Fig. 373.
A''
n'
m'
X
G'
F'
A'
a'
Y
p
E'
B
n
E
O
G
A
m
a
F
Fig. 374.
A''
R'
E'
M'
O'
F'
X
C'
A'
O'
A'
Y
b
B
A₁
M
x
D
O₁
E
O
F
a
C
M₁
A
f
R


Fig. 375.
Fig. 376.
Fig. 377.

Pl. XVI.

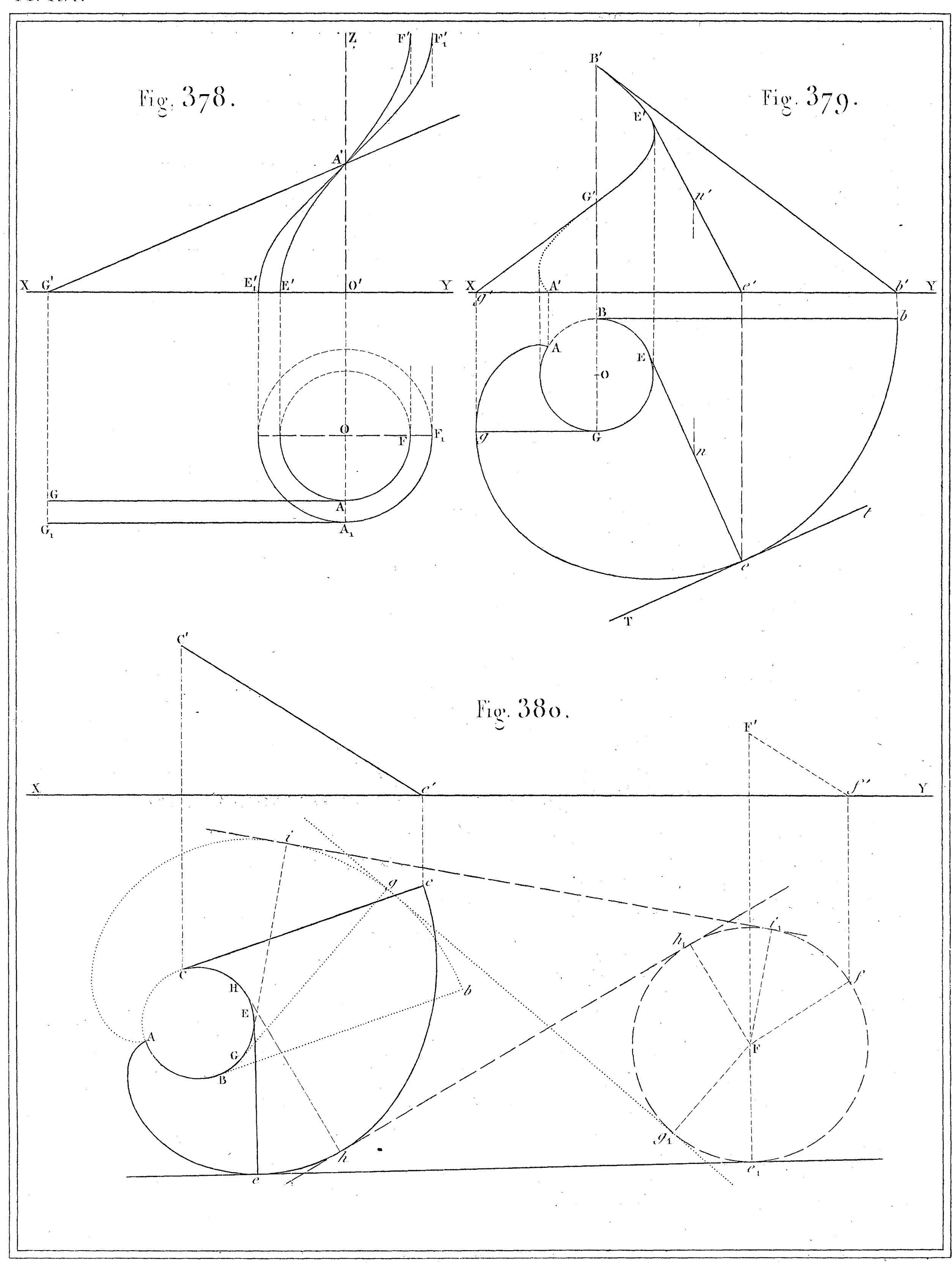
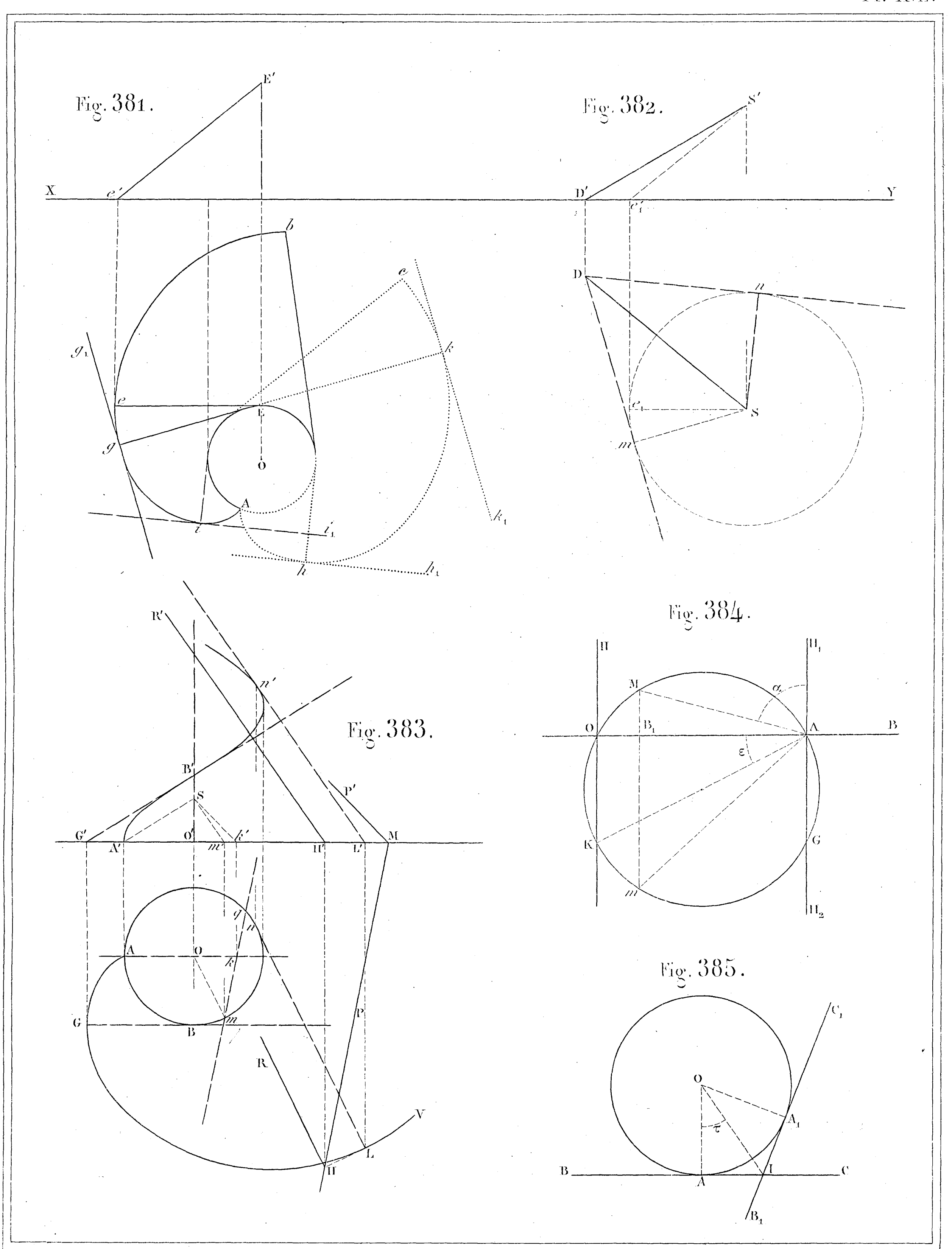
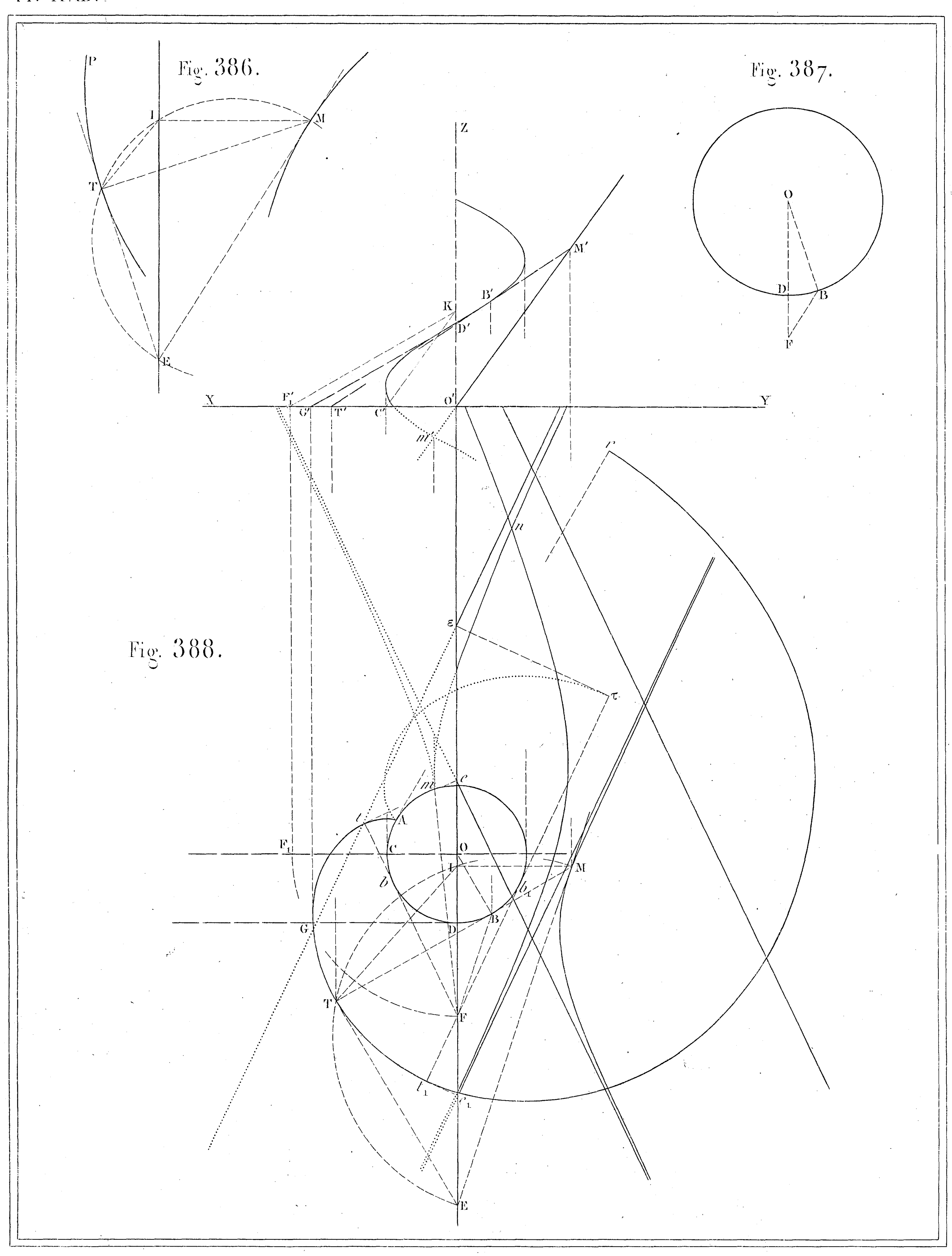
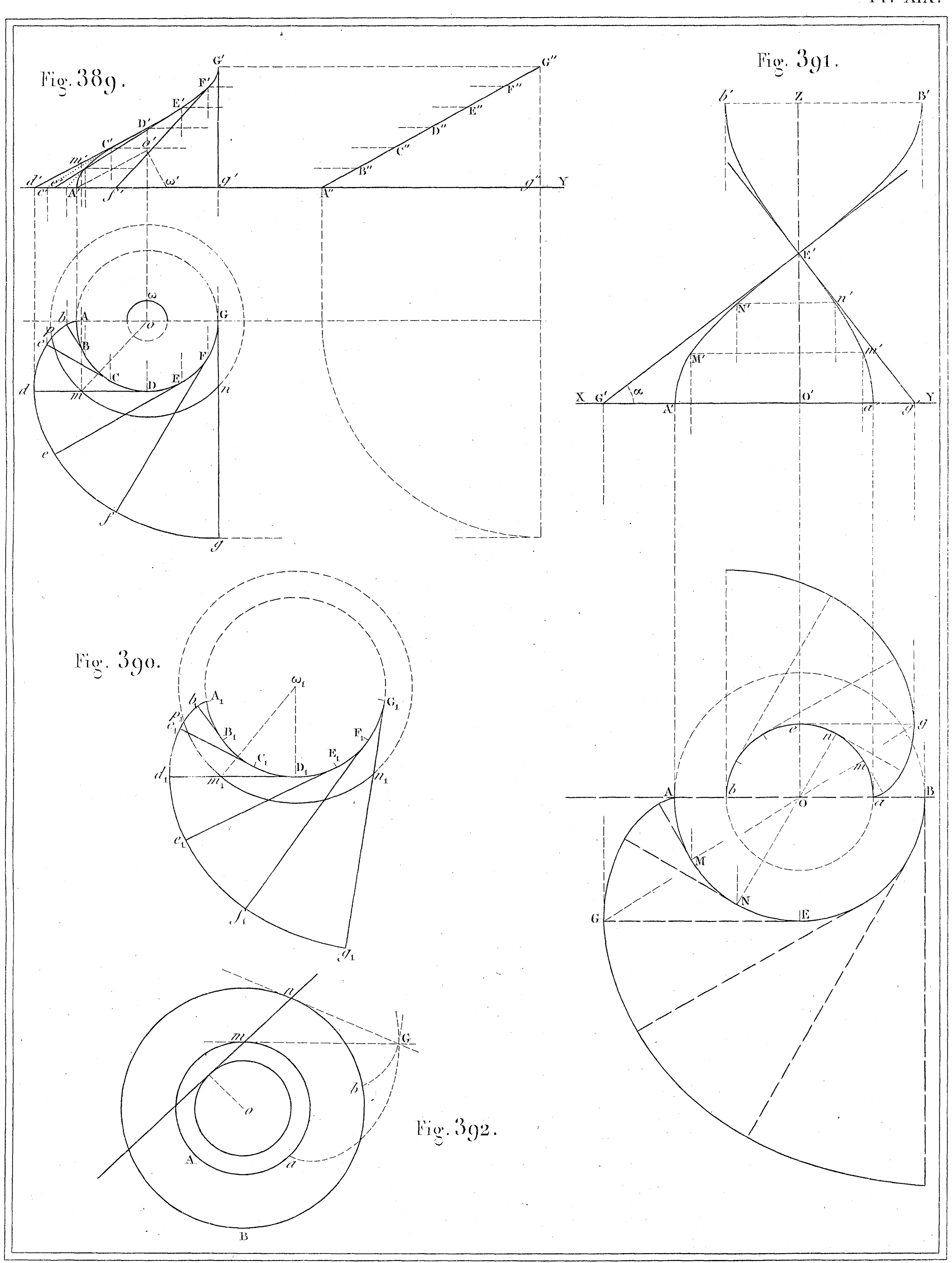
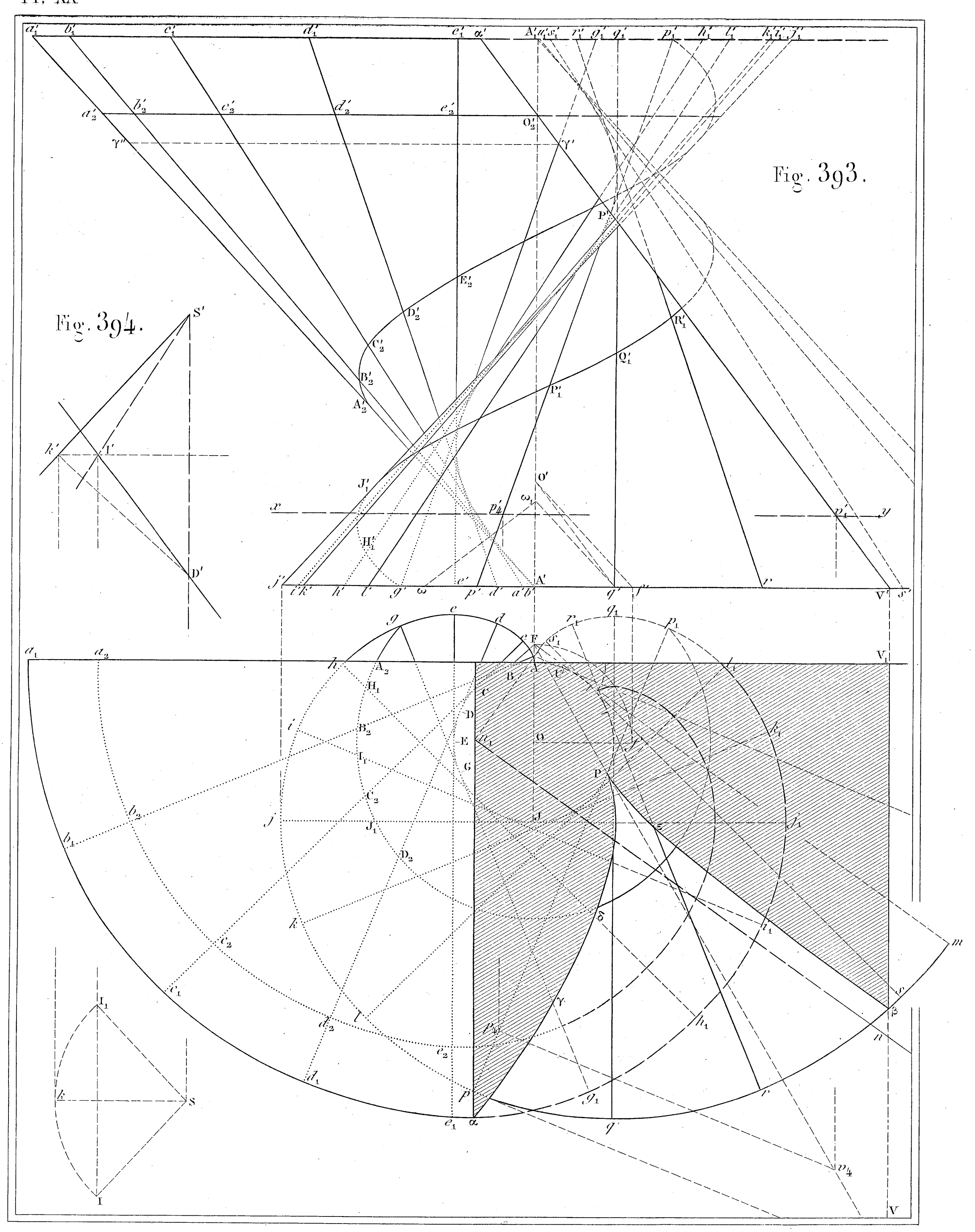


Fig. 378.
Z
F'
F'1
A'
X
G'
E'1
E'
O'
Y
O
F
F1
G
A
G1
A1
Fig. 379.
B'
E'
G'
n'
X
g'
A'
c'
b'
Y
B
b
A
E
O
g
G
n
t
c
T
Fig. 380.
C'
F'
X
c'
f'
Y
i
q
c
f1
h1
C
H
E
b
f
A
G
F
B
g1
h
e
e1


Fig. 381.
Fig. 382.
Fig. 383.
Fig. 384.
Fig. 385.


Fig. 386.
P
I
M
T
E
Fig. 387.
O
D
B
F
Fig. 388.
Z
M'
B'
K
D'
X
F'
G'
T'
C'
O'
Y
m'
r
n
ε
τ
e
m
A
t
F₁
C
O
L
M
b
b₁
G
D
B
T
F
t₁
r₁
E


Fig. 389.
G′
F′
E′
D′
C′
m′
d′
c′
e′
A′
f′
ω′
g′
G″
F″
E″
D″
C″
B″
A″
g″
Y
ω
o
A
B
b
p
c
C
D
E
F
G
d
m
n
e
f
g
Fig. 390.
ω₁
A₁
B₁
C₁
D₁
E₁
F₁
G₁
d₁
m₁
n₁
e₁
f₁
g₁
Fig. 391.
b′
Z
B′
E′
N′
n′
M′
m′
X
G′
α
A′
O′
a′
g′
Y
A
b
O
a
B
M
N
G
E
e
n
m
g
Fig. 392.
n
m
G
o
b
A
a
B


Fig. 393.
Fig. 394.

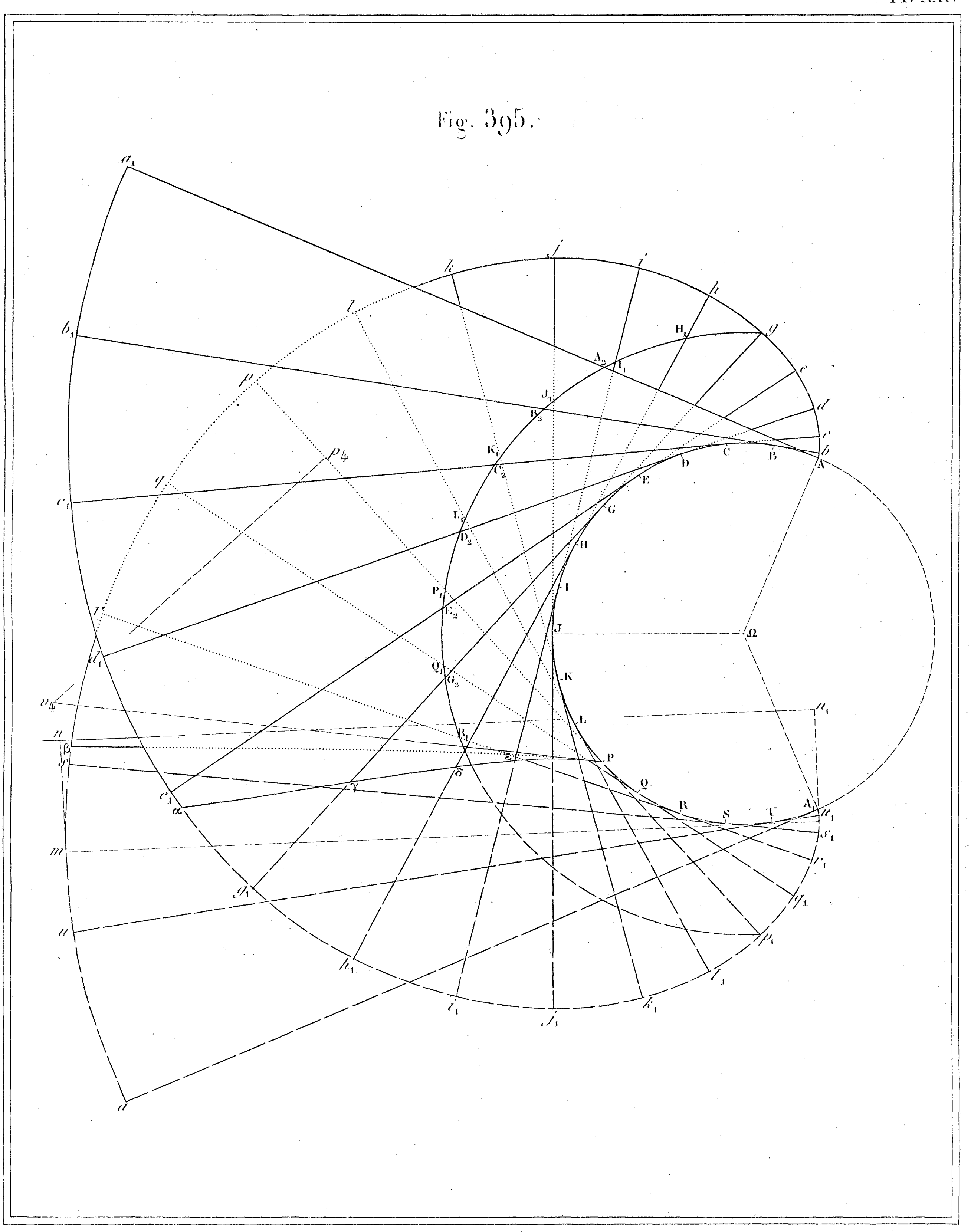
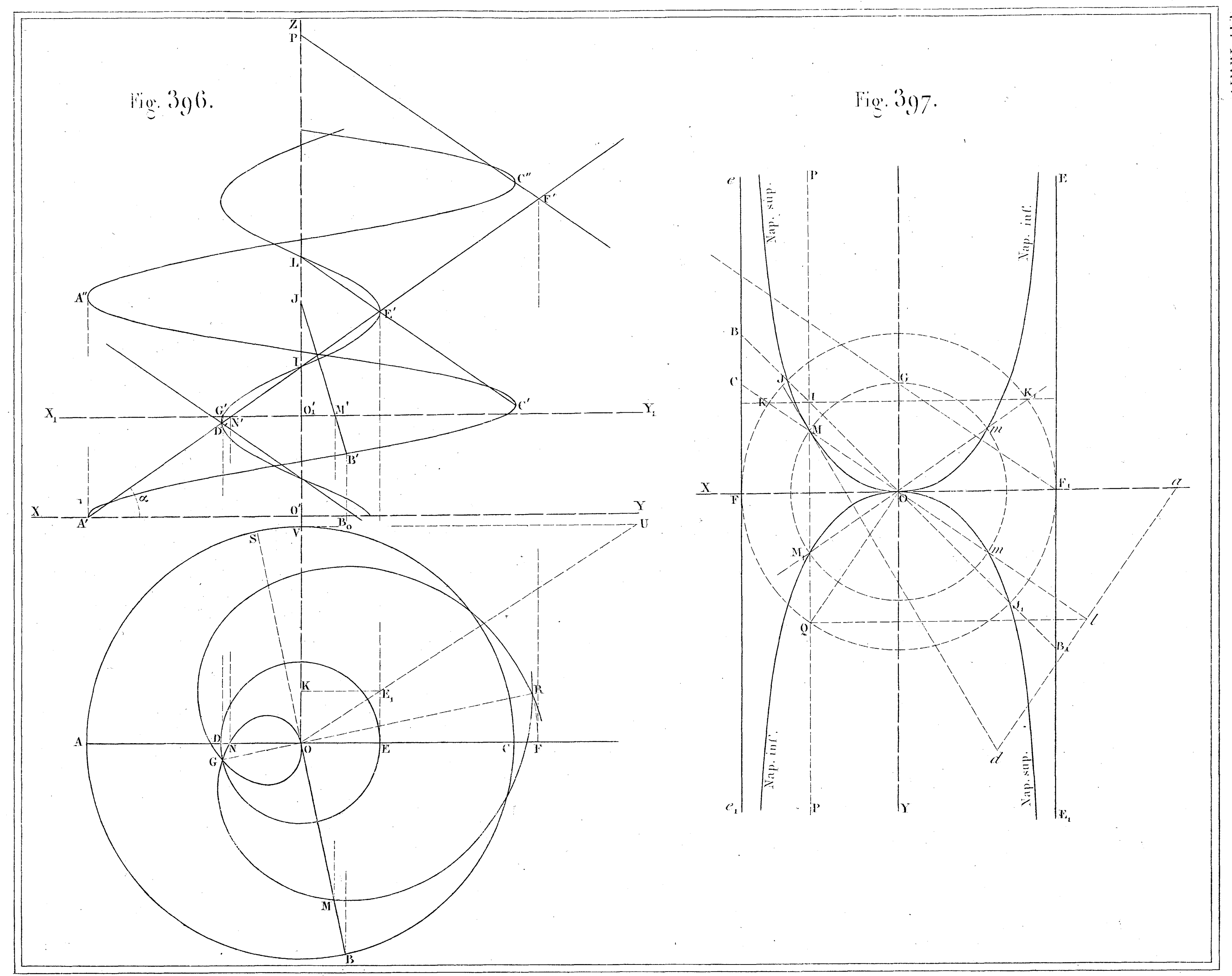
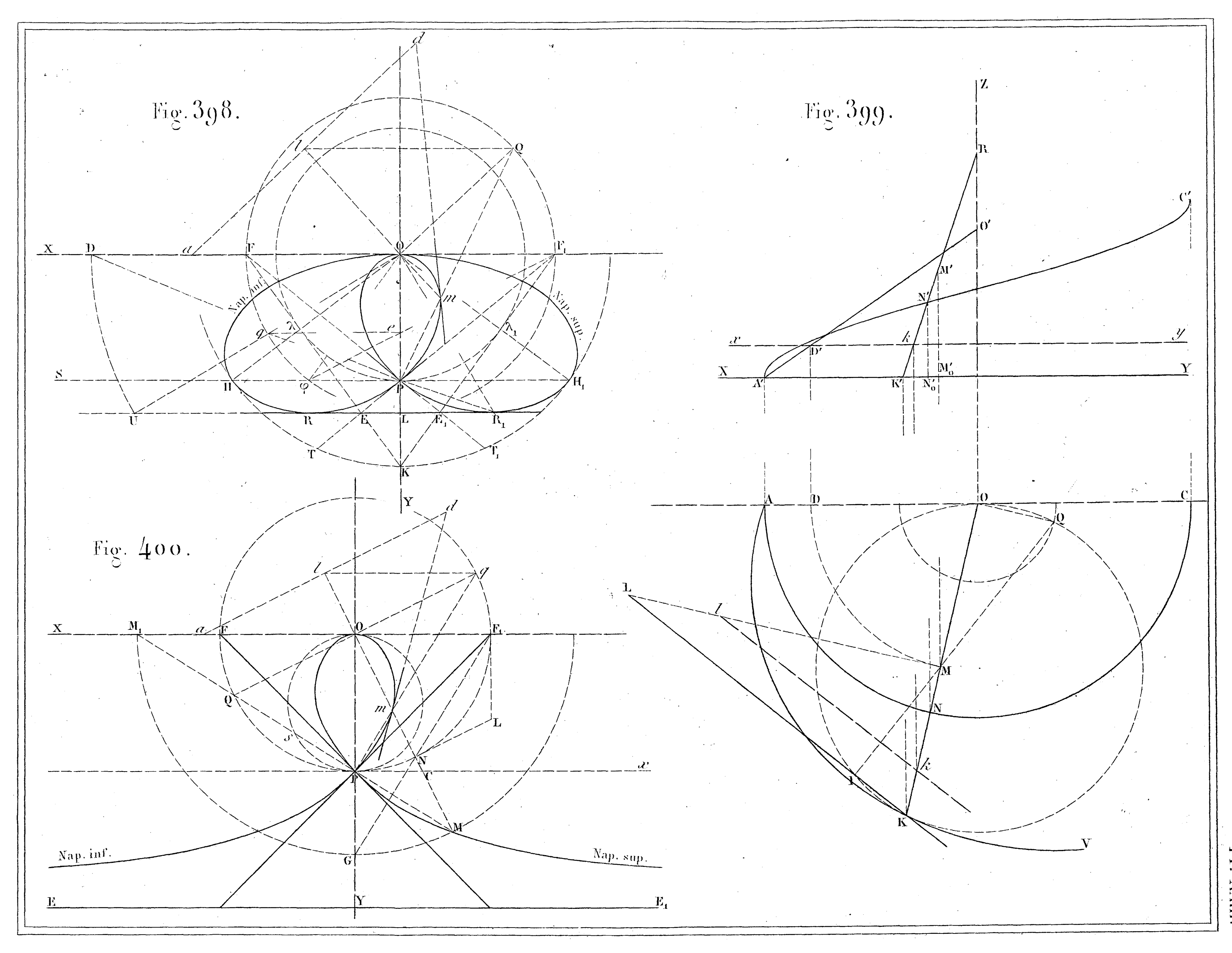


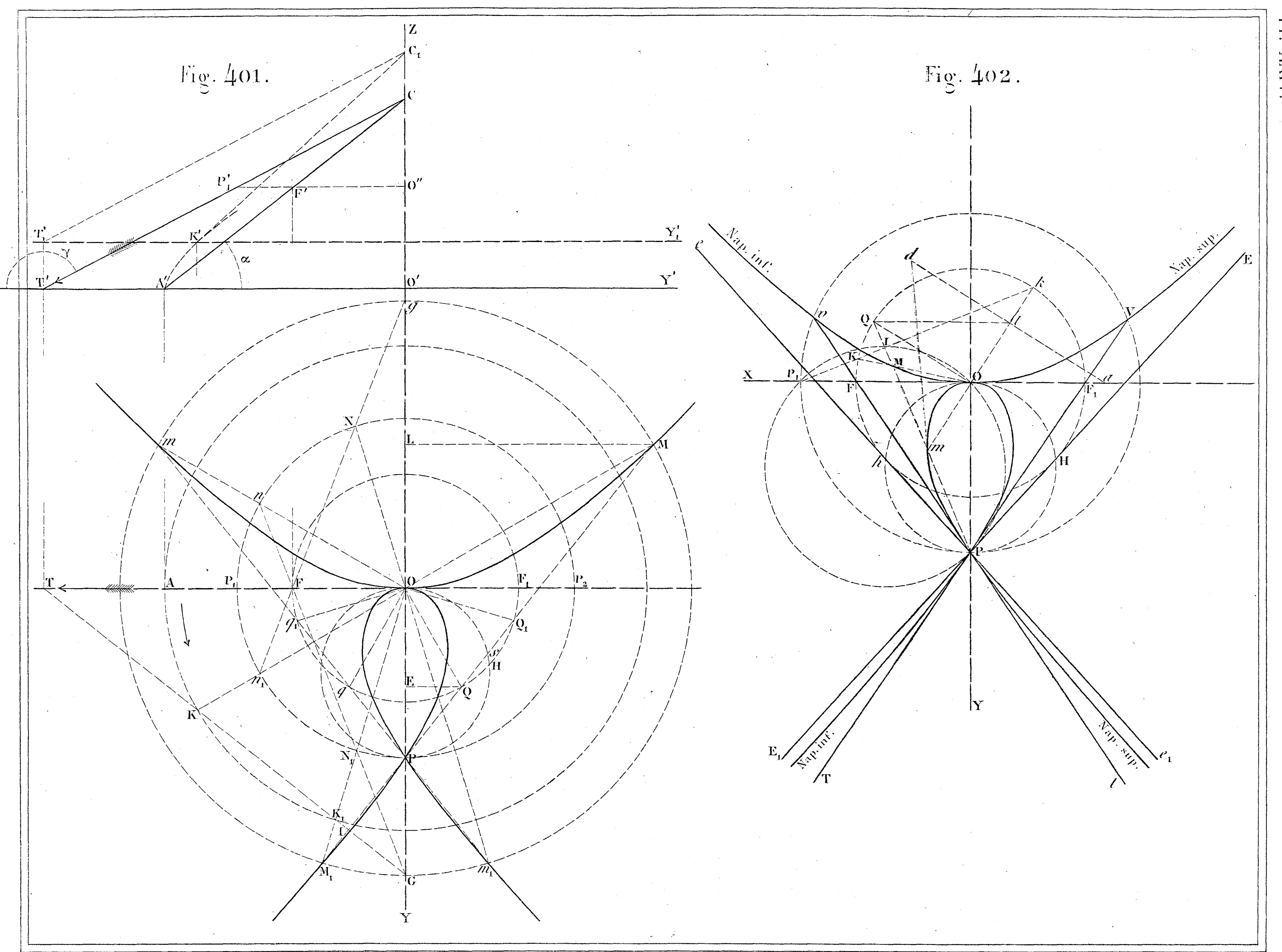
Fig. 395.

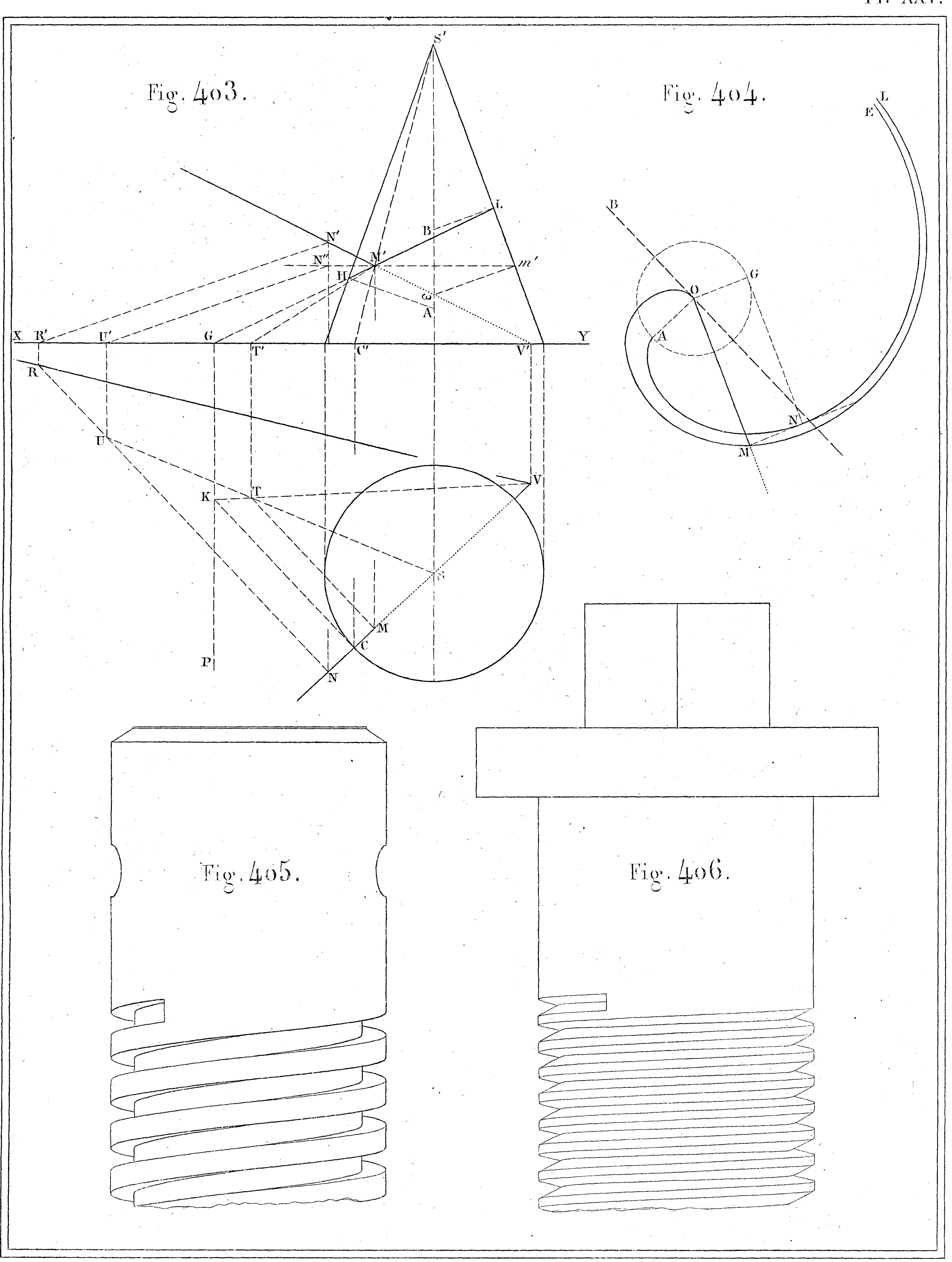
Pl. XXII.



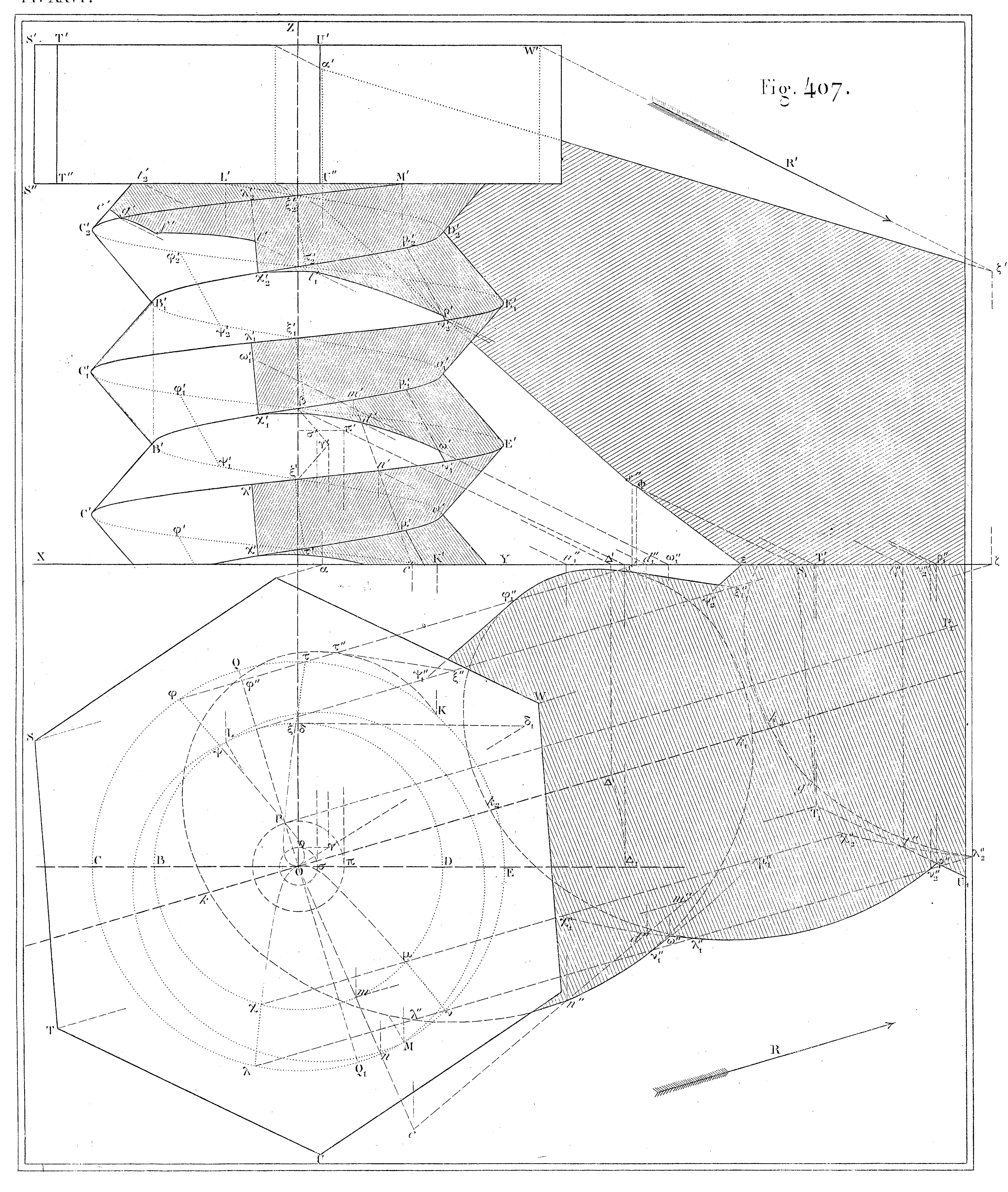

Fig. 398.
Nap. inf.
Nap. sup.
Fig. 399.
Fig. 400.
Nap. inf.
Nap. sup.

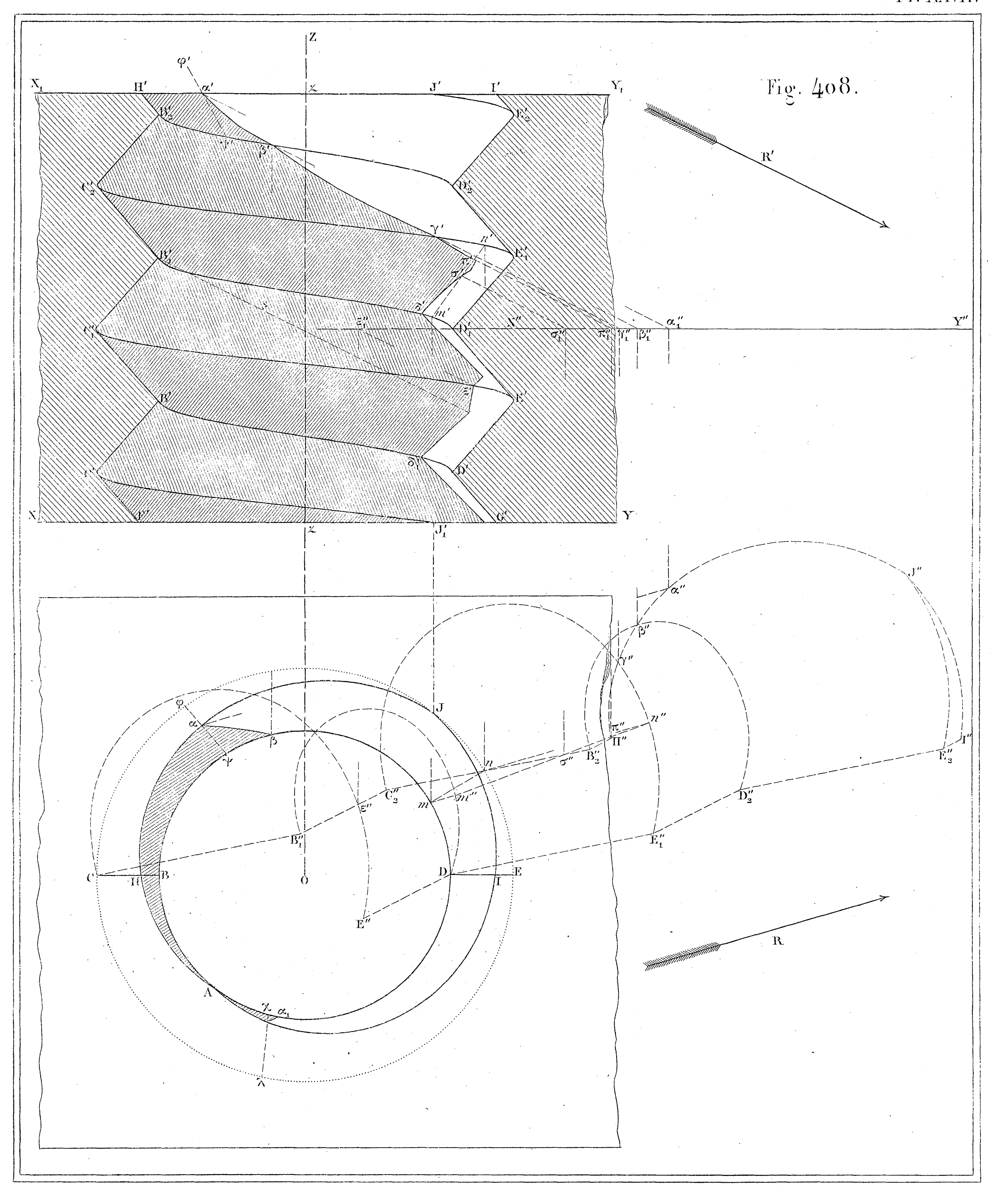
Pl. XXIV.

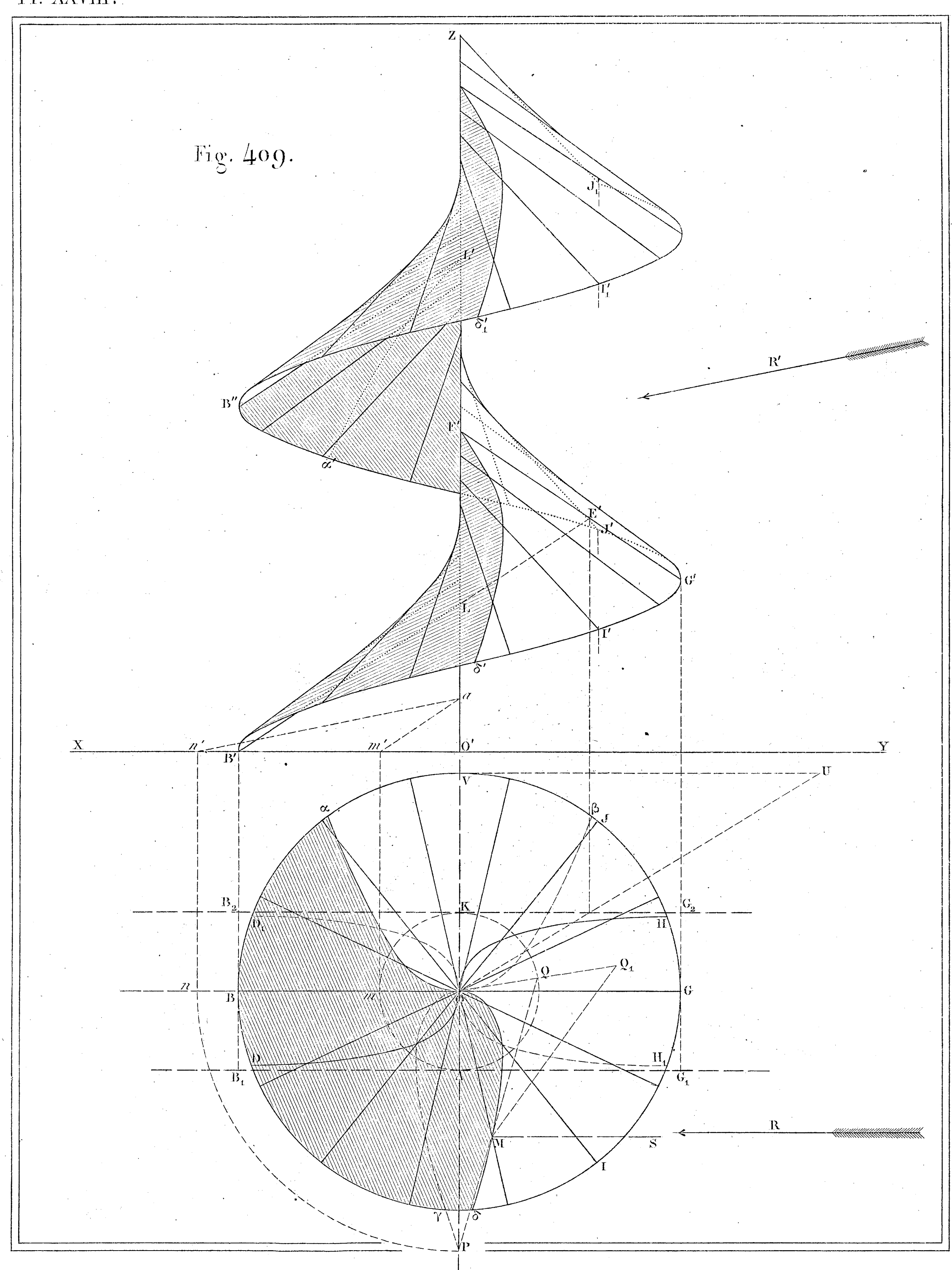


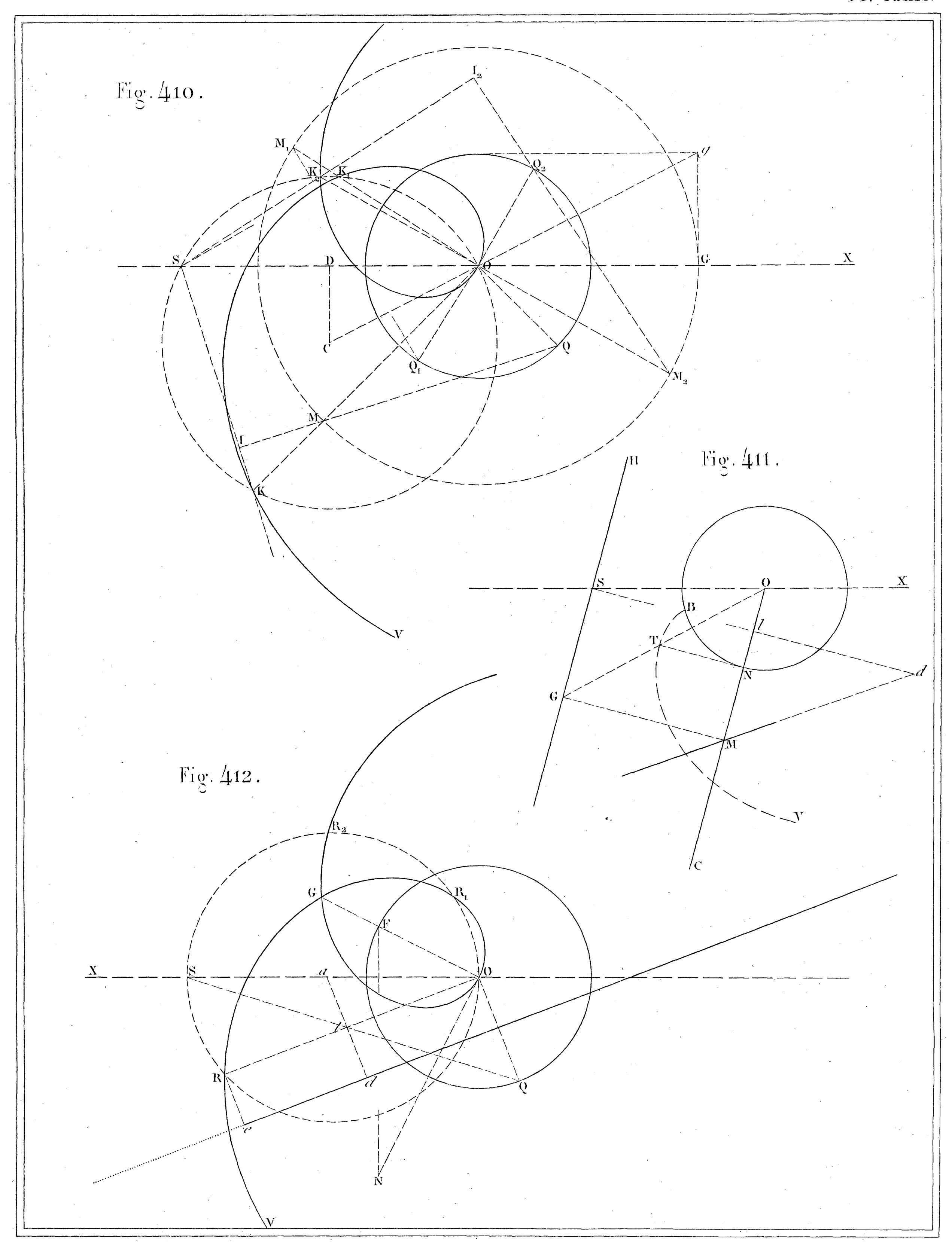

Fig. 403.
Fig. 404.
Fig. 405.
Fig. 406.

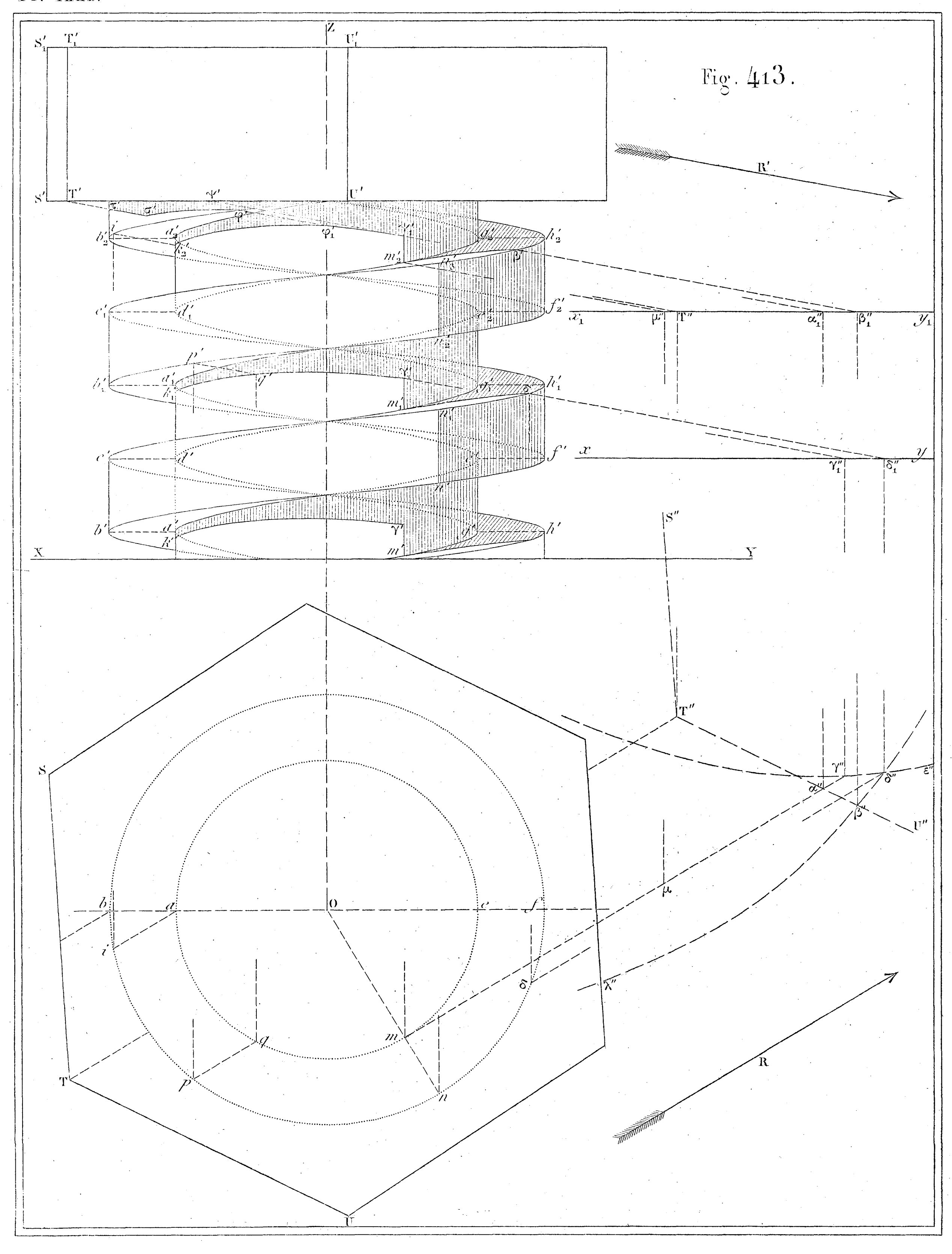
Pl. XXVI.

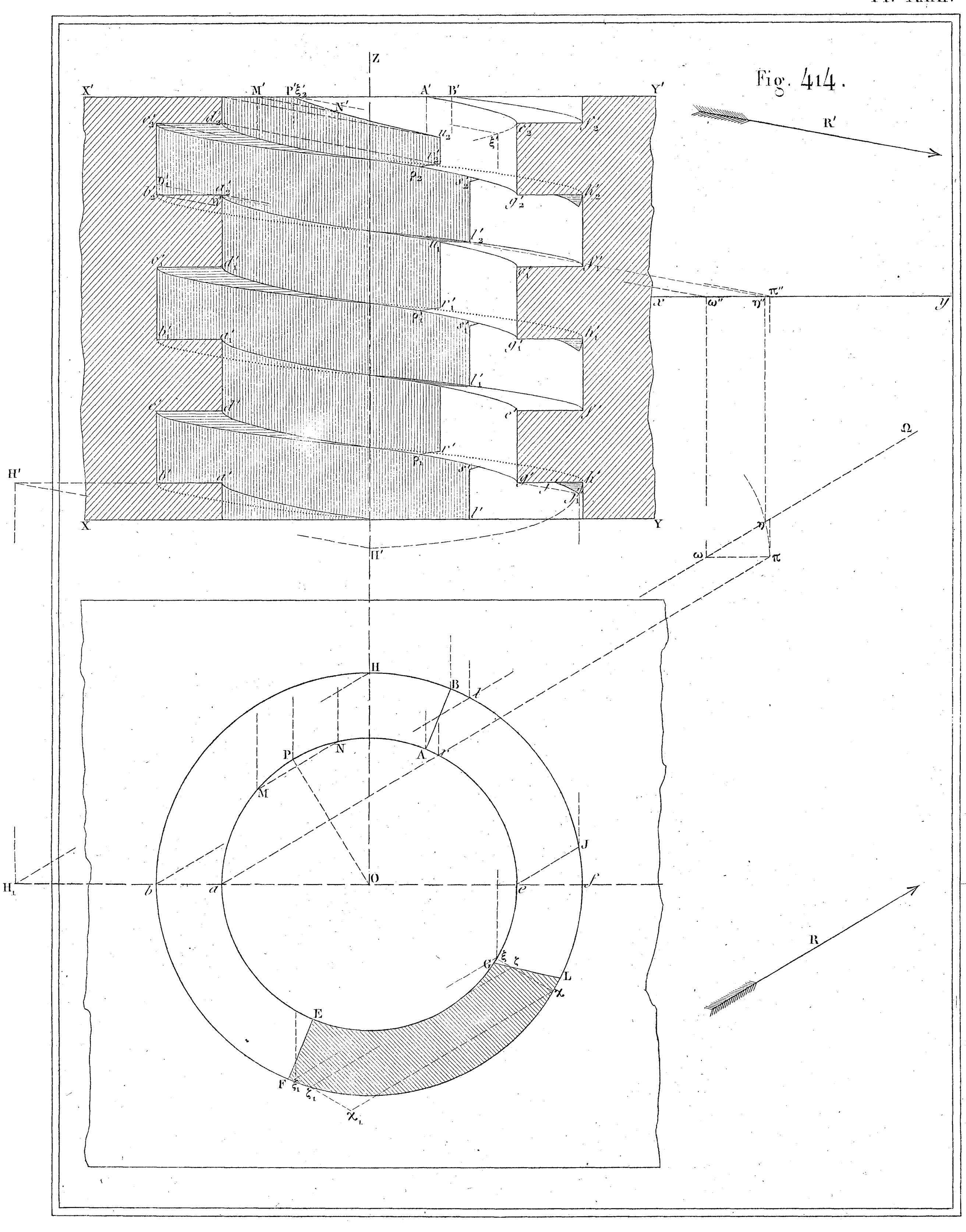

Fig. 407.
Z
X
Y
ζ
ζ'
R'
R
S'
T'
U'
W'
S''
T''
U''
M'
L'
α'
α
C'
B'
E'
K'
C
B
O
D
E
S
T
U
W
Q
Q₁
φ
L
K
M
λ
χ
μ
π
σ
ξ
δ
τ
τ''
φ''
ψ''
ξ''
λ''
ω''
Δ
Δ'
Δ₁
ε
S₁
T₁
U₁

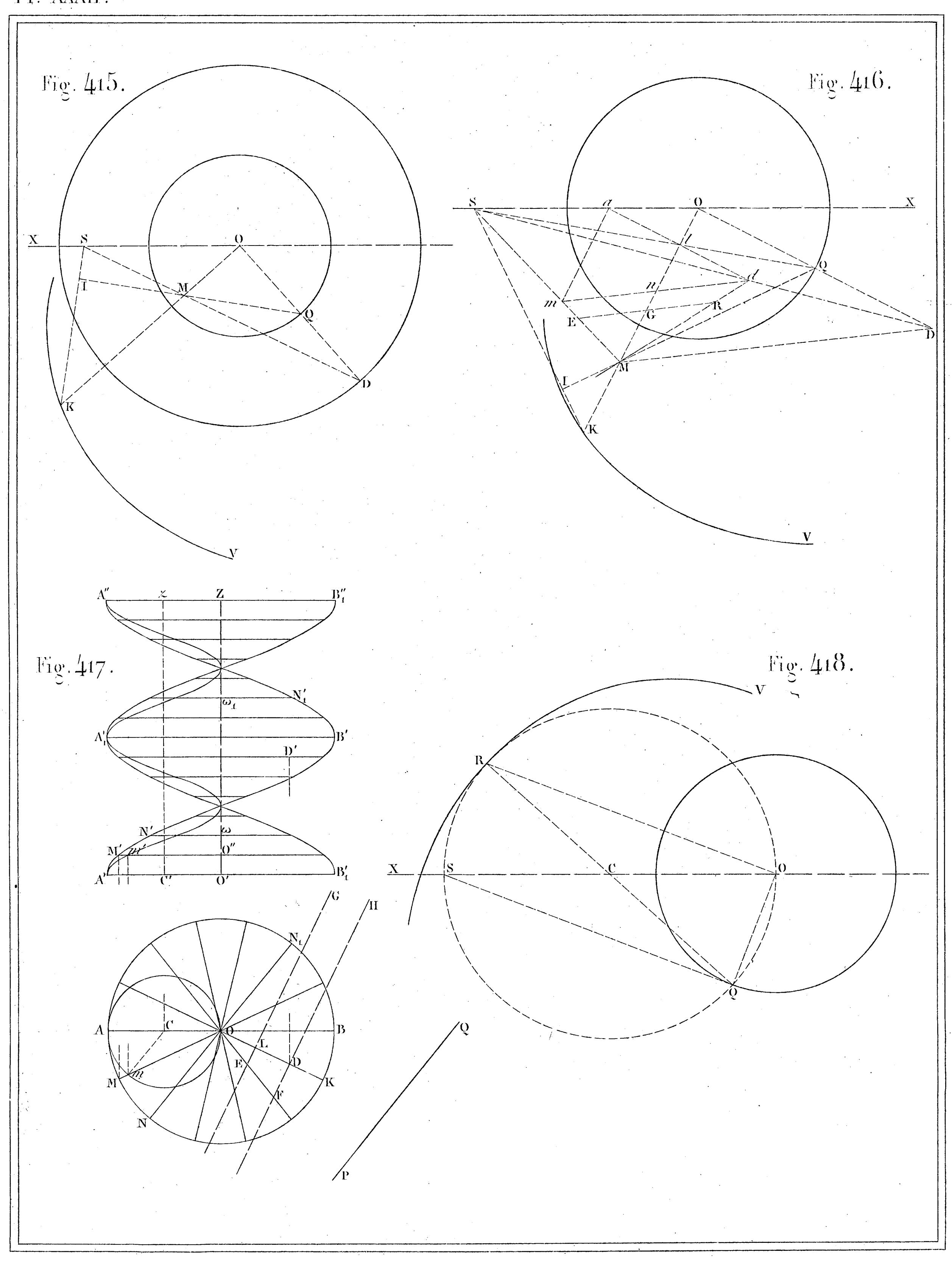

Fig. 408.
R'
R
Z
X₁
H'
α'
z
J'
I'
Y₁
φ'
Y''
X
Y
z
G'
O
C
H
B
D
I
E
J
A
φ
α
β
E''
α''
β''
γ''
J''
I''
n''
n
m
m''

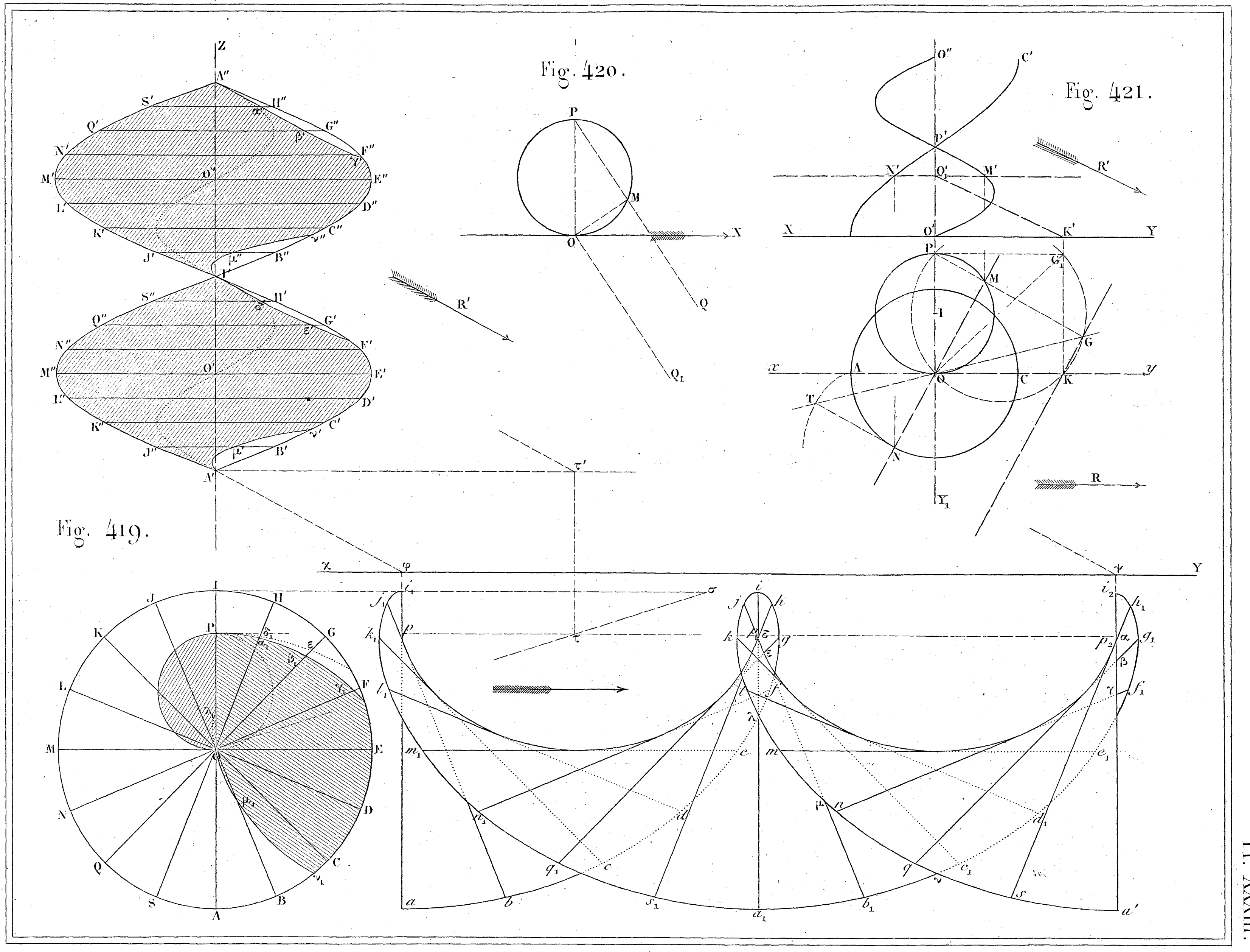

Fig. 409.
Z
J'₁
L'
I'₁
δ'₁
R'
B''
E'
α'
E'
J'
G'
L
I'
δ'
a
X
n'
B'
m'
O'
Y
U
V
α
β
f
B₂
K
G₂
D₁
H
Q
Q₁
n
B
m
G
D
H₁
B₁
G₁
R
M
S
I
γ
δ
P

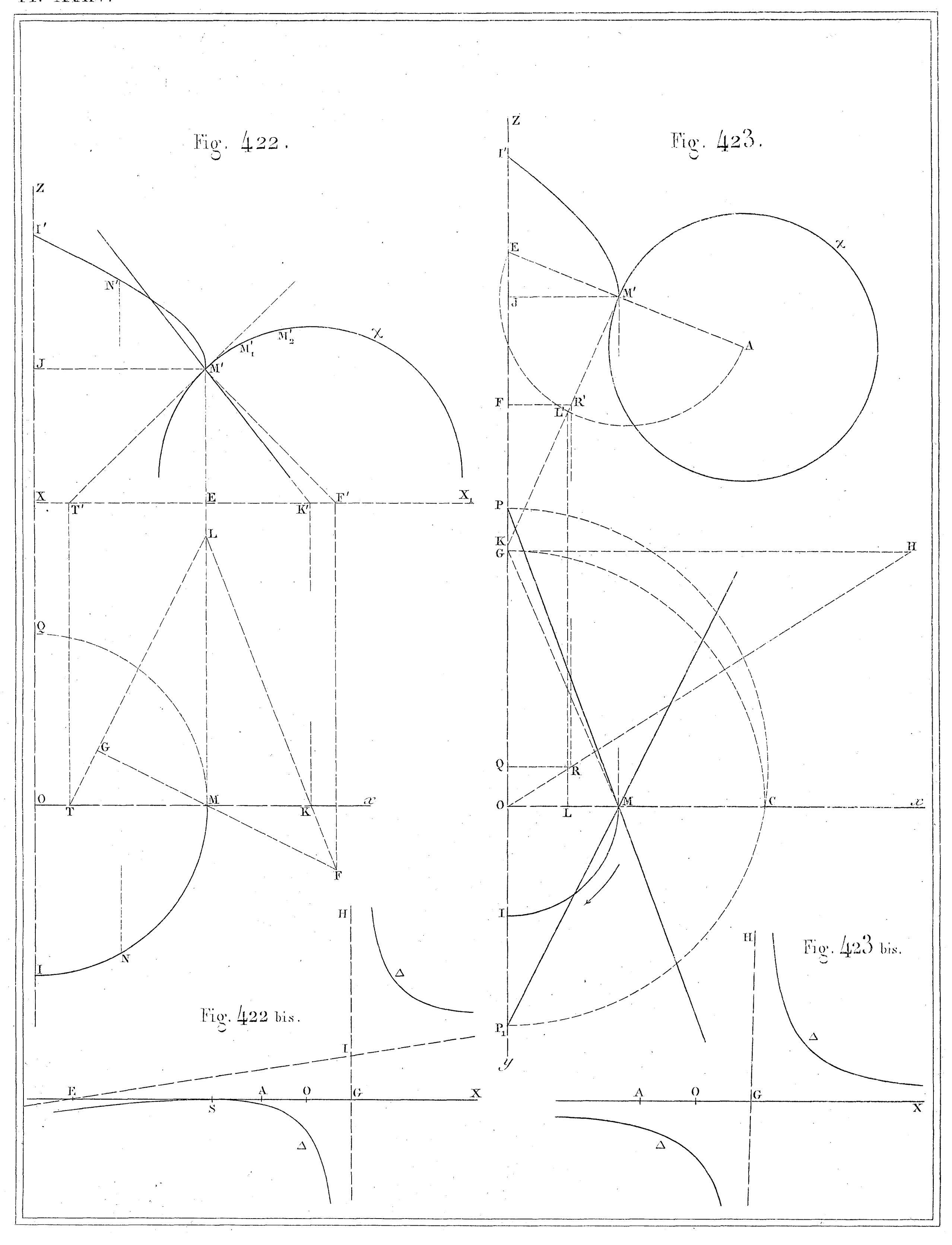

Fig. 410.
Fig. 411.
Fig. 412.

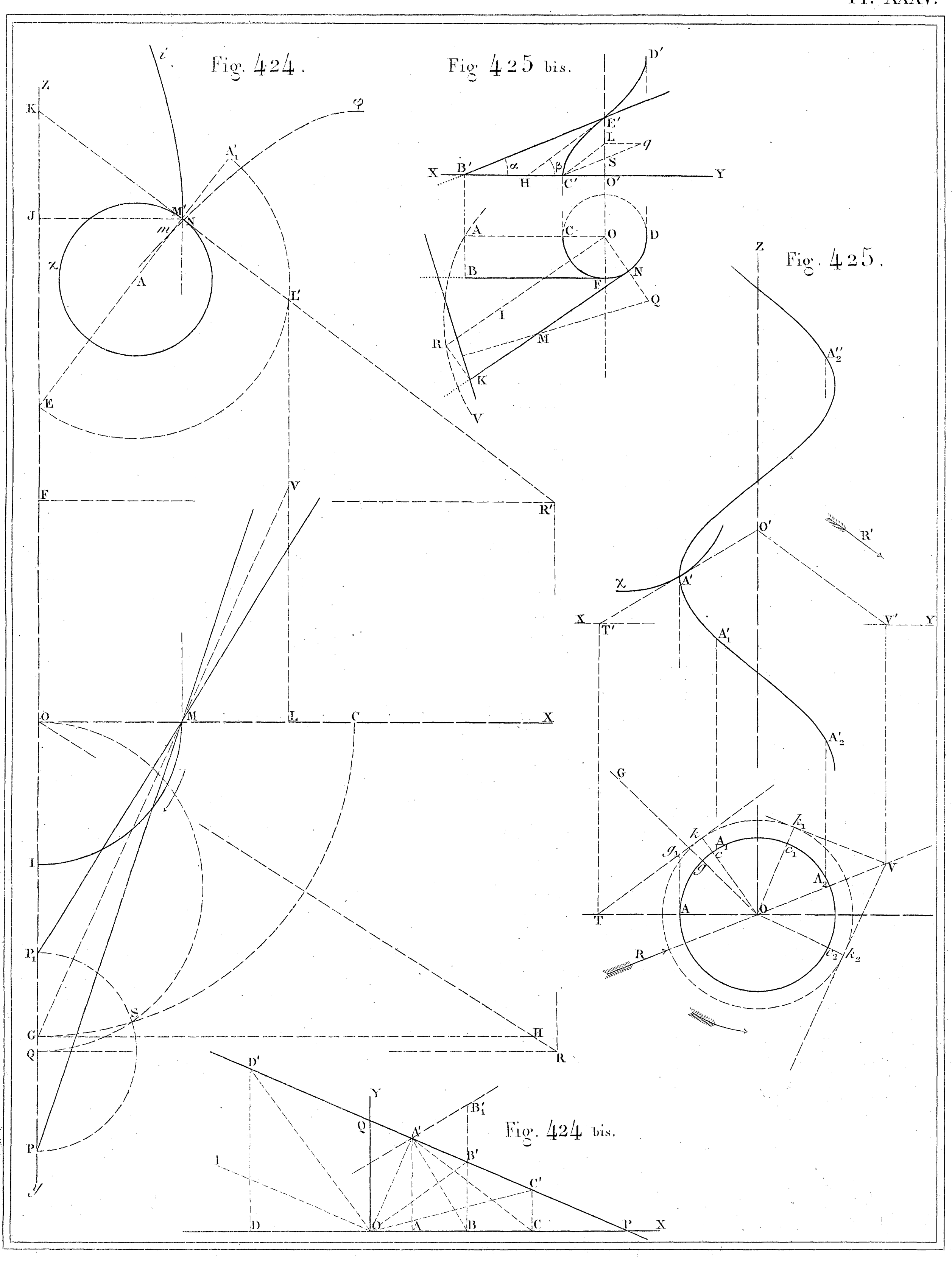

Fig. 413.

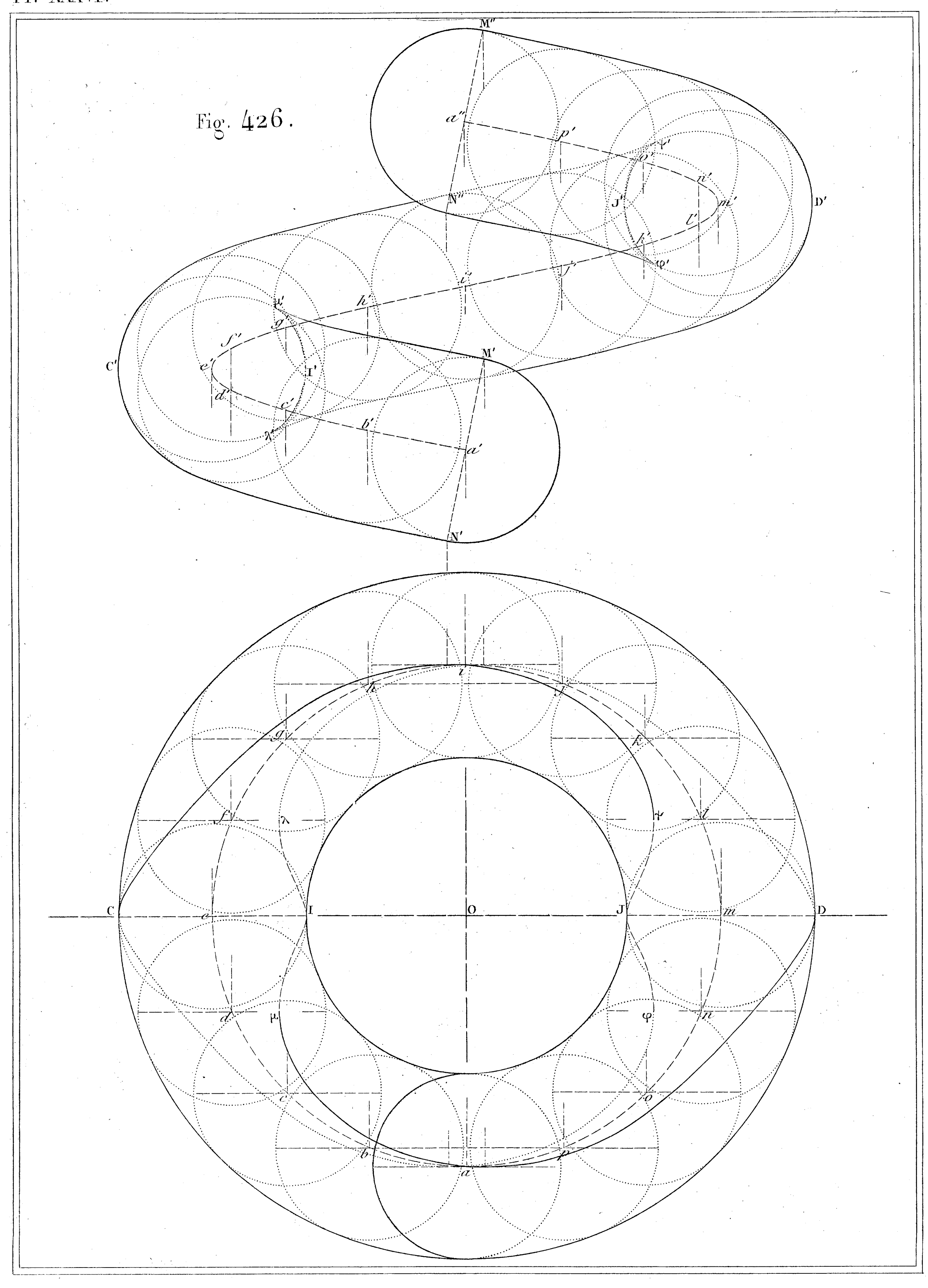

Fig. 414.

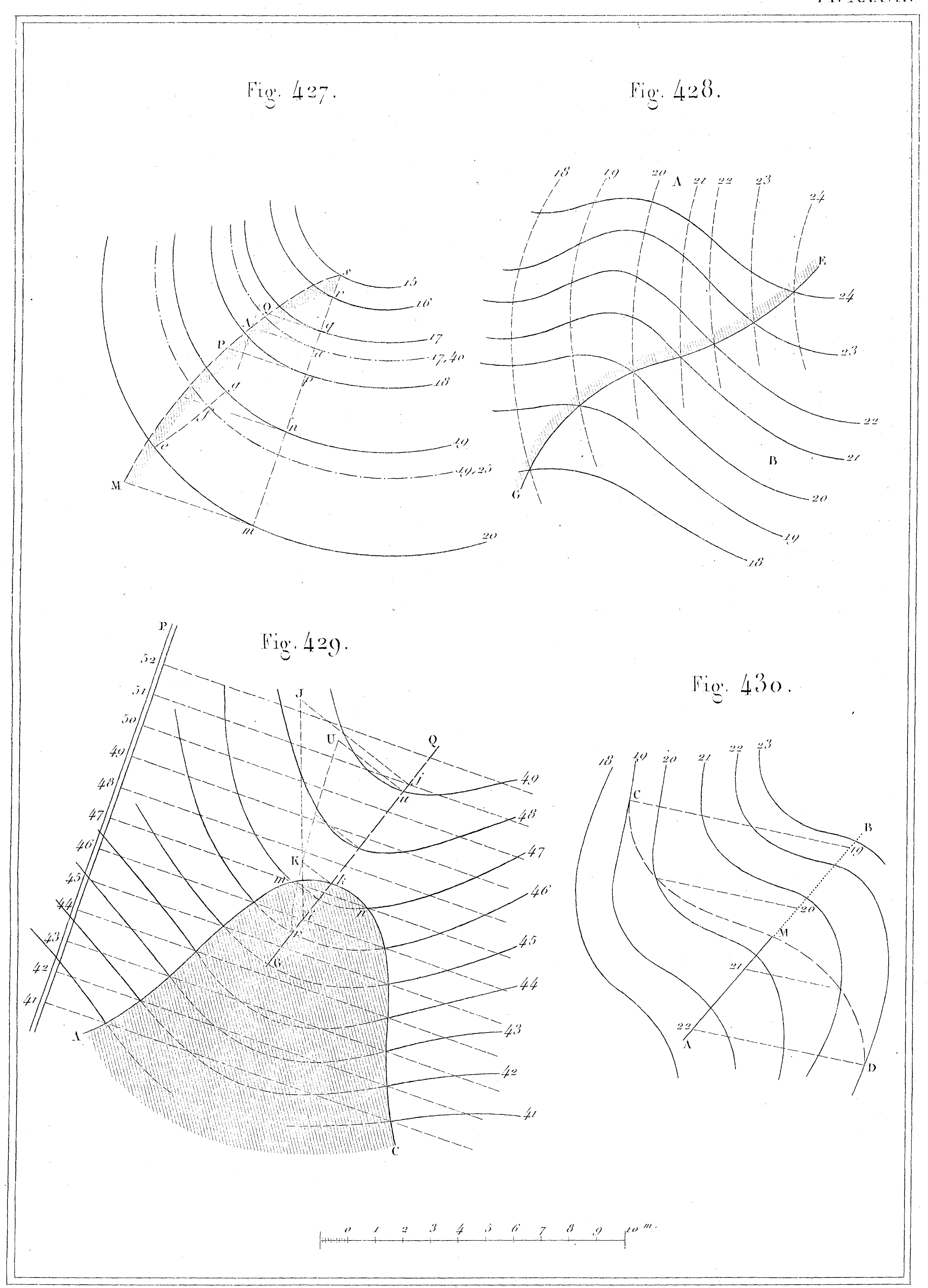

Fig. 415.
X
S
O
I
M
Q
K
D
V
Fig. 416.
S
a
O
X
l
Q
n
d
m
E
G
R
D
M
I
K
V
Fig. 417.
A″
z
Z
B″₁
N′₁
ω₁
A′₁
B′
D′
N′
ω
M′
m′
O″
A′
C′
O′
B′₁
G
H
N₁
A
C
O
B
L
D
E
M
m
K
F
N
Q
P
Fig. 418.
V
R
X
S
C
O
Q

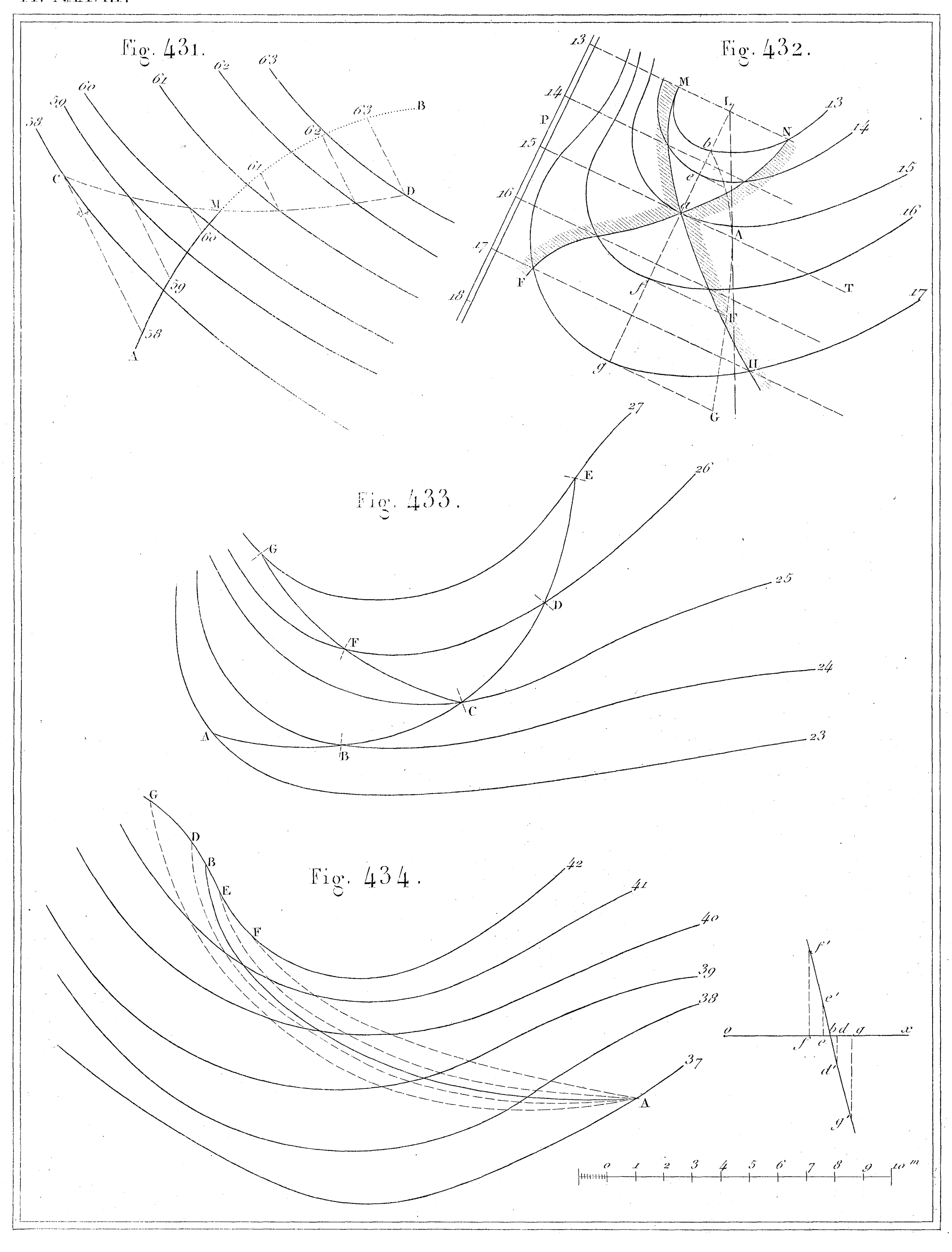

Fig. 419.
Fig. 420.
Fig. 421.

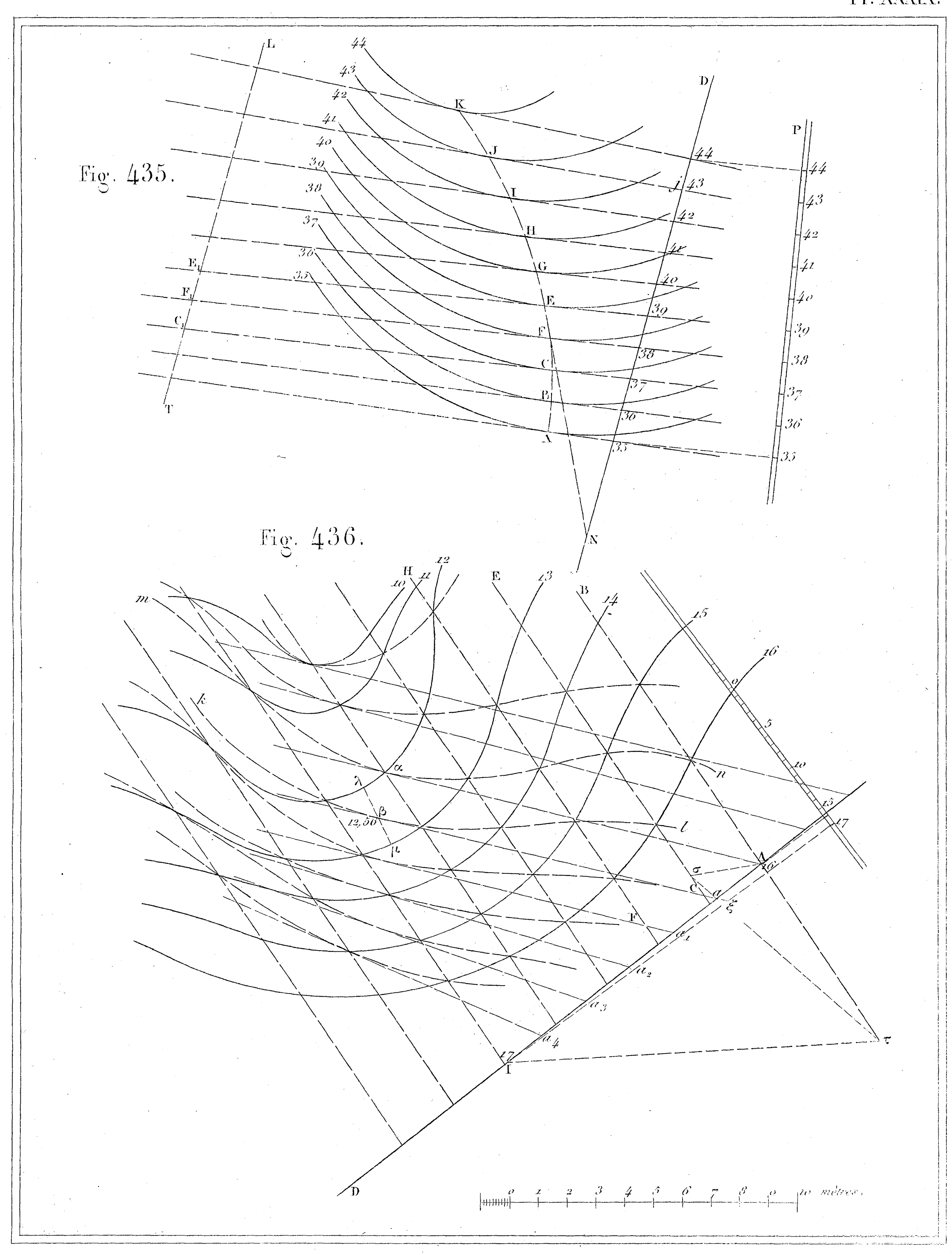

Fig. 422.
Z
I′
N′
J
M′
M′₁
M′₂
χ
X
T′
E
K′
F′
X₁
L
Q
G
O
T
M
K
x
F
I
N
H
Δ
Fig. 422 bis.
I
E
A
O
G
X
S
Δ
Fig. 423.
Z
I′
E
J
M′
A
χ
F
L′
R′
P
K
G
H
Q
R
O
L
M
C
x
I
P₁
y
Fig. 423 bis.
H
Δ
A
O
G
X
Δ

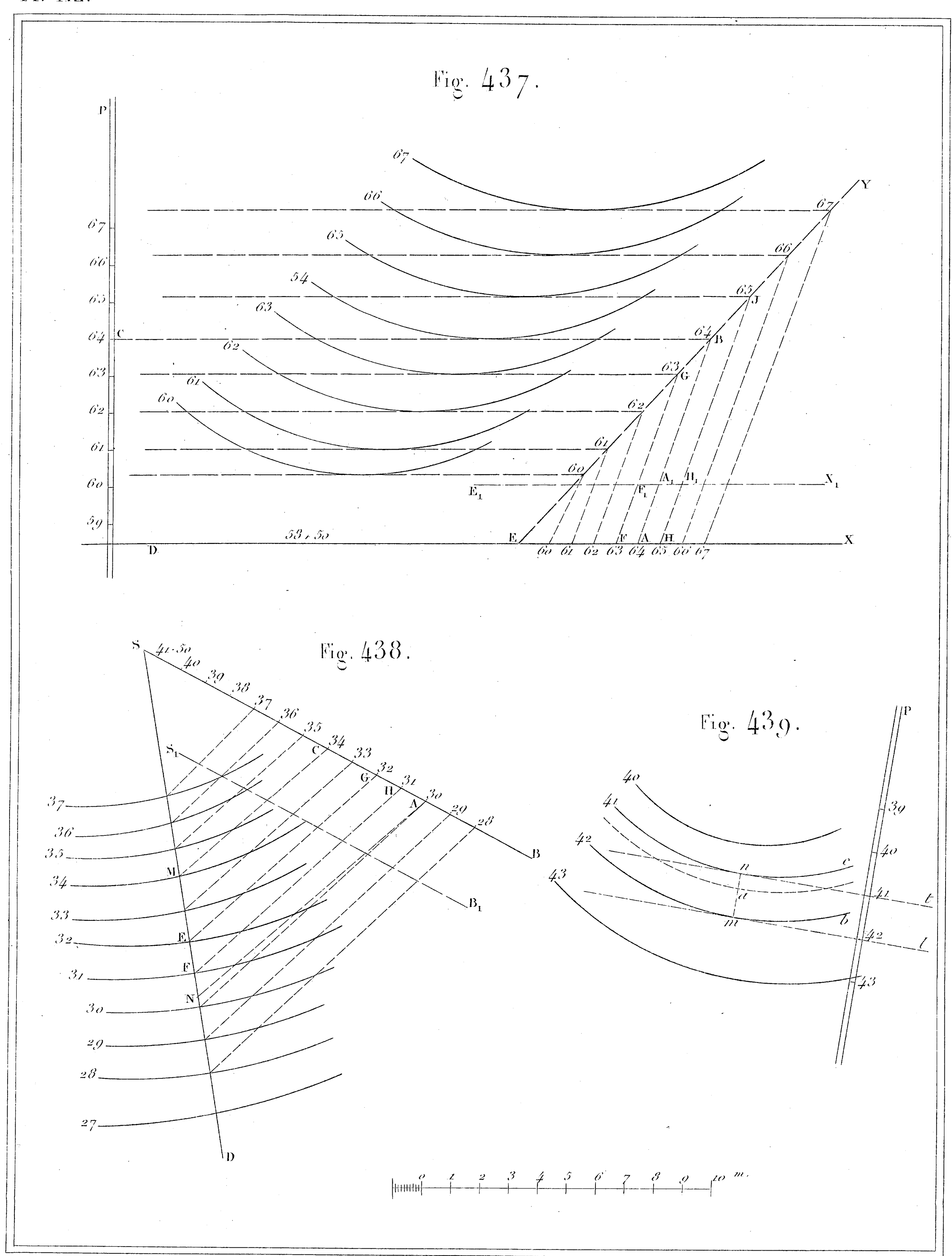

Fig. 424.
Fig. 425 bis.
Fig. 425.
Fig. 424 bis.

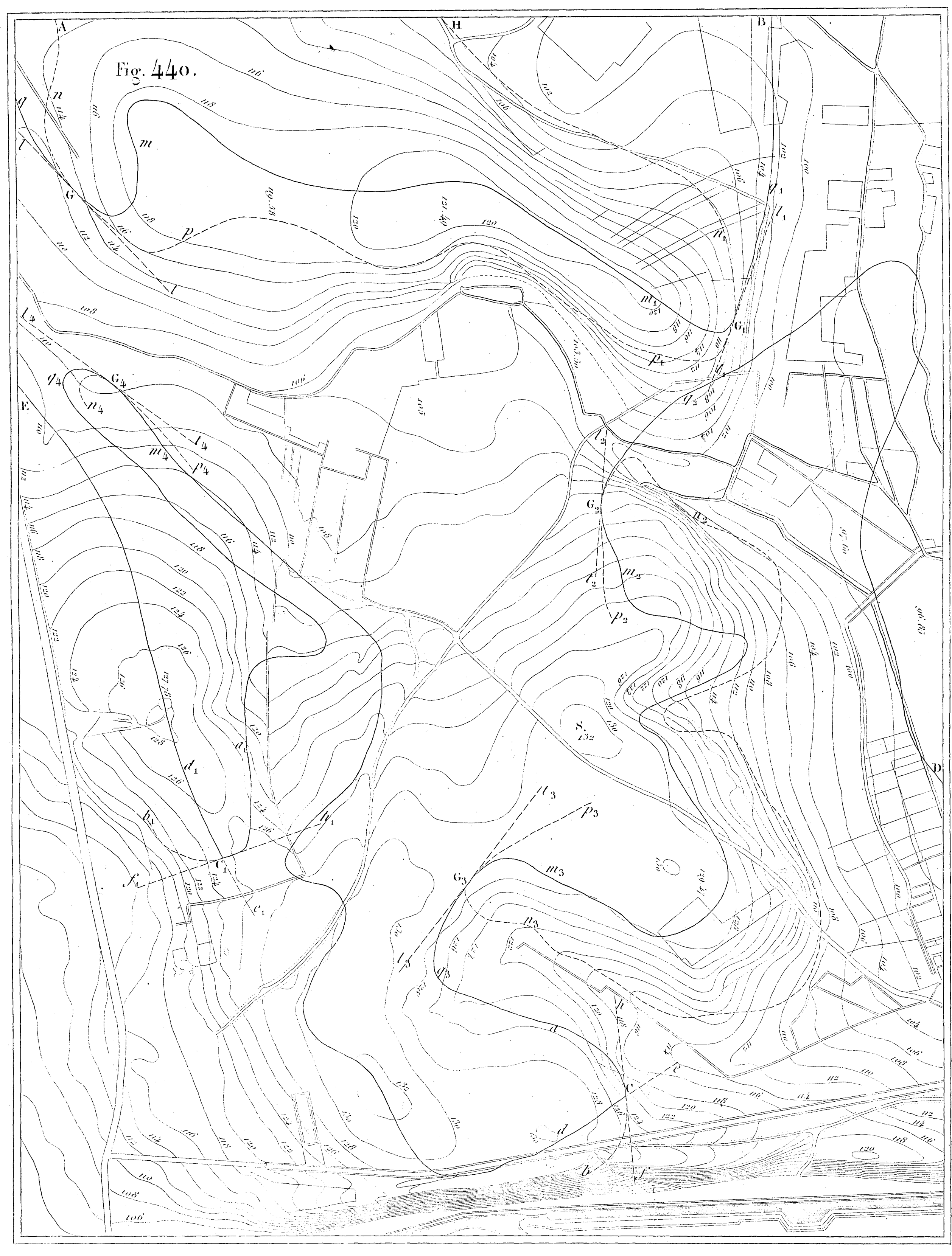

Fig. 426.
M″
a″
p′
o′
N″
J′
n′
m′
D′
l′
k′
φ′
i′
j′
h′
g′
f′
e′
C′
I′
M′
d′
c′
b′
a′
N′
i
h
j
g
k
f
λ
l
C
e
I
O
J
m
D
d
μ
φ
n
c
o
b
p
a

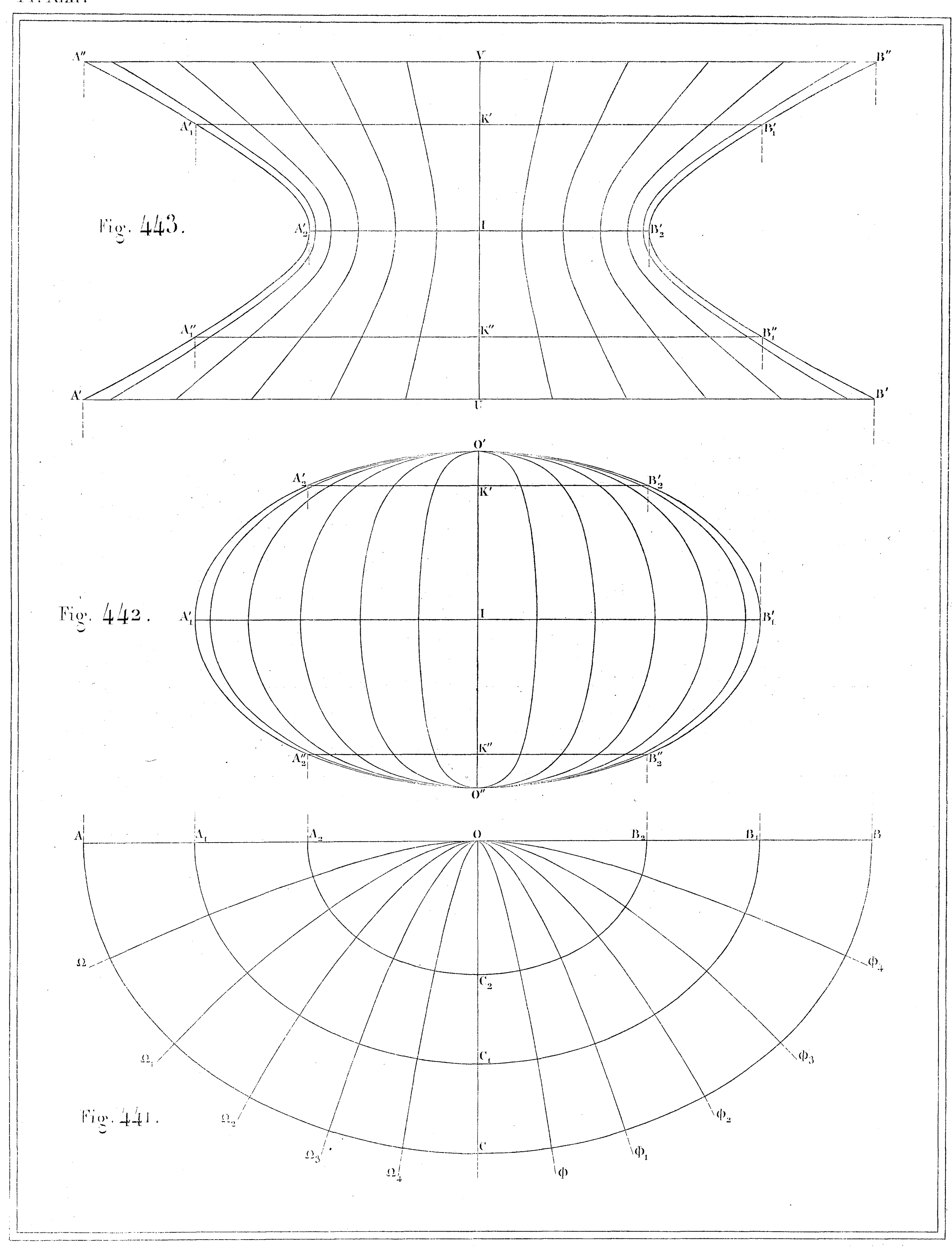

Fig. 427.
Fig. 428.
Fig. 429.
Fig. 430.

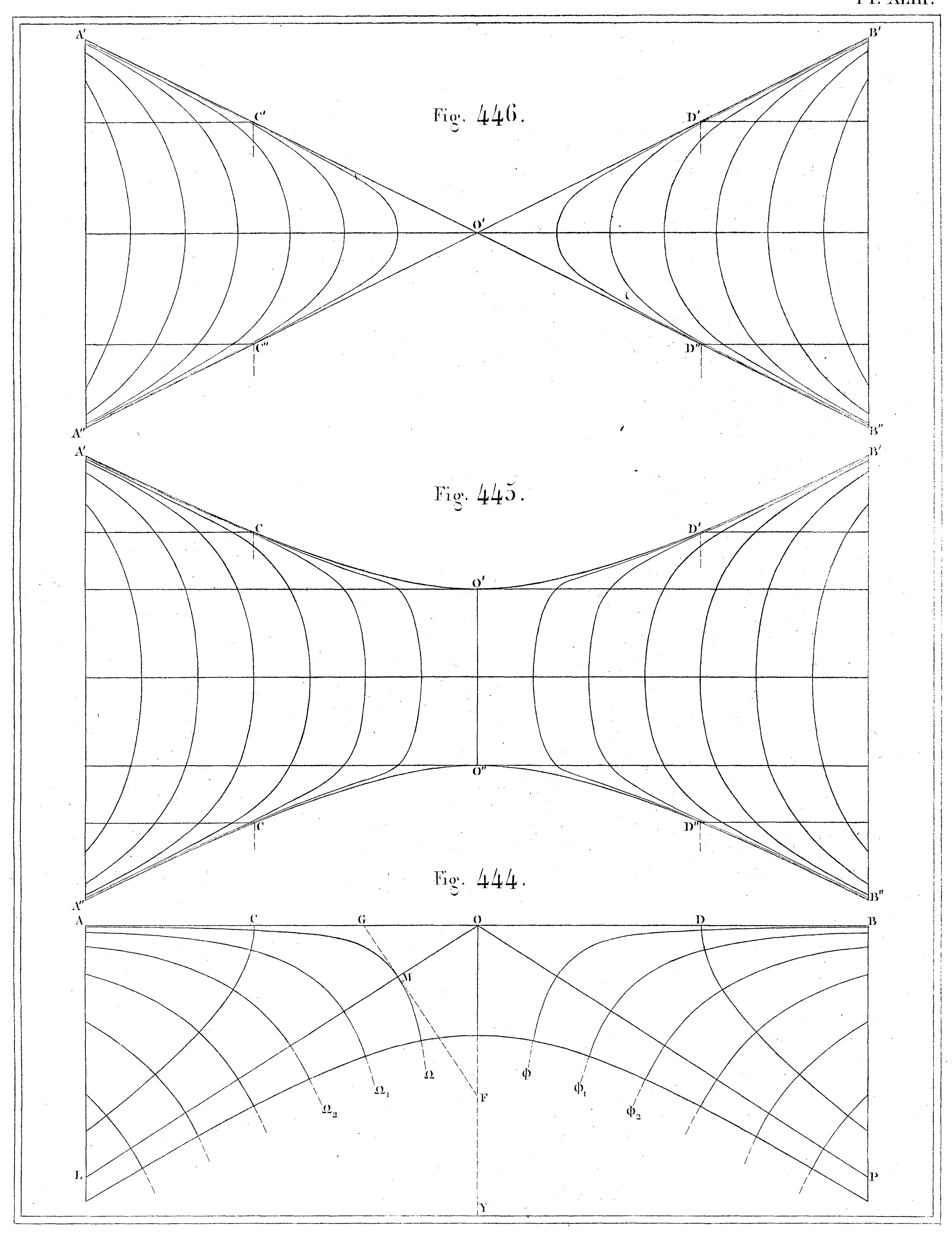

Fig. 431.
Fig. 432.
Fig. 433.
Fig. 434.


Fig. 435.
Fig. 436.
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 mètres.


Fig. 437.
Fig. 438.
Fig. 439.


Fig. 440.


Fig. 443.
Fig. 442.
Fig. 441.


Fig. 446.
A′
B′
C′
D′
O′
C″
D″
A″
B″
Fig. 445.
A′
B′
C
D′
O′
O″
C
D″
A″
B″
Fig. 444.
A
C
G
O
D
B
M
Ω
Ω₁
Ω₂
F
Φ
Φ₁
Φ₂
L
P
Y

Pl. XLIV.

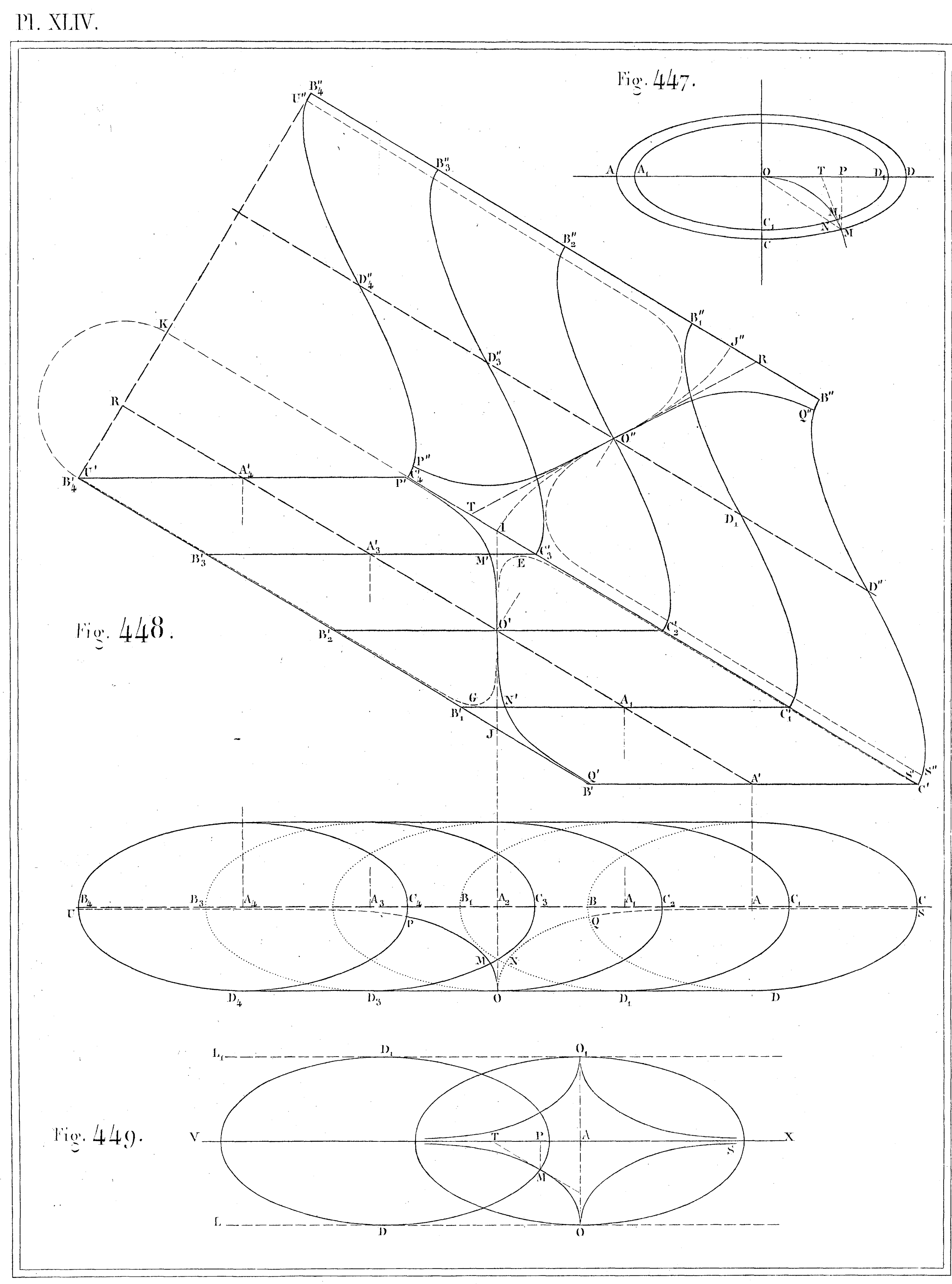
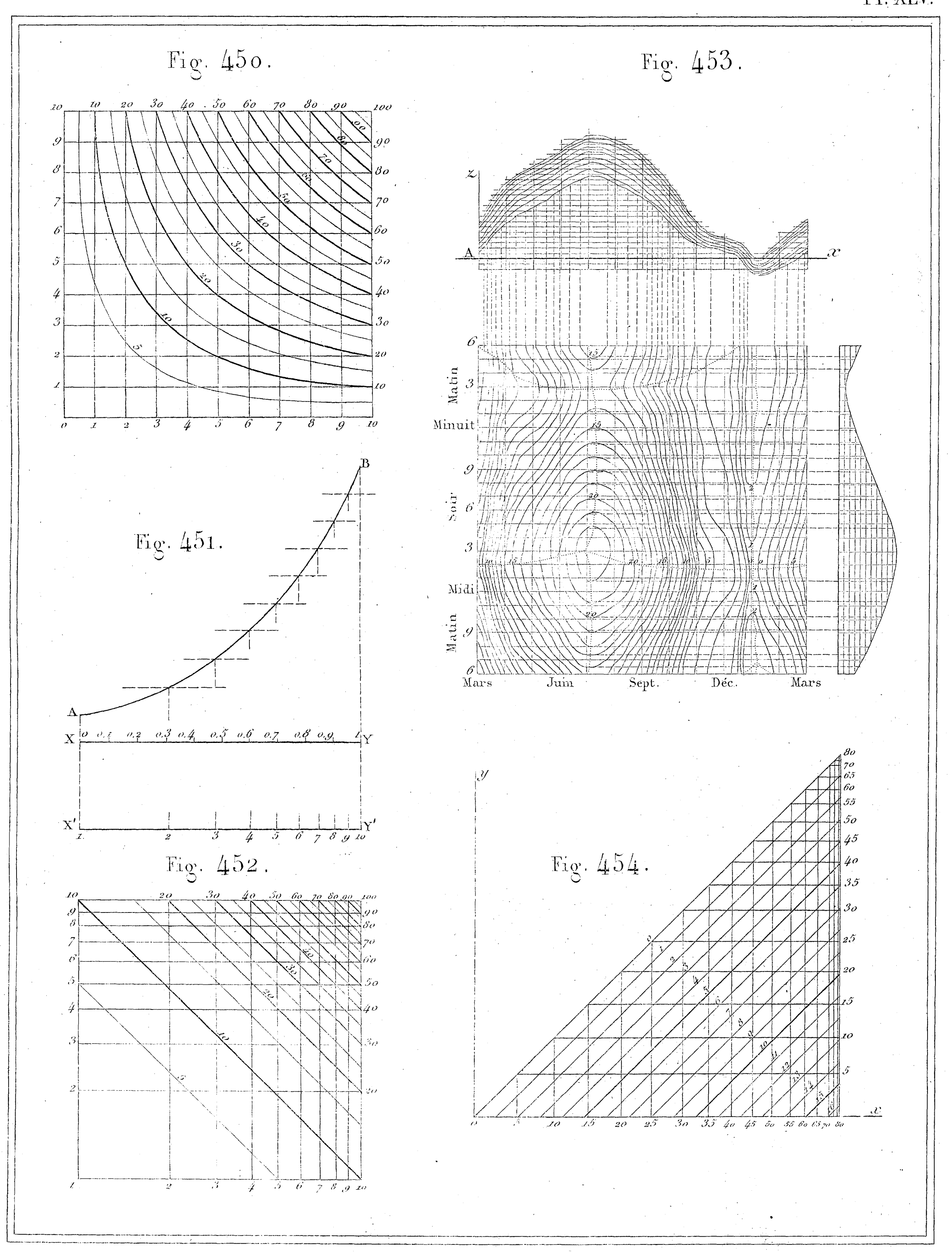


Fig. 447.

Fig. 448.

Fig. 449.


Fig. 450.
Fig. 453.
A
x
z
Matin
Minuit
Soir
Midi
Matin
Mars
Juin
Sept.
Déc.
Mars
Fig. 451.
A
B
X
Y
X'
Y'
Fig. 452.
Fig. 454.
y
x

Pl. XLVI.

